Propósito de la sesión. Identificar las propiedades de los sistemas de numeración aditivos no posicionales, mediante el sistema de numeración egipcio.
Organización del grupo. Gran parte del trabajo en la sesión es en parejas, excepto en los momentos de intercambio grupal y en *Lo que aprendimos,* en donde es individual.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que en esta primera secuencia se incluyen breves comentarios sobre lo que se va a hacer en cada apartado y sobre la forma de organizarse para trabajar.

1

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos se enfrenten a la actividad por sí mismos, así que en este momento es preferible no darles explicaciones sobre las respuestas o los procedimientos que pueden utilizar.

Respuestas. En el sistema de numeración egipcio cada símbolo tiene un valor independientemente del lugar en el que se coloque, por ello se dice que es un sistema no posicional.
Para representar el número 8 se escriben ocho símbolos de valor 1, para representar el 76 se escriben siete símbolos de valor 10 y seis de valor 1.

Sugerencia didáctica. Cuando los alumnos lleguen a este punto de la tabla todavía no conocerán el símbolo que vale 10 000. Si tienen dificultades sugiérales que resuelvan el siguiente cuadro, en él tendrán manera de saber el valor de dicho símbolo. Lo mismo ocurre en el cuadro en el que hay que escribir con símbolos egipcios el número 1 200 108.

SECUENCIA 1

Sistemas de numeración

En esta secuencia identificarás las propiedades del sistema de numeración decimal y las contrastarás con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales.

SESIÓN 1

ACERTIJOS ARQUEOLÓGICOS

Es la introducción al tema de la sesión.

>>> Para empezar

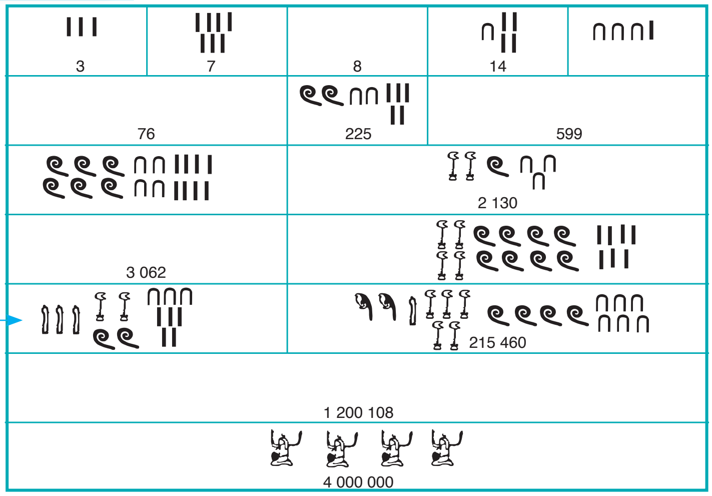
La necesidad de contar y de registrar cantidades ha estado presente en muchas civilizaciones; sin embargo, no todas lo han hecho de la misma manera. En quinto grado de primaria realizaste la comparación del sistema de numeración decimal con el sistema egipcio y con el sistema romano. En esta sesión se va a retomar el sistema egipcio. ¿Sabías que se comenzó a utilizar aproximadamente en el año 3000 antes de nuestra era?

Aquí se propone un problema.

Van a trabajar en parejas.

>>> Consideremos lo siguiente

Fíjense cómo escribían los antiguos egipcios algunos números y completen la tabla.



14

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de los números.
Antecedentes
Durante la escuela primaria los alumnos reflexionaron sobre las reglas del sistema de numeración decimal, particularmente sobre el agrupamiento y el valor posicional a través de actividades de lectura, escritura, ordenamiento y construcción de series numéricas con números naturales. Ahora se pretende que se hagan explícitas las ventajas del sistema decimal comparándolo con otros sistemas posicionales y no posicionales.

Propósitos de la secuencia
Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	*Acertijos arqueológicos* Identificar las propiedades de los sistemas de numeración aditivos no posicionales, mediante el sistema de numeración egipcio.	
2	*Otro sistema de numeración* Identificar las propiedades de los sistemas de numeración posicionales, mediante el sistema de numeración maya.	Video *Los números mayas* Interactivo
3	*El sistema decimal* Explicitar las principales características del sistema de numeración decimal.	

Escriban en sus cuadernos el sucesor de este número, según el sistema egipcio.

𓍢𓍢 ∩∩∩∩∩ IIIII
𓍢𓍢 ∩∩∩∩ IIII

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las encontraron.

Todo el grupo.

Recuerden que:
Para encontrar el sucesor de un número entero debe sumársele uno; para encontrar el antecesor debe restársele uno. Por ejemplo, el sucesor de 7 es 8 y su antecesor es 6.

Son las actividades de la sesión que te ayudarán a recordar lo que ya sabes, a analizar lo que estés aprendiendo y a deducir nuevas estrategias de solución.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla, escriban los símbolos egipcios y el valor de algunos de ellos, según corresponda.

Símbolo egipcio	I	∩		𓆼			𓁨
Valor del símbolo			100		10 000	100 000	

II. Completen la tabla con números del sistema egipcio.

Antecesor	Número en el sistema egipcio	Sucesor
II II	III II	
	𓍢 ∩∩ IIIII ∩∩ IIII	𓍢 ∩∩∩ ∩∩
	𓆼𓆼 ∩∩∩	
𓆐 𓍢𓍢𓍢 𓍢𓍢𓍢 ∩∩∩ ∩∩∩ ∩∩∩ IIII IIII	𓆐 𓍢𓍢𓍢 𓍢𓍢𓍢 ∩∩∩ ∩∩∩ ∩∩∩ IIIII IIII	
	𓂭 𓆼𓆼𓆼	
	𓁨 𓆐𓆐 𓂭	

Comparen sus tablas y comenten cuántos símbolos se necesitan para escribir el antecesor de 𓆐, según el sistema egipcio.

15

Posibles procedimientos. Hay dos maneras de resolverlo. La más directa es traducir el número al sistema decimal. Si se escribe el número 499, el sucesor es el 500 y se escribe con 5 símbolos de 100.
Otra forma es agregando un símbolo de valor 1, pero entonces se tendrán 10 símbolos de 1 que se cambian por uno de 10; y también se tendrán 10 de 10, por lo que habrá que cambiarlos por uno de 100.
Es posible que algunos alumnos nada más agreguen un símbolo de uno y no se den cuenta de que deben efectuar cambios. Puede retomarlo en la discusión grupal, para que se den cuenta del agrupamiento.

Sugerencia didáctica. No es necesario que pasen todos los alumnos ni todos los equipos a explicar sus respuestas porque puede volverse tedioso para el resto del grupo. Pida a algunos alumnos que pasen al pizarrón a escribir sus respuestas y pregunte a los demás si alguien lo hizo diferente o si obtuvo otro resultado.
Es posible que durante el intercambio, los alumnos vayan comprendiendo las reglas del sistema de numeración egipcio. Recupérelas sin dar aún explicaciones.

Propósito de la actividad. Interesa que al escribir el antecesor y el sucesor de un número los alumnos trabajen haciendo agrupamientos y desagrupamientos en un sistema no posicional, por ello es importante que intenten resolverlo sin escribirlos en el sistema decimal.
Escribir el antecesor de ciertos números puede ser especialmente laborioso por la gran cantidad de símbolos que hay que emplear; anime a los alumnos a hacerlo porque tendrán más elementos para comparar al sistema egipcio con el decimal y reconocer las ventajas de este último.

Respuestas. Se necesitan 9 símbolos de cada valor: 9 de 10 000, 9 de 1 000, 9 de 100, 9 de 10 y 9 de 1; 45 en total.
Posibles procedimientos. Una manera de contestar la pregunta es escribiendo con símbolos egipcios el número que se solicita (el 99 999). También pueden analizar mentalmente el número sin necesidad de escribirlo: el 99 999 necesita 9 símbolos de 10 000, 9 de 1 000, 9 de 100, 9 de 10 y 9 de 1. En total son 45.

Respuestas.

a) El número es 3 024, no importa el orden en el que se escriban los símbolos.

b) Se necesita 1 de 100 000, 4 de 100, 3 de 10 y 6 de 1.

Sugerencia didáctica. Puede preguntar a los alumnos si existe en el sistema egipcio un símbolo para el cero. Si ya se dieron cuenta de que no lo hay, pregúnteles si consideran pertinente que lo hubiera y por qué.

Sugerencia didáctica. Puede preguntar al grupo cómo escribirían 250 000 000 (se requieren 250 símbolos de millón o tener un símbolo para 10 000 000 y uno para 100 000 000).

3

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos si encuentran otras desventajas del sistema egipcio, por ejemplo, que es tardado hacer cada uno de los dibujos.

SECUENCIA 1

III. En ocasiones los egipcios escribían los números en sentido opuesto. Así, podían escribir 𓆼𓆼𓆼𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺 o también 𓏺𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓆼𓆼𓆼 y el valor del número es el mismo.

a) ¿Cuál es el valor del número anterior? ____________

b) Usando el sistema egipcio, escriban en sus cuadernos el número 100 436, en ambos sentidos.

Aquí se presentan las conclusiones sobre los conceptos revisados.

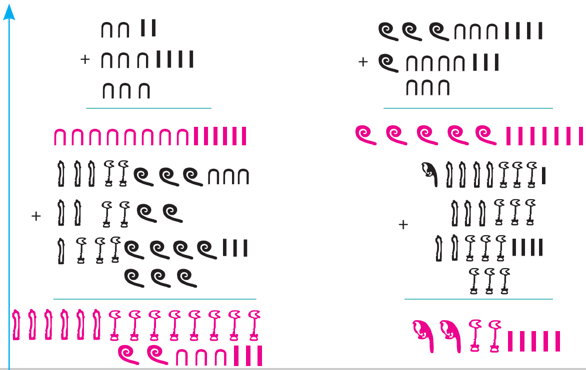
>>> A lo que llegamos

- El sistema de numeración egipcio es un **sistema aditivo no posicional**. Es aditivo porque para encontrar el valor de un número se debe sumar el valor de cada uno de los símbolos que aparecen en el número; y es no posicional porque puede escribirse un número poniendo los símbolos en sentido opuesto sin que cambie el valor del número.
- Cada símbolo se puede repetir hasta nueve veces. Cuando se llega a 10 símbolos iguales se sustituyen por otro que representa el valor de esos 10 símbolos.
- Con los siete símbolos que tenían los egipcios sólo podían representar números menores que 10 000 000; para ellos esto no era problema porque no se les presentaban situaciones en las que tuvieran que utilizar números más grandes.
- Se piensa que el jeroglífico que representa 1 000 000 (𓁨) es la figura de un sacerdote o de un astrónomo que está viendo hacia el cielo, tratando de contar la gran cantidad de estrellas que hay.
- Una desventaja del sistema egipcio es que para escribir ciertos números se necesitan muchos símbolos.

Ejercicios para aplicar y entender mejor lo que acabas de aprender.

>>> Lo que aprendimos

Los antiguos egipcios realizaban sumas como las siguientes. Expresa los resultados de cada una de ellas utilizando los números del sistema egipcio.



16

Posibles procedimientos. Hay dos maneras de resolver la actividad: haciendo las sumas de símbolos egipcios y los agrupamientos necesarios, o bien, escribir cada número en el sistema decimal, realizar la suma y luego pasar el resultado al sistema egipcio.

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos que en clase o como tarea, resuelvan esta actividad en una hoja aparte para que pueda integrarla al portafolios.

Si los alumnos tienen dificultades al resolverla es conveniente repasar juntos el apartado *Manos a la obra* de esta sesión.

OTRO SISTEMA DE NUMERACIÓN

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Los números mayas

Vean el video sobre el sistema de numeración maya.

La civilización maya fue una de las culturas más importantes de la época prehispánica de América Central. Los mayas fueron grandes astrónomos, mucho más exactos que sus contemporáneos europeos.

El periodo Clásico de la civilización maya se desarrolló entre el año 300 y el año 1000 de nuestra era.

En esta sesión estudiarás las características del sistema de numeración de los mayas.

>>> Consideremos lo siguiente

Fíjense cómo escribían los mayas algunos números y completen la tabla.

	2		4	5	6	7
8			11	12		15
	20	21		23		25
29	30	31		36		38

Escriban en sus cuadernos los números del 1 al 20 en el sistema de numeración maya.

¿Cuánto vale el símbolo ? ____________________

¿Cuánto vale el símbolo ? ____________________

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las encontraron. Comenten cómo escribieron el 20 en el sistema maya y cuál es el símbolo que corresponde al cero.

17

Propósito de la sesión. Identificar las propiedades de los sistemas de numeración posicionales mediante el sistema de numeración maya.

Organización del grupo. Gran parte del trabajo en la sesión es en parejas, excepto en los momentos de intercambio grupal y en el apartado *Lo que aprendimos,* en donde es individual.

Propósito del video. Mostrar algunas características del sistema de numeración maya.

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos se enfrenten a la actividad con sus propios recursos. Permita que trabajen en ella sin darles ninguna explicación.

Propósito de la actividad. Aquí se introduce el símbolo del cero y la utilización de niveles característica del sistema maya.

Es posible que algunos alumnos tengan dificultades a partir del número 20. Permita que ellos mismos traten de encontrar explicaciones sobre el valor del segundo nivel.

Respuestas. El punto vale 1 cuando se escribe en el primer nivel y 20 cuando se escribe en el segundo.

Será muy interesante analizar cómo responden los alumnos estas preguntas, ya que en el sistema maya el valor de ambos símbolos varía de acuerdo con la posición en la que se escriben.

2

Sugerencia didáctica. Puede preguntar a los alumnos cuántos símbolos hay en el sistema maya y cuánto vale cada uno. Si tienen dificultades para comprender los distintos valores de un símbolo cuando se cambia de nivel, puede proponer ir escribiendo en el pizarrón algunos de los números de la actividad para que lo resuelvan colectivamente.

>>> Manos a la obra

I. Los números 6 y 25 escritos en sistema maya se parecen mucho:

6	25

Para distinguirlos, en el caso del 25, los mayas dejaban un espacio entre el punto y la raya. El espacio indica que se tienen dos niveles: en el primer nivel, de abajo hacia arriba, van las unidades; en el segundo van los grupos de 20.

En el segundo nivel este punto vale 20	•	1 × 20
En el primer nivel hay 5 unidades	—	5 × 1
	25	25 = 20 + 5

Escriban en sus cuadernos el 11, el 16, el 30 y el 35 en maya.

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos se den cuenta de que se distingue a los números por la utilización de un espacio entre los niveles. Si no surgen comentarios en el grupo sobre ello, hágalos usted.

Comparen sus escrituras de los números y comenten cómo los distinguen.

II. Fíjense cómo escribían los mayas el 40:

En el segundo nivel cada punto vale 20: ya tenemos los 40	• •
En el primer nivel hay 0 unidades	

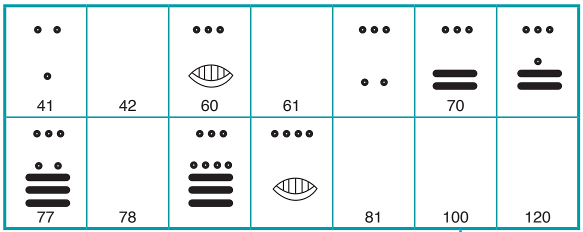
Sugerencia didáctica. En este punto puede preguntar a los alumnos qué pasaría si sólo se escribieran los dos puntos y no se pusiera el cero.

Para indicar que no hay que agregar nada más, los mayas utilizaban un símbolo especial para el cero: , indicando que un nivel está vacío. Este símbolo representa una concha o un caracol.

2 de 20	• •	2 × 20
0 unidades		0 × 1
	40	40 = 40 + 0

18

Observen cómo escribían los mayas algunos números y completen la tabla.



Comparen sus tablas y comenten cómo escribieron los números.

III. Los mayas escribían el 400 de la siguiente manera:

En el tercer nivel este punto vale 400	•	1 × 400
En el segundo nivel ponían 0 de 20		0 × 20
En el primer nivel ponían 0 unidades		0 × 1
	400	400 = 400 + 0 + 0

Escriban el número 401 en el sistema maya y completen la tabla.

En el tercer nivel 1 de 400		1 × 400
En el segundo nivel ____ de 20		____ × 20
En el primer nivel ____ unidades		____ × 1
	401	401 = ____ + ____ + ____

Respuestas. El 100 se escribe con una raya en el segundo nivel y el cero en el primero.

Posibles dificultades. Algunos alumnos quizá lo escriban con cinco puntos en el segundo nivel. Si sucede, revisen las tablas y hágales ver que cuando se tienen cinco puntos se cambian por una raya; y que cuatro rayas se cambian por un punto en el siguiente nivel.

3

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos pongan todas las operaciones como en el ejemplo de la primera columna. Si observa que tienen dificultades, puede resolver alguna de las operaciones en el pizarrón.

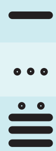
Propósito del interactivo. Practicar la escritura de los números en el sistema de numeración maya.

Sugerencia didáctica. Si los alumnos tienen dificultades para comprenderlo, dígales que observen la tabla anterior, en la que hay una raya en el tercer nivel. Pregunte: ¿cuánto vale una raya en el tercer nivel? (vale 5 × 400 = 2 000); si se juntan cuatro rayas deben cambiarse por un punto en el siguiente nivel, ¿cuánto valdrá el punto en el cuarto nivel? (vale 2 000 × 4 = 8 000).

También van a realizar las actividades del interactivo.

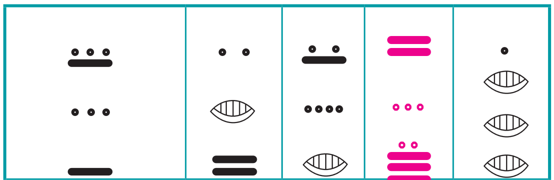
IV. En el antiguo sistema de numeración maya se agrupaba de 20 en 20. Por esta razón en cada nivel puede ponerse cualquier número del 1 al 19 y luego, al llegar al 20, hay que poner un punto en el siguiente nivel. Así, en el primer nivel de abajo hacia arriba se escriben las unidades, en el segundo se tienen los grupos de 20, en el tercero se tienen los grupos de 20 × 20 = 400, en el cuarto se tienen los grupos de 20 × 20 × 20 = 8 000, etcétera.

Por ejemplo, el número 2 077 se escribía en maya de la siguiente manera:



5 de 400		5 × 400
3 de 20		3 × 20
17 unidades		17 × 1
	2 077	2 077 = 2 000 + 60 + 17

Completen la siguiente tabla. Escriban las operaciones que se requieren en cada caso.



8 × 400 + 3 × 20 + 5 × 1 = 3 200 + 60 + 5 = 3 265	2 × 400 + 0 × 20 + 10 × 1 = 800 + 0 + 10 = 810	7 × 400 + 4 × 20 + 0 × 20 = 2 800 + 80 + 0 = 2 880	10 × 400 + 3 × 20 + 17 × 1 = 4 000 + 60 + 17 = 4 077	1 × 8 000 + 0 × 400 + 0 × 20 + 0 × 1 = 8 000 + 0 + 0 + 0 = 8 000

Comparen los números y comenten cómo los encontraron.[1]

1 En el tercer nivel se tenían los grupos de 360, y no de 400. Se piensa que esto era así debido a que los mayas manejaban un calendario de 360 días. A partir de aquí, el valor de cada nivel se obtiene multiplicando por 20 el valor del nivel anterior. Así, en el cuarto nivel, se tienen los grupos de 7 200 (360 × 20), y no de 8 000; en el quinto nivel se tienen los grupos de 144 000 (7 200 × 20), y no de 160 000, etcétera.

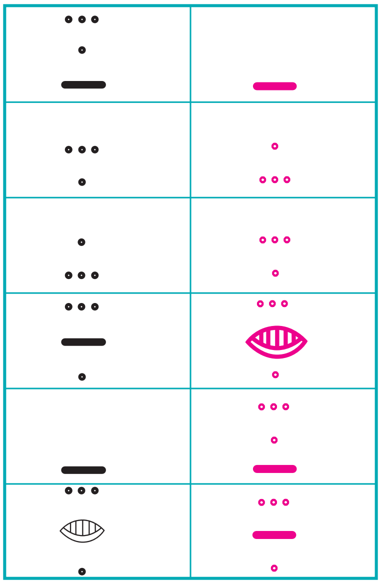
Sugerencia didáctica. Lo importante de la explicación en la nota al pie de página es que los alumnos sepan que se hizo una modificación al sistema maya. No le dediquen mucho tiempo, porque para lograr los propósitos de la sesión no es necesario que entiendan cómo era realmente ese sistema.

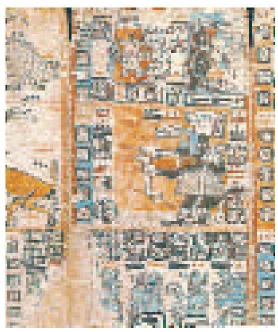
>>> A lo que llegamos

- El sistema de numeración maya es un **sistema posicional** porque el valor de cada número depende de la posición (o nivel) en la que se encuentre. El valor de cada nivel se obtiene multiplicando por 20 el valor del nivel anterior.
- En el sistema maya existen tres símbolos: •, ▬ y . Con estos símbolos los mayas podían escribir cualquier número. Utilizaban el símbolo para indicar que una posición está vacía.
- Los mayas llegaron a utilizar números muy grandes: existen calendarios en los que se menciona un periodo de tiempo de 300 millones de años.

>>> Lo que aprendimos

En la columna de la derecha ordena los siguientes números del menor al mayor.





¿En qué te fijaste para ordenar los números? ______________________

____

21

Posibles procedimientos. Hay dos formas de resolverlo: fijándose en que los números menores son los que tienen menos niveles, o bien, traduciendo los números al sistema decimal para después ordenarlos. Cuando terminen puede preguntar cómo lo resolvieron para comparar procedimientos.

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos que, en clase o como tarea, resuelvan esta actividad en una hoja aparte para que pueda integrarla al portafolios.

Si los alumnos tienen dificultades al resolverla es conveniente repasar juntos el apartado *Manos a la obra* de esta sesión.

Propósito de la sesión. Explicitar las principales características del sistema de numeración decimal.

Organización del grupo. Casi toda la sesión se trabaja de manera individual, excepto una actividad en equipos y los intercambios grupales. Es probable que para esta sesión se requieran dos clases.

Propósito de la actividad. La intención es que los alumnos ubiquen cada cifra en el valor de posición que le corresponde, comprendiendo así que, para pasar del 403 al 473, por ejemplo, no hay que sumar 7 sino 70.

Sugerencia didáctica. Si tienen calculadora puede sugerirles que la usen para verificar sus respuestas.

SESIÓN 3

EL SISTEMA DECIMAL

>>> Para empezar

El sistema de numeración decimal tiene sus orígenes en los números hindúes y fueron dados a conocer en Europa por los árabes, por lo que se les conoce como números indoarábigos.

>>> Consideremos lo siguiente

En esta actividad debes hacer una suma paso a paso para que vayas obteniendo los números que están en la columna de la izquierda. Por ejemplo: para pasar del 0 al 900, se suma 900, y para pasar del 900 al 902, se suma 2. Debes poner, además, cómo se lee cada número.

RESULTADO	OPERACIÓN REALIZADA	EL RESULTADO SE LEE
0	**	Cero
900	Se suma 900	
902	Se suma 2	Novecientos dos
400 902		
410 902		
410 972		Cuatrocientos diez mil novecientos setenta y dos
50 410 972		
58 410 972	Se suma 8 000 000	Cincuenta y ocho millones cuatrocientos diez mil novecientos setenta y dos
58 416 972		
858 416 972		

a) Completa la siguiente suma con los números que obtuviste en la columna de "operación realizada":

900 + 2 + ________ + ________ + ________ + ________ + 8 000 000 + ________ + ________

b) ¿Cuál es el resultado de hacer esta suma? ____________________

c) En el sistema de numeración decimal hay 10 símbolos o cifras. ¿Cuáles son?

____

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron.

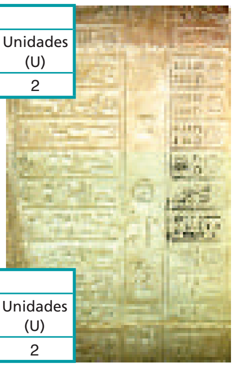
Sugerencia didáctica. Si lo considera pertinente, pida a algunos alumnos que pasen al pizarrón a escribir cómo lo resolvieron.

>>> Manos a la obra

I. Observa la siguiente tabla:

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que en esta tabla se les llama "Unidades" a las centenas, a las decenas y a las unidades sólo para la lectura de los números.

Millones		Millares			Unidades		
D. de millón	U. de millón	C. de millar	D. de millar	U. de millar	Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (U)
5	8	4	1	0	9	7	2



El número 58 410 972 se lee "cincuenta y ocho millones cuatrocientos diez mil novecientos setenta y dos".

Fíjate en la tabla y responde.

Millones			Millares			Unidades		
C. de millón	D. de millón	U. de millón	C. de millar	D. de millar	U. de millar	Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (U)
8	5	8	4	1	6	9	7	2

¿Cómo se lee el número 858 416 972?

____

____

Comenten y comparen sus respuestas.

Cuando se leen los números se agrupan cada tres cifras. Las tres primeras, de derecha a izquierda, son las unidades; las tres siguientes son los miles; las tres siguientes son los millones; luego vienen los miles de millones y después los billones.

4

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que investiguen si existen números mayores que los billones y cómo se escriben.

Sugerencia didáctica. Esto ya se ha visto alguna vez en la primaria, pero es posible que algunos alumnos no lo recuerden. Si tienen dificultades pueden resolverlo en el pizarrón explicando las multiplicaciones.

Propósito de las preguntas. La idea es que los alumnos reconozcan que una cifra puede tener distinto valor dependiendo de dónde se escriba. Las dos preguntas deben responderse en grupo.

II. En el número 858 416 972, el valor posicional del 5 es 50 000 000 unidades; el valor posicional del 6 es 6 000 unidades. Completa la tabla con el valor posicional de cada cifra.

	Millones			Millares			Unidades		
	C. de millón	D. de millón	U. de millón	C. de millar	D. de millar	U. de millar	Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (U)
	8	5	8	4	1	6	9	7	2
El valor posicional es		50 000 000		400 000		6 000		70	2

a) Completa la suma de todos los números del tercer renglón, leídos de derecha a izquierda:

2 + 70 + ________ + 6 000 + ________ + 400 000 + ________ + 50 000 000 + ________

b) ¿Cuál es el resultado de esta suma? ________

c) Estos números también se expresan utilizando multiplicaciones: las unidades se multiplican por 1 y los demás números se multiplican por 10, 100, 1000. Completa la tabla para expresar así cada una de las cantidades.

	8	5	8	4	1	6	9	7	2
El valor posicional es		50 000 000		400 000		6 000		70	2
			8 × 1 000 000			6 × 1 000	9 × 100	7 × 10	2 × 1

d) Completa la suma de todos los números del último renglón:

2 × 1 + 7 × 10 + ________ + 6 × 1 000 + ________ +

________ + 8 × 1 000 000 + 5 × 10 000 000 + ________

Comparen sus tablas y comenten:

a) En el número 858 416 972, ¿cuál es el valor posicional del primer 8, de izquierda a derecha? ________

b) ¿Cuál es el valor posicional del siguiente 8? ________

24

III. Completa la tabla con el valor posicional de cada cifra en el número 50 410 972.

Millones		Millares			Unidades		
5	0	4	1	0	9	7	2
50 000 000	0	400 000	10 000	0	900	70	2

El valor posicional es

a) ¿Cuál es el valor posicional del primer 0, de izquierda a derecha? __________

b) ¿Cuál es el valor posicional del siguiente 0? __________

c) Expresa en tu cuaderno el número 50 410 972, utilizando los múltiplos de 10.

Comparen sus respuestas.

En el sistema de numeración decimal se agrupa de 10 en 10: 10 unidades forman una decena, 10 decenas forman una centena, 10 centenas forman una unidad de millar, etcétera. En cada posición puede ponerse una cifra del 0 al 9; al llegar al 10 hay que agregar una unidad en la siguiente posición. Así, de derecha a izquierda, en la primera posición van las unidades, en la segunda posición van los grupos de 10, en la tercera posición van los grupos de 10 × 10 = 100, en la tercera posición se tienen los grupos de 10 × 10 × 10 = 1 000, etcétera.

IV. El siguiente es un juego por equipos. Cada integrante del equipo debe hacer cinco tarjetas como las que se muestran y recortarlas.

Millones	Mil	Seis	Tres	Ocho

Encuentren todos los números que pueden obtenerse usando las cinco tarjetas. Anótenlos en sus cuadernos en orden de menor a mayor, con letra y con número.

a) ¿Cuántos números diferentes encontraron? __________

b) ¿Cuál es el mayor? Escríbanlo con números __________

c) ¿Cuál es el menor? Escríbanlo con números __________

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron.

25

Integrar al portafolios. El valor posicional es un concepto central en esta secuencia. Usted podrá tener información de lo que saben los alumnos al respecto a través de esta actividad. Si nota que aún tienen dificultades propóngales actividades parecidas.

Respuestas.

a) 0.

b) 0.

c) Hay dos maneras de resolver esta actividad. Por lo que han venido haciendo, la que se espera es:

$2 \times 1 + 7 \times 10 + 9 \times 100 + 0 \times$
$\times 1\,000 + 1 \times 10\,000 + 4 \times$
$\times 100\,000 + 0 \times 1\,000\,000 + 5 \times$
$\times 10\,000\,000.$

Aunque también puede expresarse como:

$2 \times 1 + 7 \times 10 + 9 \times 100 + 1 \times$
$\times 10\,000 + 4 \times 100\,000 + 5 \times$
$\times 10\,000\,000.$

Sugerencia didáctica. Cada alumno necesita su juego de tarjetas para poder explorar las posibles combinaciones.

Respuestas. Hay 12 distintos números que pueden formarse con las tarjetas:

1.	Ocho	Mil	Seis	Millones	Tres
2.	Ocho	Mil	Tres	Millones	Seis
3.	Seis	Mil	Ocho	Millones	Tres
4.	Seis	Mil	Tres	Millones	Ocho
5.	Tres	Mil	Ocho	Millones	Seis
6.	Tres	Mil	Seis	Millones	Ocho
7.	Ocho	Millones	Seis	Mil	Tres
8.	Ocho	Millones	Tres	Mil	Seis
9.	Seis	Millones	Ocho	Mil	Tres
10.	Seis	Millones	Tres	Mil	Ocho
11.	Tres	Millones	Ocho	Mil	Seis
12.	Tres	Millones	Seis	Mil	Ocho

Sugerencia didáctica. Pida a un equipo que escriba en el pizarrón los números que encontraron. Los demás equipos deben observar si ellos tienen los mismos números, y si no es así, anotar en el pizarrón aquellos que falten.

5

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que copien esta información en una cartulina o papel para pegarlo en el salón.

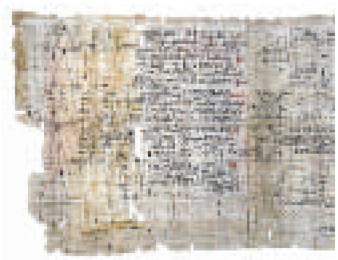
Propósito de la actividad. Que los alumnos escriban con letra números hasta millones y que presenten datos en tablas de manera ordenada.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos identifiquen las propiedades más importantes de cada uno de los sistemas de numeración.

>>> A lo que llegamos

- En el sistema de numeración decimal, que es el de uso oficial en nuestro país y en casi todo el mundo, se usan diez símbolos o cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 llamados **dígitos**.
- Es un **sistema posicional** porque el valor de cada dígito depende de la posición en la que se encuentre. Al escribir números enteros, el valor del dígito que está en la segunda posición, de derecha a izquierda, se multiplica por 10; el que está en la tercera se multiplica por 100; el que está en la cuarta se multiplica por 1 000, y así sucesivamente.
- Uno de los dígitos, el 0, sirve para indicar que una determinada **posición** está **vacía**.

>>> Lo que aprendimos



1. De acuerdo con los datos del último *Censo General de Población y Vivienda*, en el año 2000 México tenía 97 483 412 habitantes. El estado más poblado era el Estado de México con 13 083 359, el menos poblado era Baja California Sur con 423 516. El DF tenía 8 591 309, Jalisco 6 321 278 y Veracruz 6 901 111.

Con estos datos haz una tabla en la que indiques:

- El nombre de cada estado.
- Su población, escrita con número y con letra.

Ordena los datos de menor a mayor población.

2. Relaciona las columnas:

A. Sistema de numeración decimal.	(C) Puede escribirse un número poniendo los símbolos en sentido opuesto sin que cambie el valor del número.
	(A) El valor de cada posición se obtiene multiplicando por 10 el valor de la posición anterior.
B. Sistema de numeración maya.	(B) Tiene tres símbolos.
	(B) El valor de cada nivel se obtiene multiplicando por 20 el valor del nivel anterior.
C. Sistema de numeración egipcio.	(C) Para escribir ciertos números se necesitan muchos símbolos.
	(A) Se usan diez símbolos o cifras
	(C) No tiene cero.

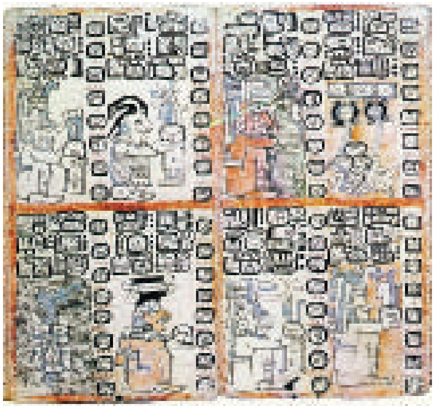
3. Agrega a las tarjetas de la actividad IV, una tarjeta con el nombre ciento(s). Esta tarjeta puede utilizarse como el singular *ciento* o el plural *cientos*. Encuentra la mayor cantidad posible de números que pueden obtenerse usando las seis tarjetas. Escríbelos en tu cuaderno con letra y con número. Indica el número mayor y el número menor.
4. ¿Tienen en tu comunidad un sistema de numeración distinto del decimal?, ¿cuántos símbolos tiene?, ¿es aditivo?, ¿es posicional?, ¿hay algún símbolo que indique que una posición está vacía?

>>> Para saber más

Sugerencias para que revises otros materiales con los que puedes ampliar tu conocimiento del tema.

Sobre los sistemas de numeración consulta en el libro de texto de *Matemáticas quinto grado*, SEP, la portada del Bloque 1 (pp. 8 y 9).

Sobre los sistemas de numeración maya consulta:
http://interactiva.matem.unam.mx/matechavos/sabias/html/mayas/html/mayas.html
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].
Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, UNAM.



27

Sugerencia didáctica. En el Fichero de Actividades Didácticas, de donde se toma la actividad de las tarjetas, se comenta que al agregar la de la palabra ciento(s) el número de combinaciones posibles aumenta considerablemente. Por esta razón, conviene establecer un tiempo límite para la actividad, o bien, poner algunas restricciones, por ejemplo, encontrar los mayores a mil millones o los menores a diez millones.
Si lo considera conveniente, esta actividad puede desarrollarse en equipos.
Respuestas. El número mayor es el 806 003 000 000
(ochocientos seis mil tres millones).
El menor es el 3 006 108 (tres millones seis mil ciento ocho).

Propósito de la sesión. Resolver problemas de comparación de números fraccionarios usando la recta numérica como un recurso. Reconocer la conservación de la escala y la arbitrariedad de la posición del cero.

Organización del grupo. En la sesión el trabajo es individual y en parejas, con momentos para la discusión grupal.

Propósito del video. Contextualizar el uso y la comparación de números fraccionarios representados en la recta numérica.

SECUENCIA 2

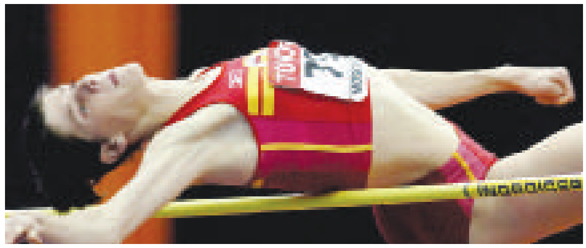
Fracciones y decimales en la recta numérica

En esta secuencia trabajarás en la representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.

SESIÓN 1

EL SALTO DE ALTURA

>>> Para empezar



El salto de altura

El salto de altura es una de las competencias atléticas más atractivas. Se trata de saltar sobre una barra horizontal que está colocada a varios metros sobre el nivel del piso. ¡Los mejores atletas saltan más de 2 metros de altura!

Para decidir cuándo un competidor gana o pierde una competencia es muy importante medir de modo muy preciso la altura de sus saltos. Las mediciones de los saltos se pueden realizar usando fracciones y números decimales.

La tabla muestra tres marcas conseguidas en el salto de altura por distintos atletas.

Año	Competencia	Atleta	Longitud aproximada del salto (metros)
1993	Campeonato Mundial de Atletismo	Javier Sotomayor	$2\frac{1}{2}$
1996	Juegos Olímpicos de Estados Unidos	Charles Austin	$2\frac{2}{5}$
2004	Juegos Olímpicos de Atenas	Stefen Hölm	$2\frac{1}{3}$

28

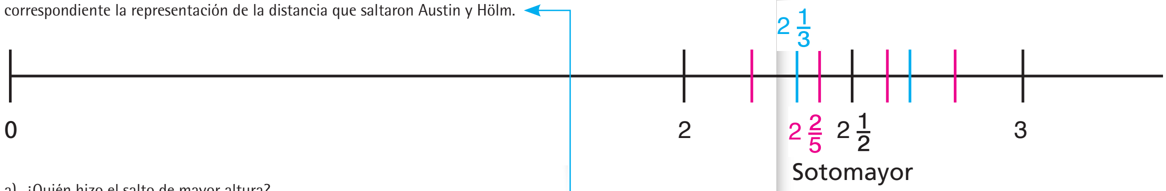
Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de los números.
Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos resolvieron problemas que implicaban comparar y ordenar números decimales y fraccionarios. En esta secuencia resolverán situaciones en las que se utiliza la recta numérica como un recurso que permite dar sentido a los números fraccionarios y a los números decimales.

Propósitos de la secuencia
Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	*El salto de altura* Resolver problemas de comparación de números fraccionarios usando la recta numérica como un recurso. Reconocer la conservación de la escala y la arbitrariedad de la posición del cero.	Video *El salto de altura*
2	*Densidad y fracciones* Resolver problemas de densidad de números fraccionarios usando la recta numérica como un recurso.	Interactivo
3	*El salto de longitud y los números decimales* Resolver problemas de comparación y densidad de números decimales usando la recta numérica como un recurso. Reconocer la conservación de la escala y la arbitrariedad de la posición del cero.	Interactivo

>>> Consideremos lo siguiente

En la siguiente recta se ha representado el salto de Sotomayor. Anota en el lugar correspondiente la representación de la distancia que saltaron Austin y Hölm.



a) ¿Quién hizo el salto de mayor altura? ______

b) ¿Quién hizo el salto de menor altura? ______

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

Propósito de la actividad. Comparar números fraccionarios usando la recta numérica como un recurso. Para ubicar un número fraccionario en la recta numérica, los alumnos deberán establecer dos aspectos fundamentales: asignar el cero a un punto de la recta y la escala.

Posibles procedimientos. Un procedimiento posible para ubicar las fracciones $2\frac{1}{3}$ y $2\frac{2}{5}$ es localizar primero el 3 y dividir el segmento que va del 2 al 3 en partes iguales (quintos y tercios) para finalmente tomar las partes necesarias.

Para localizar el 3 hay que conservar la escala con la que está construida la recta numérica. Algunos alumnos pueden ubicarlo de manera arbitraria a la derecha de $2\frac{1}{2}$, sin considerar la escala. Es muy importante que en este momento no los corrija, pues más adelante tendrán oportunidad de verificar sus respuestas.

Un posible procedimiento correcto para localizar el 3 consiste en usar la longitud del segmento que va de 2 a $2\frac{1}{2}$ como unidad y localizar el 3 a la derecha de $2\frac{1}{2}$ y a la misma distancia que 2.

Otro procedimiento correcto consiste en localizar el 1 (como el punto medio del segmento que va de 0 a 2) y usarlo como unidad para localizar el 3.

Recomiende a sus alumnos que usen lápices de colores para evitar confusiones entre los tercios y los quintos.

>>> Manos a la obra

I. Ubica en la siguiente recta los números 1, $\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{2}$.

a) En la misma recta ubica el 3.

b) ¿Cómo supiste dónde va el 3? ______

c) Con tu regla mide la distancia del 0 al 1. ¿Cuánto es? ______

¿Y la distancia de 1 a 2? ______, ¿y la de 2 a 3? ______

Verifica que estas tres distancias sean iguales, si no es así revisa en dónde está el error.

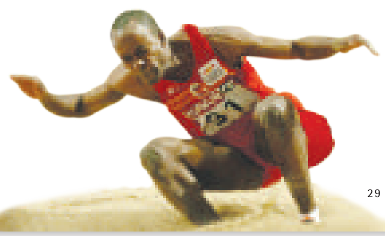
II. Considera ahora sólo la distancia de 2 a 3.

a) Ubica el punto $2\frac{1}{3}$ (altura que saltó Hölm).

b) ¿Qué hiciste para localizar el punto $2\frac{1}{3}$?

______

______



29

Posibles dificultades. Un posible error al ordenar las alturas es que los alumnos consideren que $2\frac{2}{5}$ es mayor que $2\frac{1}{2}$ o que $2\frac{1}{3}$ "porque 5 es mayor que 2 y que 3", si se fijan en los denominadores, o también porque "2 es mayor que 1", si se fijan en los numeradores. En este momento no los corrija, en el apartado *Manos a la obra* podrán identificar dichos errores. Elija al menos dos soluciones distintas para poder compararlas.

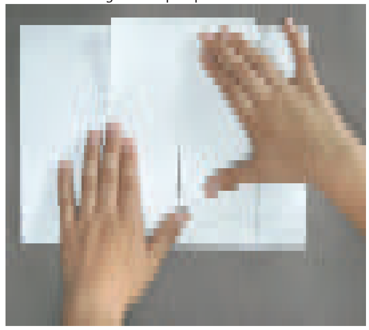
3

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos qué procedimiento utilizaron para ubicar una fracción en la recta. Después de que lean con cuidado el procedimiento de la hoja rayada pregúnteles si ya lo conocían y si alguien lo utilizó para resolver las actividades anteriores.

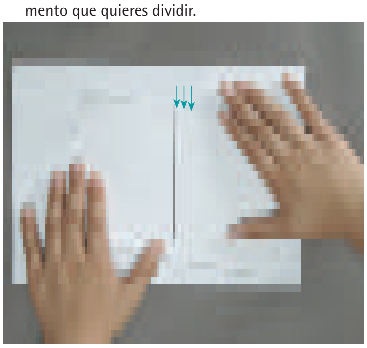
c) Hay muchas maneras de dividir un segmento en tres partes iguales; a continuación se presenta una.

1. Necesitas una hoja rayada.

2. Tomas la hoja de papel y colocas una de las rayas al inicio del segmento que quieres dividir.



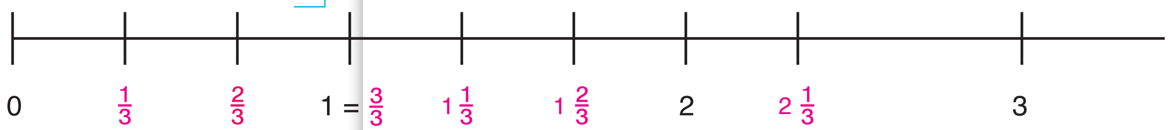
3. Giras la hoja hasta que tres renglones corten al segmento que quieres dividir.



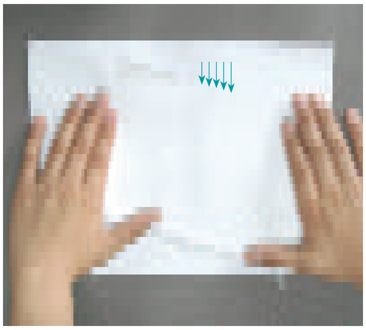
4. Pones una marca en cada corte y ¡listo! el segmento queda dividido en tres partes.

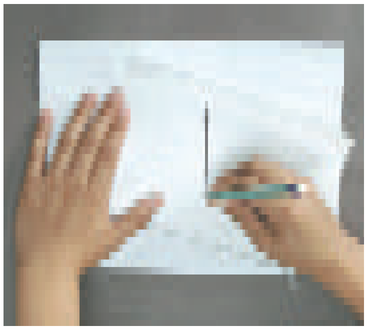
Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que un número es mayor que otro si está más a la derecha en la recta numérica.

d) Utiliza el procedimiento anterior para dividir segmentos en tres partes iguales y ubica en la recta $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{3}$.



El número de renglones que debes considerar es igual al número de partes en que quieres dividir el segmento; por ejemplo, si quieres dividirlo en cinco partes, giras la hoja hasta que cinco renglones corten al segmento.





III. Considera la recta y ubica los puntos que corresponden a $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $1\frac{4}{5}$, $2\frac{2}{5}$.

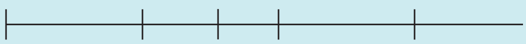
Utiliza tu regla para verificar que el segmento que va de 1 a 2 haya quedado dividido en cinco partes iguales.

Regresen al problema inicial y verifiquen, apoyándose en el procedimiento de la hoja rayada, si localizaron bien los saltos de Austin y Hölm.

Sugerencia didáctica. Este es un buen momento para corregir los errores que los alumnos hubieran podido cometer en la sesión.

>>> A lo que llegamos

En la recta numérica pueden ubicarse fracciones.



Si se desea ubicar novenos en la recta, la unidad en la que se va a ubicar debe quedar dividida en nueve partes iguales.

Para ubicar números en la recta numérica es importante que consideres que a diferencias iguales entre números deben corresponder distancias iguales.

Para recordar. Esta conservación de la distancia (a diferencias iguales entre números deben corresponder distancias iguales en la recta), es la conservación de la escala de la recta numérica.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos reconozcan que un solo punto de la recta numérica no define la escala, de modo que este problema tiene una infinidad de soluciones.

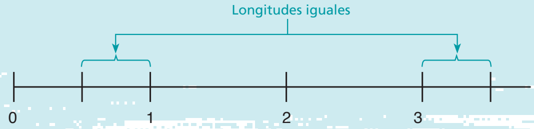
Posibles procedimientos. Probablemente los alumnos traten de ubicar el número 1 primero. El 1 puede ser colocado a cualquier distancia del 0 (la escala aún no está definida), pero el número 2 debe estar colocado a una distancia igual con respecto al 1 que la que hay entre el 0 y el 1. Posteriormente hay que dividir en tercios para ubicar la fracción que se indica. El $\frac{5}{3}$ se encuentra entre el 1 y el 2. También puede convertirse a número mixto ($1\frac{2}{3}$).
Otra forma de resolver es colocando el $\frac{5}{3}$ en cualquier punto de la recta. Si los alumnos lo hacen así, pídales que localicen entonces el 1 y que comparen el tamaño de los segmentos que van del 0 al 1.
Posiblemente sea difícil para los alumnos entender que $\frac{5}{3}$ puede ubicarse en cualquier punto porque probablemente en las rectas numéricas que han conocido se marcan al menos dos números, y con referencia a ellos se ubica a un tercero (como en la recta B).

Sugerencia didáctica. Hágales notar que una vez definida la escala (con dos puntos), ésta debe conservarse para localizar más puntos de la recta.

Por ejemplo,

a) la distancia de 3 a 4 debe ser la misma que la de 4 a 5.

b) la distancia de $\frac{1}{2}$ a 1 debe ser la misma que la de 3 a $3\frac{1}{2}$.



IV. Cada uno de los miembros de la pareja localice la fracción $\frac{5}{3}$ en la siguiente recta numérica considerando los puntos dados. Háganlo por separado.

Recta A

0

Comparen sus respuestas. Con su regla midan la distancia de 0 a $\frac{5}{3}$. ¿Es la misma o es distinta? ¿Porqué creen que sea así?

IV. En la **recta B** localicen 1 y 2. Háganlo por separado y no se olviden de considerar los puntos dados.

Recta B

0 $\frac{5}{2}$

a) ¿En cuántas partes dividieron el segmento que va de 0 a $\frac{5}{2}$? ____________

b) Localicen otra vez la fracción $\frac{5}{3}$, pero ahora háganlo en la **recta B**.

c) ¿Llegaron los dos al mismo resultado? Comenten cómo lo obtuvieron.

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuántas maneras distintas encontraron para localizar $\frac{5}{3}$ en la **recta A**?

b) ¿Cuántas maneras distintas hay para localizar $\frac{5}{3}$ en la **recta B**?

Propósito de la actividad. El propósito en este problema es reconocer que dos puntos de la recta numérica definen la escala.

Sugerencia didáctica. Si los alumnos tienen dificultades en esta actividad puede sugerirles que utilicen la hoja rayada. Si la colocan de manera que el segmento $\frac{5}{2}$ quede dividido en cinco partes iguales tendrán cinco segmentos de $\frac{1}{2}$ cada uno.

Propósito de las preguntas. Lo importante es que concluyan que en la recta A el punto $\frac{5}{3}$ se puede ubicar de infinitas maneras, mientras que en la recta B sólo hay una manera de hacerlo correctamente.

>>> A lo que llegamos

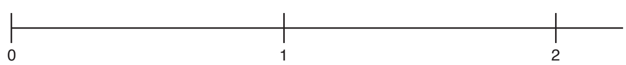
En una recta numérica que sólo tiene localizado un número, hay muchas maneras correctas de localizar otro. Por ejemplo, en la recta A de la actividad anterior hay muchas maneras distintas de localizar $\frac{5}{3}$.

Si en la recta numérica están ya localizados dos puntos, entonces hay una sola manera de localizar cualquier otro. Por ejemplo, en la recta B de la actividad anterior hay una sola manera de localizar $\frac{5}{3}$.

>>> Lo que aprendimos

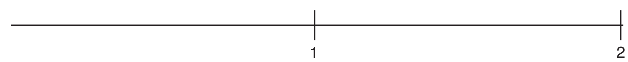
1. Usa una hoja rayada para dividir segmentos en el número de partes que se requiere y ubica las fracciones que se indican.

a) $\frac{2}{5}$



b) $1\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{7}$



d) $\frac{11}{10}$

2. Anota el número que corresponde a cada punto.

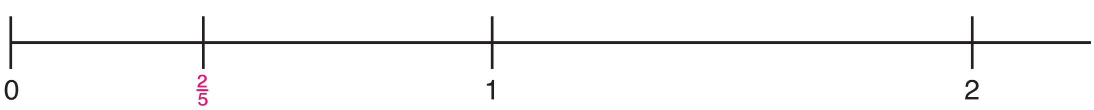
33

Respuestas. Para ubicar correctamente los puntos en las rectas es necesario que el alumno considere la escala y luego que divida en tantas partes como indique el denominador de la fracción que va a ubicar. Por ejemplo, en el inciso a) debe considerar que $\frac{2}{5} < 1$ y que, por lo tanto, $\frac{2}{5}$ está entre 0 y 1; después debe fraccionar el segmento del 0 al 1 en cinco partes (cada una de tamaño $\frac{1}{5}$) para así hallar el número $\frac{2}{5}$.
En estos incisos la escala ya está definida, pues se dan al menos dos puntos de la recta numérica.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos que en una hoja aparte, copien y resuelvan dos de los incisos del número 1, dos del 3 y que ubiquen dos fracciones del número 2.
Si aún cometen errores en la localización de fracciones en la recta, revise con ellos el apartado *Manos a la obra* y hagan ejercicios parecidos en el pizarrón.

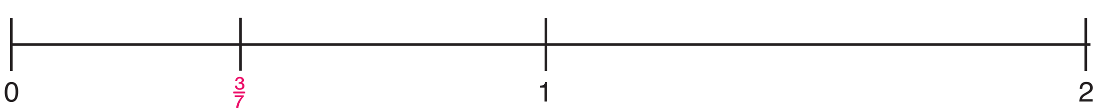
Respuestas.

a) $\frac{2}{5}$

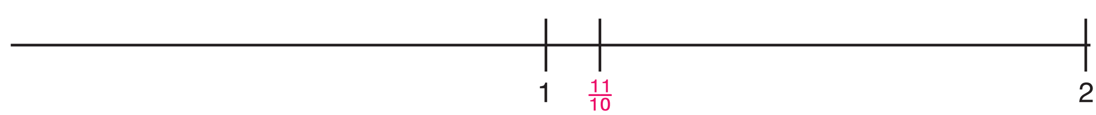


b) $1\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{7}$



d) $\frac{11}{10}$



Respuestas. En estos problemas se combinan rectas en las que no está definida la escala y rectas en las que ya está definida.

En la recta del inciso a) sólo hay un número como referencia (el 3), por lo tanto, $\frac{1}{2}$ puede ubicarse en cualquier punto a la izquierda del 3.

En la recta del inciso b) no está definida la escala. Es importante que los alumnos se den cuenta y que no traten de dividir el segmento del 0 al 2 en cuatro partes (pues cada una sería de tamaño $\frac{1}{2}$ y no de $\frac{1}{4}$). Si cometen este error, pídales que localicen primero el 1.

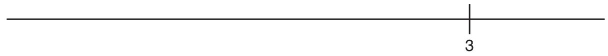
En la recta del inciso c) no hay ninguna referencia, los alumnos deben colocar un número arbitrariamente (por ejemplo el 0) y luego ubicar $1\frac{1}{2}$.

En el inciso d) la respuesta es única pues hay dos puntos de referencia. El número que debe hallarse ($2\frac{2}{3}$) es mayor que el $\frac{5}{2}$ (o $2\frac{1}{2}$), por lo tanto estará a su derecha. Para localizar el punto exacto puede ser útil hallar el 3. Si dividen el segmento de 0 a $\frac{5}{2}$ en cinco pedazos iguales (cada uno de tamaño $\frac{1}{2}$) podrán ubicar los puntos 1 y 2. Añadiendo al $\frac{5}{2}$ un intervalo de tamaño $\frac{1}{2}$ tendrán el 3 y sólo resta dividir el segmento del 2 al 3 en tercios.

SECUENCIA 2

3. Ubica en la recta numérica los números indicados.

a) $\frac{1}{2}$



b) $\frac{3}{4}$

c) $1\frac{1}{2}$

d) $2\frac{2}{3}$

Comenten sus respuestas con otros compañeros. Mencionen la manera en que hallaron los números de la actividad 2. Con respecto a la actividad 3, comenten acerca de cuáles incisos tenían varias respuestas y cuáles sólo una y justifiquen por qué tenían una o varias respuestas.

SESIÓN 2

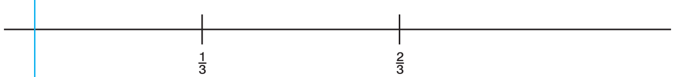
DENSIDAD Y FRACCIONES

>>> Para empezar

Entre dos fracciones siempre hay otra fracción. A esta propiedad se le conoce como densidad de las fracciones. En esta sesión estudiarán esta propiedad.

>>> Consideremos lo siguiente

Encuentren un número que esté entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Localícenlo en la siguiente recta numérica:



Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

34

Propósito de la sesión. Resolver problemas de densidad de números fraccionarios usando la recta numérica como un recurso. Reconocer la conservación de la escala y la arbitrariedad de la posición del cero.
Organización del grupo. Casi todas las actividades se realizan en parejas y hay momentos de discusión grupal. La última actividad es individual.

1

Posibles dificultades. Algunos alumnos pueden decir que entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ no hay ningún número, pues no hay ningún número (natural) entre 1 y 2.
Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos trabajen por su cuenta en la actividad, no les proporcione información todavía.
Para resolver las dificultades planteadas por el problema de la densidad, se propone que los alumnos recurran a la equivalencia de fracciones, que es un conocimiento que los alumnos trabajaron durante la escuela primaria.

>>> Manos a la obra

I. Los alumnos de otra telesecundaria dijeron que no hay ningún número entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, porque entre 1 y 2 no hay ningún número.

Comenten: ¿Están de acuerdo con ellos?, ¿por qué?

II. En la recta numérica localicen los números 0 y 1.

El segmento que va de 0 a 1 queda dividido en tercios. Verifíquenlo.

a) Dividan los tercios en sextos, ¿en cuántas partes tienen que dividir cada tercio?

____

b) Entre $\frac{2}{6}$ y $\frac{4}{6}$ hay otra fracción con denominador 6, ¿cuál es? _______________

Localícenla en la recta.

c) Dividan en novenos el segmento de 0 a 1, ¿en cuántas partes tienen que dividir cada tercio? _______________

d) Encuentren y localicen en la recta tres números que estén entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. ¿Cuáles son?

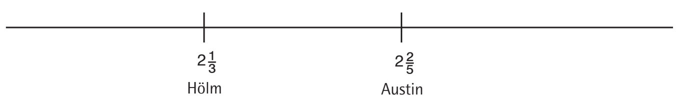
_______________ _______________ _______________

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Entre cualquier par de números fraccionarios siempre hay otros números fraccionarios. Ésta es una propiedad que se conoce como propiedad de densidad de las fracciones.

III. En las rondas eliminatorias para el Campeonato Mundial de 2005, un competidor tuvo mejores marcas que Hölm, pero no superó la marca de Austin. En la recta numérica están representadas las alturas que saltaron Hölm y Austin.



Contesten:

¿Cuánto pudo haber saltado el nuevo competidor? _______________

Representen esta altura en la recta numérica.

35

3

Sugerencia didáctica. La densidad es una propiedad que los números enteros no poseen, y aunque en la primaria los alumnos han trabajado con decimales y fracciones, pueden tener dificultades para hallar una fracción entre otras dos. Por eso es importante que realicen todas las actividades y que las comenten grupalmente.

Sugerencia didáctica. Comente esta información con los alumnos.
También puede anotar las siguientes parejas de números en el pizarrón y pedirles que digan si hay al menos un número que esté entre esos dos. Si piensan que sí, que propongan alguno(s) y que digan si es fraccionario, decimal o natural.

- **5** y **6**. Si entre estos dos números piensan que no existe al menos otro número, escríbalos como $\frac{5}{25}$ y $\frac{36}{6}$.
- $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{5}$. Pregunte también si entre ellos estarán el 1 y el $\frac{5}{4}$.
- **1** y $1\frac{1}{2}$.

Para recordar. Los *números naturales* son los enteros positivos (no tienen parte fraccionaria o decimal ni son números negativos). Por ejemplo el 5, 81, 9 234, etcétera.

Propósito de la pregunta. Al generar distintas fracciones equivalentes los alumnos podrán percatarse de que entre dos números fraccionarios existen varios más (en realidad, hay una infinidad de números).

Sugerencia didáctica. Si en este punto de la sesión hay alumnos que consideran que no existe otro número entre dos fracciones, permita que continúen trabajando, más adelante podrán aclararlo.

Propósito del interactivo. Comprobar la propiedad de densidad de los números fraccionarios.

Respuestas.

a) Cada quinceavo debe dividirse entre 2 (porque $15 \times 2 = 30$).

b) $2\frac{11}{30}$.

c) $2\frac{6}{15} = 2\frac{18}{45}$.

$2\frac{5}{15} = 2\frac{15}{45}$.

Si el denominador se multiplicó por 3, el numerador también debe multiplicarse por 3 para obtener una fracción equivalente.

d) $2\frac{16}{45}$ y $2\frac{17}{45}$.

IV. Los alumnos de otra telesecundaria dijeron que no se puede resolver el problema anterior. Convirtieron los resultados de Austin y de Hölm a quinceavos:

Recuerda que:

Cuando en una fracción se multiplica por el mismo número al numerador y al denominador, se obtiene una fracción equivalente.

Por ejemplo:

$\frac{2}{5}$ (Numerador, Denominador) $\xrightarrow{\times 3}$ $\frac{6}{15}$

Entonces $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$ son equivalentes.

Charles Austin: $2\frac{2}{5}$ m = $2\frac{6}{15}$ m.

Stefen Hölm: $2\frac{1}{3}$ m = $2\frac{5}{15}$ m.

Y dijeron que entre $2\frac{5}{15}$ y $2\frac{6}{15}$ no hay ningún número.

¿Están de acuerdo con lo que dicen en esa escuela? ¿Por qué?

V. En la recta numérica localicen $2\frac{5}{15}$ y $2\frac{6}{15}$. Dividan en treintavos y encuentren:

$2\frac{6}{15} = 2\frac{\square}{30}$

$2\frac{5}{15} = 2\frac{\square}{30}$

a) ¿En cuántas partes hay que dividir cada quinceavo para obtener treintavos?

____

b) Exactamente a la mitad entre $2\frac{5}{15}$ y $2\frac{6}{15}$ hay otro número, ¿cuál es?

____

c) Sin dividir en la recta, encuentren las siguientes equivalencias:

$2\frac{6}{15} = 2\frac{\square}{45}$

$2\frac{5}{15} = 2\frac{\square}{45}$

d) Entre $2\frac{2}{5}$ y $2\frac{1}{3}$ hay dos fracciones con denominador 45, ¿cuáles son?

_______________ _______________

Encuentren tres posibles saltos más altos que $2\frac{1}{3}$ m (Stefen Hölm), pero más bajos que $2\frac{2}{5}$ m (Charles Austin):

_______________ _______________ _______________

MATEMÁTICAS I

>>> Lo que aprendimos

1. En la siguiente recta numérica ubica el número $\frac{1}{2}$:

$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

Encuentra tres números que estén entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$. Localízalos en la recta.

2. Encuentra tres números que estén entre $1\frac{3}{7}$ y $1\frac{5}{7}$. Localízalos en la siguiente recta numérica:

EL SALTO DE LONGITUD Y LOS NÚMEROS DECIMALES

SESIÓN 3

>>> Para empezar

Otra de las pruebas atléticas más emocionantes es la del salto de longitud. Como verán, al igual que las fracciones, los decimales juegan un papel sumamente importante en las decisiones que los jueces toman para saber quién es el ganador de una prueba.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente tabla muestra las mejores marcas de la prueba de salto de longitud en la categoría varonil.

MEJOR MARCA MUNDIAL DE ATLETISMO	MEJOR MARCA EN JUEGOS OLÍMPICOS	MEJOR MARCA EN LOS JUEGOS OLÍMPICOS DE ATENAS (2004)
Mike Powell (EEUU) 8.95 m	Bob Beamon (EEUU) 8.9 m	Dwight Phillips (EEUU) 8.59 m

Localicen en la siguiente recta cada una de estas marcas.

8.5 8.59 8.9 8.95 9

a) ¿Superó Dwight Phillips la marca de Bob Beamon? ______

b) ¿Superó Dwight Phillips la marca de Mike Powell? ______

37

Propósito del interactivo. Comprobar la propiedad de densidad de los números fraccionarios.

Posibles procedimientos.

a) Para hallar $\frac{1}{2}$ pueden ubicar primero el 0 y el 1 (ya conocen el tamaño del segmento $\frac{1}{5}$). Entonces pueden dividir cada segmento en 2 y hallar $\frac{1}{2}$.

O bien, si parten de que $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, encuentran las fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$ y a $\frac{3}{5}$:

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

Por lo tanto, $\frac{5}{10}$ está en la mitad del segmento comprendido entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$.

b) Pueden hallar fracciones equivalentes como:

$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20}$ y como $\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$.

También pueden hacerlo con decimales porque $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0.4$ y $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0.6$. Entre 0.4 y 0.6 hay una infinidad de números (como 0.45, 0.5, 0.555, 0.56, etcétera).

Respuestas. Se puede esperar que de inmediato los alumnos ubiquen el $1\frac{4}{7}$. Para hallar otros dos números que estén entre $1\frac{3}{7}$ y $1\frac{5}{7}$ hay una infinidad de respuestas posibles. Por ejemplo, pueden observar que: $1\frac{3}{7} = 1\frac{6}{14}$ y que $1\frac{5}{7} = 1\frac{10}{14}$.

Entre ellos pueden ubicarse el $1\frac{7}{14}$, $1\frac{8}{14} = 1\frac{4}{7}$ y $1\frac{9}{14}$.

También sucede que:

$1\frac{3}{7} = 1\frac{18}{42}$ y que $1\frac{5}{7} = 1\frac{30}{42}$.

Entre ellos pueden ubicarse, por ejemplo, $\frac{19}{42}$, $\frac{22}{40}$, $\frac{24}{42}$, $\frac{27}{42}$, $\frac{29}{42}$, etcétera.

Si considera que aún tienen dificultades con el concepto de densidad, realicen más ejercicios de este tipo.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos que resuelvan y copien en una hoja aparte esta actividad. Si considera que aún tienen dificultades para ubicar números entre dos fracciones, resuelvan colectivamente actividades de este tipo en el pizarrón, resaltando la equivalencia, es decir, señalando en la recta que $\frac{2}{4}$ se localiza en el mismo punto que $\frac{6}{12}$ y que lo mismo ocurre con $\frac{3}{4}$ y $\frac{9}{12}$. Por eso entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$ están $\frac{7}{12}$ y $\frac{8}{12}$, entre otros.

Propósito de la sesión. Resolver problemas de comparación y densidad de números decimales usando la recta numérica como un recurso. Reconocer la conservación de la escala y la arbitrariedad de la posición del cero.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos resuelvan todas las actividades organizados en parejas, a excepción de *Lo que aprendimos*, que se recomienda resolver de manera individual.

Posibles dificultades. Al ordenar las longitudes saltadas, uno de los errores que pueden surgir consiste en decir que 8.59 m es mayor que 8.9 m, "porque 59 es mayor que 9". En este punto no los corrija, el error se confrontará en la fase siguiente.

Sugerencia didáctica. Es muy importante permitir que los alumnos hagan comentarios sobre ideas, sus respuestas, sus intentos de resolución, etc., aunque estén equivocados. Escuchar lo que dicen los otros puede ser de utilidad para todos.

Propósito del interactivo. Comprobar la propiedad de densidad de los números decimales.

Propósito de la actividad. Para solucionar el posible error descrito antes, se recurre a la escritura fraccionaria de los números decimales y a la equivalencia de fracciones.

Sugerencia didáctica. Si hubo errores en el apartado *Consideremos lo siguiente,* corríjalos en este momento.

Propósito de la actividad. En esta actividad se aborda el problema de la densidad de los números decimales. En este caso, entre 8.90 y 8.95 se pueden localizar cuatro números en el orden de los centésimos: 8.91, 8.92, 8.93, 8.94. Para encontrar la quinta marca hay que considerar los milésimos.
La idea es que los alumnos vayan comprendiendo que entre dos números decimales o fraccionarios hay una infinidad de números. Por ejemplo, entre 8.91 y 8.92 pueden estar 8.915 y 8.916, y entre éstos 8.9152 y 8.9153, etcétera.

Comparen sus procedimientos con los de sus compañeros y comenten:
En una escuela dicen que 8.59 es más grande que 8.9, porque 59 es mayor que 9. ¿Ustedes qué opinan, cuál será más grande? ¿Por qué?

>>> Manos a la obra

I. Realicen las siguientes actividades:

a) Localicen en la recta los números $8\frac{5}{10}$, $8\frac{6}{10}$, $8\frac{7}{10}$, $8\frac{8}{10}$ y $8\frac{9}{10}$.

8.5 — 9

b) Escriban las marcas de Powell, Beamon y Phillips en forma de número fraccionario mixto:

Recuerda que:
Los números fraccionarios decimales se pueden escribir como fracción con denominador 10, 100, 1000, etc., dependiendo de si el número decimal tiene décimos, centésimos, milésimos, etcétera.
Por ejemplo, $8.5 = 8\frac{5}{10}$

Powell: $8.95 = 8\frac{\square}{100}$

Beamon: $8.9 = 8\frac{\square}{10}$

Phillips: $8.59 = 8\frac{\square}{100}$

c) ¿A cuántos centésimos equivalen 9 décimos? ____________

d) ¿Qué número es mayor $8\frac{90}{100}$ o $8\frac{59}{100}$? ____________

e) En la recta anterior localicen los números: $8\frac{95}{100}$, $8\frac{90}{100}$ y $8\frac{59}{100}$.

Comenten:
¿En qué se equivocaron en la respuesta de la otra escuela?

II. En las rondas eliminatorias para el Campeonato Mundial de 2005 hubo cinco competidores con mejores marcas que Beamon, pero no igualaron la marca de Powell. Todos estos competidores tuvieron marcas distintas.

a) ¿Cuánto pudieron haber saltado estos competidores?

__________ __________ __________ __________ __________

b) Ubiquen sus saltos en la siguiente recta:

8.90 — 8.95

38

MATEMÁTICAS I

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten:

a) ¿Encontraron las mismas distancias para los saltos?

b) Si se divide a la mitad el segmento que va de 8.90 a 8.91, se encuentra el número 8.905. ¿Qué número se encuentra si se divide a la mitad el segmento que va de 8.91 a 8.92?

>>> A lo que llegamos

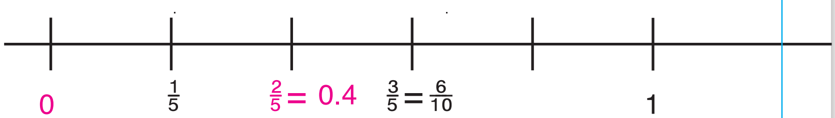
Entre cualquier par de números decimales siempre hay otros números decimales. Ésta es una propiedad que se conoce como propiedad de densidad de los números decimales.

>>> Lo que aprendimos

1. En la siguiente recta numérica localiza los números 0.5 y $\frac{7}{4}$. Después encuentra dos números que estén entre ellos.

0

2. En la siguiente recta numérica localiza los números $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{10}$, 0.4, 0, $\frac{3}{5}$:



b) Y, ¿cuál es el menor? ____________

c) Encuentra y localiza dos números que estén entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$.

>>> Para saber más

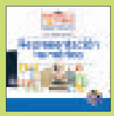
Sobre las distintas maneras de representar números enteros consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

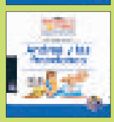
Marvan, Luz María. "Escritura decimal infinita" y "Otros símbolos para números no enteros" en *Representación numérica*. México: SEP/Santillana Libros del Rincón, 2003.

Sobre las distintas maneras de interpretar los números escritos en forma de fracción consulta:

Marvan, Luz María. *Andrea y las fracciones*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre la distribución de la población en el país consulta:
http://www.inegi.gob.mx/inegi/default.asp [Fecha de consulta: 23 mayo 2006].
Ruta: entrar al acceso directo *II Conteo de Población y Vivienda 2005*.
Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática.





39

Respuestas.
b) 8.915.

Posibles dificultades. Para algunos alumnos puede no ser muy claro que 8.905 esté entre 8.90 y 8.91 porque en su experiencia con los números naturales 905 es mayor que 90 y que 91. Si esto sucede, puede resultarles útil hallar un número equivalente:
8.90 = 8.900
8.91 = 8.910
Así podría ser más claro que 8.905 está a la mitad entre esos dos números.

Sugerencia didáctica. Comente esta información con los alumnos.
También puede anotar las siguientes parejas de números en el pizarrón y pedirles que digan si hay al menos un número que esté entre esos dos. Si piensan que sí, que propongan alguno(s) y que digan si es fraccionario, decimal o natural.

- 0.36 y 0.37.
- 2.456 y 2.457.

Respuestas. Es conveniente situar primero las unidades (1 y el 2). El 0.5 se ubica a mitad entre el cero y el uno.
Para ubicar $\frac{7}{4}$, los alumnos pueden transformarlo en número decimal, obteniendo 1.75, después pueden dividir el segmento entre el 1 y el 2 en diez partes iguales y ubicar 0.75 entre 7 décimos y 8 décimos.
Si trabajan con la fracción, requieren dividir el segmento entre el 1 y el 2 cuatro partes iguales para ubicar $\frac{7}{4}$.

4

Posibles procedimientos. Aun cuando no se está marcando el 0, los alumnos pueden identificar que entre $\frac{1}{5}$ y 1 hay $\frac{4}{5}$, que son los que deberán marcar. Una vez obtenido el tamaño de $\frac{1}{5}$ pueden hallar el 0.
Para ubicar a cada uno de los números que se les indican, los alumnos tienen la opción de transformar algunos de ellos a fracciones o a números decimales, o pueden obtener también fracciones equivalentes; por ejemplo,
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ o $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos que resuelvan y copien en una hoja aparte los ejercicios del número 2 de este apartado. En ellos se aborda la localización de decimales y fracciones en la recta, la equivalencia y la densidad, por lo que puede ser un buen indicativo de los conocimientos de los alumnos.
Si tienen dificultades resuelvan actividades como las de los apartados *Manos a la obra* de las sesiones 2 y 3.

Sugerencia didáctica. Invite a los alumnos a que decidan con qué tipo de números quieren trabajar; posteriormente, cuando comparen sus soluciones, será interesante que identifiquen la diversidad de respuestas correctas.

Respuestas.

a) $\frac{6}{10}$ y $\frac{3}{5}$ que son equivalentes.

b) El 0.

c) Una forma de encontrar dos puntos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$, es hallar números equivalentes:
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ y $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$; entre esos dos números está $\frac{5}{10}$. Posteriormente pueden obtenerse quinceavos:
$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{9}{15}$; entre esos dos números están $\frac{7}{15}$ y $\frac{8}{15}$. Si se transforma a veinteavos, tenemos que entre $\frac{8}{20}$ y $\frac{12}{20}$ se ubican $\frac{9}{20}$, $\frac{10}{20}$ y $\frac{11}{20}$.
La pregunta admite una gran diversidad de respuestas correctas.

Propósito de la sesión. Describir las reglas de secuencias de figuras de manera verbal o aritmética.
Organización del grupo. Forme parejas para que los alumnos trabajen de esa manera durante toda la sesión.

Propósito del video. Observar sucesiones de figuras y de números que crecen, para deducir su patrón de crecimiento.

Posibles procedimientos. Una manera en que los alumnos pueden resolver el ejercicio es continuar dibujando cuadrados, aumentando un punto a cada lado. Es poco probable que en este momento consideren el total de puntos de la figura o que establezcan una relación entre el lugar que ocupa la figura en la sucesión y el total de puntos que debe tener.
Posibles dificultades. Como de la figura 1 a la figura 2 el número de puntos aumenta el doble, un posible error es que consideren que siempre deben aumentar el doble. Permita que resuelvan como puedan, más adelante tendrán oportunidad de comparar y corregir sus resultados.
Respuestas. El número de puntos de cada figura aumenta de cuatro en cuatro: Fig. 4 = 16 puntos;
Fig. 6 = 24 puntos;
Fig. 7 = 28 puntos;
Fig. 9 = 36 puntos.

SECUENCIA 3

Sucesiones de números y figuras

En esta secuencia construirás sucesiones a partir de una regla dada y determinarás expresiones generales para definir las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

SESIÓN 1

FIGURAS QUE CRECEN

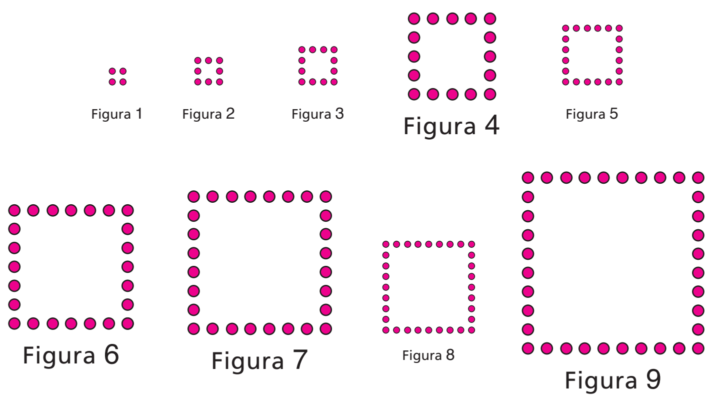
>>> Para empezar

Figuras que crecen

Una sucesión de figuras es un conjunto de figuras con la propiedad de que hay un patrón de crecimiento que permite obtener todas las figuras del conjunto, empezando por la que ocupa el primer lugar de la sucesión, luego la que ocupa el segundo, luego la que ocupa el tercero y así sucesivamente. Se llama figura 1 a la que ocupa el primer lugar en la sucesión, figura 2 a la que ocupa el segundo, figura 3 a la que ocupa el tercero y así sucesivamente.

>>> Consideremos lo siguiente

a) Completen la siguiente sucesión de figuras.



40

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de literales.
Antecedentes
Durante la escuela primaria los alumnos completaron sucesiones numéricas sencillas. En esta ocasión utilizarán sucesiones numéricas y figurativas para encontrar la expresión general que define un elemento cualquiera de la sucesión.

Propósitos de la secuencia
Construir sucesiones de figuras y números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*Figuras que crecen* Describir las reglas de sucesiones de figuras de manera verbal o aritmética.	Video *Figuras que crecen* Interactivo
2	*Números que crecen* Describir la regla de crecimiento de sucesiones de números de manera verbal o aritmética.	Interactivo
3	*Escribiendo reglas* Determinar expresiones generales para definir las reglas de sucesiones de números o de figuras llamando "figura *n*" a la que ocupa el "lugar *n*".	Interactivo

b) Completen la tabla para encontrar cuántos puntos tienen algunas de las figuras de la sucesión. Si es necesario dibujen las figuras en sus cuadernos.

Número de la figura	Número de puntos de la figura	Número de la figura	Número de puntos de la figura
1	4	8	
2		9	
3		10	
4		11	
5		12	
6		13	
7		14	

Comparen sus tablas y comenten:

a) ¿Cómo calcularon el número de puntos de la figura 14?

b) ¿Cómo calcularían el número de puntos de cualquiera de las figuras?

>>> Manos a la obra

I. ¿Cuáles de los siguientes procedimientos sirven para encontrar el número total de puntos de cualquiera de las figuras de la sucesión? Subráyenlos.

- Multiplicar por 4 el número de puntos que tiene la figura en cada lado.
- Se le suman 4 puntos al número de puntos de la figura anterior.
- Son los múltiplos de 4.
- Es el número de la figura multiplicado por 4.

Recuerden que:

Los múltiplos de 4 son los números que se obtienen al multiplicar el número 4 por algún otro número.
Por ejemplo, 12 es múltiplo de 4 porque: 4 × 3 = 12.

Comparen sus respuestas. Usen los procedimientos que escogieron para contestar:

a) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 15? ________

b) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 20? ________

II. Contesten:

a) Escriban el número que corresponde a cada una de las figuras de la derecha.

b) ¿Qué figura tendría 56 puntos? ________

c) ¿Qué figura tendría 72 puntos? ________

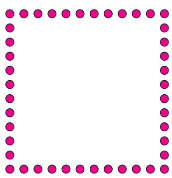


Figura ________

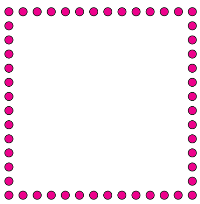


Figura ________

Comenten:

¿Por qué no hay figuras con un número impar de puntos: 1, 3, 5, 7, 9, ...?

41

Propósito del interactivo. Deducir reglas correspondientes a sucesiones numéricas y figurativas.

Propósito de la actividad. Identificar las relaciones entre el número de la figura y el número de puntos de la figura; al mismo tiempo, podrán comparar, y en su caso corregir las respuestas que obtuvieron en un primer momento.

Posibles procedimientos. Algunos alumnos pueden identificar que los valores de la segunda y cuarta columna aumentan de cuatro en cuatro; otros podrán ver que es posible obtenerlos al multiplicar el número de la figura por 4; también pueden notar que cada lado del cuadrado tiene un punto más que el número de la figura: la figura 1 es un cuadrado con dos puntos por lado, la figura 2 es un cuadrado con tres puntos por lado, etcétera.

Mientras resuelven, pregúnteles cómo están completando la tabla.

Posibles procedimientos. Los procedimientos para resolver pueden ser diversos, así como la forma de expresarlos, por ejemplo:

"Para la figura 14 son los puntos de la 13 más 4".

"Le sumo 4".

"El lugar de la figura por 4".

"Como la figura 14 tiene 15 puntos por lado, multiplico 15 × 4 y le resto 4 puntos porque estoy contando dos veces las esquinas".

Fomente el intercambio de ideas, incluyendo procedimientos correctos e incorrectos.

Respuesta. Los tres últimos procedimientos son correctos, aunque el penúltimo ("Son los múltiplos de 4") da una respuesta tan general que puede ser ambigua cuando se trata de establecer el número de puntos para una figura determinada; por ejemplo, ¿cuál de todos los múltiplos de 4 es el número de puntos para la figura 14?

Sugerencia didáctica. Pídales que utilicen uno de los procedimientos que consideren correctos para obtener el total de puntos de las figuras 15 y 20. Para que puedan compararse los resultados que se obtienen con cada procedimiento, asegúrese de que efectivamente cada uno de ellos sea utilizado al menos por una de las parejas (incluyendo el procedimiento incorrecto).
Respuestas: La figura 15 tiene 60 puntos (15 × 4) y la figura 20 tiene 80 puntos (20 × 4).

Respuestas.

a) Figura 11 y figura 13, respectivamente. Pueden contar el número total de puntos y dividirlo entre cuatro; también pueden contar el número de puntos por lado y restar uno.

b) La figura que tiene 56 puntos es la número 14.

c) La figura que tiene 72 puntos es la número 18.

Respuestas. Las respuestas pueden ser diversas, desde aquellas que no identifiquen una razón ("Por que no hay". "Porque así van saliendo") hasta otras en las que haya una justificación matemática: " Porque todos los múltiplos de 4 son pares".

Sugerencia didáctica.
Lea y comente esta información junto con los alumnos. Una forma de recuperar la información es que usted les pida que averigüen el número de puntos para una figura dada (por ejemplo, para la figura número 19) utilizando las tres reglas que se dan en el recuadro. Si obtienen los mismos resultados, los alumnos podrán verificar que, efectivamente, las tres reglas son equivalentes.

Posibles procedimientos.
Al contar el número de puntos de las tres primeras figuras, es posible que los alumnos identifiquen que aumentan dos puntos de una figura a otra. Para dibujar las figuras, deberán aumentar un punto en cada uno de los extremos.
Respuestas. La figura 4 tiene 9 puntos, la figura 5 tiene 11 puntos, la figura 7 tiene 15 puntos y la figura 9 tiene 19 puntos.

Propósito del interactivo.
Deducir reglas correspondientes a sucesiones numéricas y figurativas.

>>> A lo que llegamos

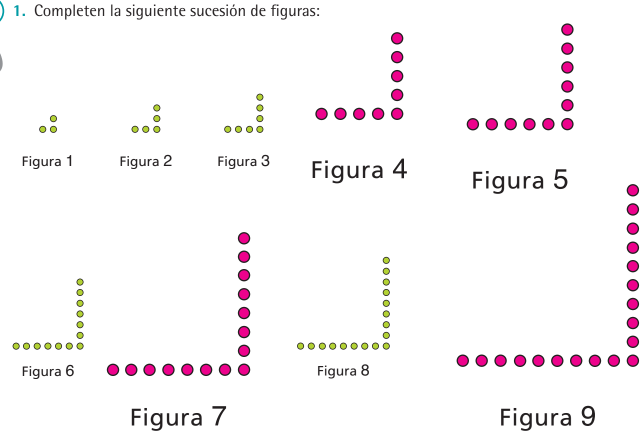
A los procedimientos que dicen cómo obtener el número de puntos de cada figura en una sucesión se les llama **reglas**. Por ejemplo, en la anterior sucesión de figuras, el procedimiento **son los múltiplos de 4** es una regla que permite encontrar el número de puntos que tiene cada figura.

Cuando hay varias reglas para obtener el número de puntos de cada figura en una sucesión se dice que son **reglas equivalentes**. En el ejemplo, las siguientes reglas son equivalentes:

- **Se le suman 4 puntos al número de puntos de la figura anterior.**
- **Son los múltiplos de 4.**
- **Es el número de la figura multiplicado por 4.**

>>> Lo que aprendimos

1. Completen la siguiente sucesión de figuras:



a) ¿Cuáles de las siguientes reglas sirven para encontrar el número de puntos de cualquiera de las figuras de la sucesión? Subráyenlas.

- El número de puntos de la figura anterior más 2 puntos.
- Los números impares.
- Multiplicar por 2 el número de la figura y sumar 1.

42

Sugerencia didáctica. Para que los alumnos puedan elegir alguna o algunas de las reglas, pídales que anoten, debajo de cada figura, el número de puntos de cada una de ellas.
Respuesta. Sólo la primera y la tercera reglas son equivalentes; invite a los alumnos a argumentar sus respuestas. Es posible que la segunda regla ("Los números impares") genere polémica, pues si bien en todos los casos el número total de puntos es un número impar, en la sucesión no hay una figura que tenga sólo un punto; por lo tanto, esa regla no es correcta.

b) Usando la regla que escogieron, completen la siguiente tabla para calcular el número de puntos de algunas de las figuras de la sucesión.

Número de la figura	Número de puntos
1	
2	
3	
4	
5	
8	
10	
15	
20	
25	
30	

Comparen sus tablas y las reglas que escogieron. Encuentren las reglas que son equivalentes.

2. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué figura tiene 51 puntos? ______

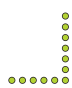
b) ¿Qué figura tiene 61 puntos? ______

c) ¿Habrá alguna figura con 62 puntos? ______

Expliquen en sus cuadernos por qué.

Comenten:

a) ¿Por qué la siguiente figura no aparece en la sucesión?



b) ¿Por qué en la sucesión no hay figuras que tengan un número par de puntos: 2, 4, 6, 8, ...?

Para recordar. En esta actividad se presentan dos tipos de reglas: una regla recursiva y una regla expresada como una fórmula. En las reglas recursivas el valor de cada término depende de algunos de los términos anteriores de la sucesión; en este caso depende únicamente del valor del término anterior. Ésta es la característica de la primera regla ("El número de puntos de la figura anterior más 2 puntos"); los alumnos que la utilicen tendrán que calcular el número de puntos para las figuras 6 y 7 para poder obtener el número de puntos de la figura 8 que se les pide en la tabla. En las reglas expresadas como una fórmula, el valor de cada término depende únicamente del mismo término; es el caso de la tercera regla ("Multiplicar por 2 el número de la figura y sumar uno"): no se requiere conocer el número de puntos de la figura anterior y se obtiene, de manera inmediata, el número de puntos de cualquier figura.
Es conveniente que los alumnos vayan identificando algunas ventajas y desventajas de cada una de las reglas; esto no quiere decir que usted deba enseñarles los términos "regla recursiva" o "regla expresada como una fórmula", sino únicamente que los alumnos identifiquen las diferencias y ventajas de cada una de las reglas que se les proponen.

Respuestas. Figuras 25 y 30, respectivamente. No puede haber una figura con 62 puntos porque el total de puntos de todas las figuras es un número impar.

Respuesta. No hay figuras con un número par de puntos porque el número de puntos de una figura es 2 veces el número de la figura más 1, lo que resulta siempre un número impar.

Propósito de la sesión. Descrbir la regla de crecimiento de secuencias de números de manera verbal o aritmética.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen toda la sesión organizados en parejas.

2

Sugerencia didáctica. Antes de que los alumnos empiecen a resolver, comente con el grupo la información anterior a partir de la sucesión que aquí se les presenta. Por ejemplo, puede preguntar: ¿Cuál es el **primer término** de esta sucesión? ¿Cuál es el **cuarto término**... y el **quinto término**? ¿En qué lugares están algunos de los términos que no conocemos?

Respuestas.

a) La sucesión aumenta de 3 en 3.

b) Las reglas que los alumnos formulen pueden ser diversas: "Los múltiplos de 3". "La tabla del 3". "Voy sumando 3". "Sumo 3 al término anterior" …

Sugerencia didáctica. Invite a las parejas a que lean su regla o a que la escriban en el pizarrón. Anime al grupo para que opine cuáles considera correctas, cuáles no y por qué. No es necesario que lleguen a un acuerdo en este momento.

SECUENCIA 3

SESIÓN 2

NÚMEROS QUE CRECEN

>>> Para empezar

En una sucesión de números, como: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

Se llama **primer término** al número que ocupa el primer lugar en la sucesión, en el ejemplo el primer término es 2.

Se llama **segundo término** al número que está en el segundo lugar en la sucesión, en el ejemplo el segundo término es 4.

Se llama **tercer término** al número que está en el tercer lugar, en el ejemplo el tercer término es 6, etcétera.

>>> Consideremos lo siguiente

a) Completen la siguiente sucesión de números:

3, ___, 9, 12, ___, 18, ___, ___, 27, ___,33, ___, ___, 42, ___, 48, ___, 54, ___, 60, ___, …

b) Escriban en sus cuadernos una regla para obtener cualquiera de los términos de la sucesión.

Comparen sus respuestas y las reglas que escribieron.

>>> Manos a la obra

I. Usando la regla que escribieron completen la siguiente tabla (observen que la tabla inicia con el término que ocupa el lugar 21):

Lugar del término	Término de la sucesión
21	
22	
23	
24	
25	
30	
	93
40	
	123
	126
50	
	180

44

Sugerencia didáctica. Los alumnos que hayan utilizado una regla recursiva (por ejemplo, "Sumarle 3 al término anterior") tendrán que completar toda la sucesión calculando incluso términos que no son solicitados en la tabla (por ejemplo, para obtener los términos de los lugares 30, 40 y 50, tienen que obtener todos los términos que están entre esos lugares). Si observa que hay alumnos que recurren a ese procedimiento, permita que lo lleven a cabo, pues si bien les demanda más tiempo y más cálculos, es posible que en este momento requieran hacer todo ese proceso para comprender el paso de un término a otro. Posteriormente, al comparar su procedimiento con otros, podrán ver que hay otras formas más económicas de resolver, por ejemplo, multiplicar por 3 el lugar del término.

Respuesta. El lugar del término es 31 (se obtiene al dividir 93 ÷ 3). Aun cuando no todos los alumnos hayan logrado identificar que la forma más rápida de obtener el término de la sucesión es multiplicar por 3 el lugar del término, es posible que en las reglas que redacten esté implícita la multiplicación por 3. En este caso, al pedirles el lugar en el que se encuentra el término 93, los alumnos tienen la posibilidad de seguir explorando la relación multiplicativa que está en juego.

a) ¿Cuál es el término de la sucesión que está en el lugar 40? ______

b) ¿Cuál es el término de la sucesión que está en el lugar 24? ______

c) ¿En qué lugar está el término 30? ______

d) ¿En qué lugar está el término 123? ______

II. De las siguientes reglas, ¿cuáles son equivalentes a la que ustedes encontraron para obtener los términos de la sucesión? Subráyenlas.

- Sumar 3 al lugar del término.
- Sumar 3 al término anterior.
- Los múltiplos de 3.
- Multiplicar por 3 el lugar del término.

Comparen sus tablas y sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Las reglas que sirven para obtener los términos de una sucesión se pueden dar a partir del lugar del término, por ejemplo multiplicar por 3 el lugar del término.

III. En la columna izquierda se presentan los primeros términos de algunas sucesiones y en la columna derecha, algunas reglas que permiten encontrar estas sucesiones. Relacionen ambas columnas.

¡Cuidado: algunas de las sucesiones se pueden obtener usando dos reglas!

Términos de la sucesión	Reglas
( ) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …	(A) Sumar cuatro al término anterior.
( ) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, …	(B) Los números pares.
( ) 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, …	(C) Multiplicar el lugar del término por 4.
( ) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, …	(D) Multiplicar el lugar del término por 5.
( ) 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 45, …	(E) Multiplicar el lugar del término por 5 y sumar 4.
	(F) Multiplicar el lugar del término por 2.

45

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos identifiquen, o en su caso que confirmen, la relación multiplicativa que hay en esta sucesión: para obtener un término, se multiplica el lugar del término por 3; para obtener el lugar del término, se divide el término entre 3. Más adelante, en el apartado *A lo que llegamos*, se hace explícita esta relación, particularmente se resalta el papel del lugar del término en la formulación de una regla.

Respuesta. Las tres últimas reglas son equivalentes.

Sugerencia didáctica. Invite a los alumnos a que expresen sus respuestas y las argumenten. En especial, invítelos a que comparen estas reglas con la que redactaron en el inciso b) del apartado *Consideremos lo siguiente.*

Integrar al portafolios. En este momento se espera que los alumnos hayan comprendido el concepto del lugar del término y lo utilicen o lo identifiquen en la descripción de la regla de una sucesión de números. Con este ejercicio usted puede obtener información de lo que ellos saben al respecto. Si nota que hay alguna dificultad (particularmente con las reglas C, D, E y F), analice junto con ellos cada una de esas reglas haciendo énfasis sobre el lugar de los términos en estas sucesiones. También puede sugerirles que elaboren una tabla como la que se propone en la actividad I del apartado *Manos a la obra*.

Respuestas.

(B, F).

(D).

(A).

(A, C).

(E).

Respuesta. Las reglas F y B.

Propósito del interactivo. Deducir reglas correspondientes a sucesiones numéricas y figurativas.

Propósito de la sesión. Determinar expresiones generales para definir las reglas de secuencias de números o de figuras, llamando "figura ***n***" a la que ocupa el "lugar ***n***".

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen organizados en parejas, a excepción del apartado *Lo que aprendimos*, el cual puede resolverse de manera individual.

1

Respuesta. Los términos van aumentando de 7 en 7, por lo tanto, hay que multiplicar el lugar del término por 7 para encontrar el término que corresponde.

Respuesta. Hay varias formas correctas de expresar la regla: ***n*** × **7**, **7** por ***n***, **7** veces ***n***.

SECUENCIA 3

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cuáles de las reglas anteriores son equivalentes?

Recuerden que:

Dos reglas son equivalentes si con las dos se obtienen los términos de la misma sucesión.

>>> Lo que aprendimos

Un juego en parejas:

- El primer jugador inventa una regla y la escribe en su cuaderno (sin que la vea su compañero). Luego, usando la regla, escribe los primeros ocho términos de la sucesión y se los enseña a su compañero.
- El segundo jugador escribe una regla para obtener la sucesión.
- Los dos jugadores verifican si con la regla del segundo se obtienen los términos de la sucesión planteada por el primero (es decir, si el segundo jugador escribió la regla correcta). De ser así, el segundo jugador *gana* un punto.
- Se empieza nuevamente el juego intercambiando los papeles de los jugadores.

SESIÓN 3

REGLA DE SUCESIONES

>>> Para empezar

En las sesiones anteriores aprendieron a escribir reglas que describen las sucesiones de números y figuras usando palabras. En esta sesión aprenderán otra forma de escribir estas mismas reglas utilizando el lugar que ocupa el término en la sucesión.

>>> Consideremos lo siguiente

Completen la siguiente sucesión de números y contesten las preguntas.

7, 14, 21, ____, 35, ____, ____, 56, 63, ____,77, ____, ____, 98, ____, 112, ____, ...

a) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término del **lugar 4**? ____________

b) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término del **lugar 10**? ____________

c) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término del **lugar 20**? ____________

d) Usen la letra ***n*** para representar el número del lugar y escriban una regla para encontrar el término del **lugar *n***. ____________

____

____

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

46

Sugerencia didáctica. Pida a las parejas que compartan con el grupo cómo entendieron la expresión **lugar *n***. Es importante dejar claro que **lugar *n*** se refiere a "cualquier lugar"; la regla que cada pareja haya redactado debe permitir encontrar, efectivamente, el término para cualquier lugar. Permita que los alumnos valoren qué reglas cumplen con esa condición; en caso de que no todas las parejas hayan redactado una regla correcta, posteriormente tendrán oportunidad de identificar su error.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para calcular algunos de los términos de la sucesión y respondan las preguntas. Usen las reglas que encontraron.

Lugar del término	Término de la sucesión
1	7
2	14
3	21
4	
5	35
6	
7	
8	56
	63
10	
15	
	140
25	
	210
40	

a) ¿Entre qué número dividen el **63** para encontrar el **lugar** que ocupa en la sucesión? ______

b) ¿Entre qué número dividen el **210** para encontrar el **lugar** que ocupa en la sucesión? ______

c) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término que está en el **lugar 30**? ______

d) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término que está en el **lugar 40**? ______

e) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término que está en el **lugar** ***n***? ______

Respuesta. Cada uno de los términos de esta columna se obtiene multiplicando por **7** el lugar del término.

Respuesta. El lugar del término se obtiene dividiendo el término entre siete: **63** ÷ **7** = **9**.

Respuesta. La cuarta regla (Multiplicar ***n*** por **7**) es la que permite encontrar el término ***n*** por la precisión del lenguaje que utiliza.

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos argumenten por qué eligieron determinadas reglas. Posteriormente, usted puede aclarar que en la segunda y tercera regla (que probablemente algunos alumnos eligirán) el lenguaje no es preciso (¿qué es lo que hay que multiplicar por 7?, ¿cuál es el término anterior al que debemos sumar 7?); además, la tercera regla da lugar a distintas sucesiones si decidimos cambiar el primer término. Por ejemplo: una sucesión puede iniciar con el número 7 (7, 14, 21...) y otra puede iniciar con el 5 (5, 12, 19 ...); en ambas sucesiones se suma 7 al término anterior.

Una vez que hayan identificado la regla correcta, invítelos a compararla con la que ellos redactaron en el inciso e) del apartado *Consideremos lo siguiente* y a hacer las correcciones necesarias.

Respuestas. Para los incisos a), b) y c), se multiplica el lugar por 7; para el inciso d) se divide el término entre 7.

Propósito del interactivo. Deducir reglas correspondientes a sucesiones numéricas y figurativas.

II. En una telesecundaria escribieron las siguientes reglas para encontrar el término que está en el **lugar *n***, ¿con cuáles de estas reglas están ustedes de acuerdo? Subráyenlas.

- Sumar ***n*** más **7**.
- Multiplicar por **7**.
- Sumar **7** al término anterior.
- Multiplicar ***n*** por **7**.

Comparen sus respuestas y encuentren las reglas que son equivalentes.

III. Usando las reglas que encontraron contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el término que está en el lugar 100? ________________

b) ¿Cuál es el término que está en el lugar 150? ________________

c) ¿Cuál es el término que está en el lugar 300? ________________

d) ¿En qué lugar está el término 777? ________________

IV. Completen la siguiente sucesión de figuras y contesten las preguntas.

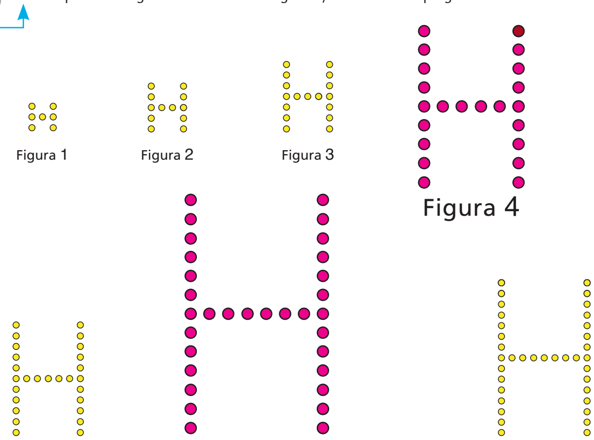


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6 Figura 7

Posibles dificultades. Si observa que algunos alumnos no encuentran ninguna estrategia para abordar el problema, puede sugerirles que escriban debajo de cada figura el número de puntos que le corresponde; de esta manera podrán identificar más fácilmente que el número de puntos aumenta de 5 en 5 de una figura a otra: un punto en cada uno de los cuatro extremos y otro en medio.

Es importante que les dé la oportunidad de tratar de resolverlo, aun cuando no lo hagan de manera correcta.

a) ¿Cuántos puntos tendrá la figura **4**? ____________

b) ¿Cuántos puntos tiene la figura **7**? ____________

c) ¿Cuántos puntos tendrá la figura **9**? ____________

d) ¿Cuántos puntos tendrá la figura **10**? ____________

e) ¿Cuáles de las siguientes reglas permiten encontrar el número de puntos de la figura que está en el **lugar** n? Subráyenlas.

- Sumar **5** al término anterior.
- $5n + 2$.
- Multiplicar n por **5** y sumar **2**.

f) Usando la regla que eligieron completen la siguiente tabla para obtener el número de puntos de algunas de las figuras de la sucesión.

Lugar de la figura	Número de puntos de la figura
1	7
2	12
3	17
4	
5	27
6	
7	37
8	
9	
10	
20	
25	
30	
100	

Respuestas. Figura **4**: 22 puntos; Figura **7**: 37 puntos; Figura **9**: 47 puntos; Figura **10**: 52 puntos.

Respuesta. Las tres reglas son correctas y equivalentes. No obstante, la primera regla no permite obtener de manera directa el número de puntos para cualquier término, pues se requiere calcular primero el número de puntos del término anterior.

Sugerencia didáctica. Antes de que los alumnos completen la tabla utilizando la regla que eligieron, usted puede solicitarles que argumenten por qué consideran que esa regla es la que más les convence. Particularmente será necesario que expresen cómo interpretan la regla $5n + 2$.

Sugerencia didáctica. Como una forma de recuperar la información, usted puede proponer al grupo algunas reglas en el pizarrón, por ejemplo: **5*n*** o **3*n***, y pedir a los alumnos que traten de interpretarlas para el término que está en primer lugar, para el que está en segundo, etcétera.

Propósito del interactivo. Deducir reglas correspondientes a sucesiones numéricas y figurativas.

SECUENCIA 3

>>> A lo que llegamos

Las reglas que sirven para obtener los términos de una sucesión se pueden dar a partir del lugar del término de la sucesión.

Por ejemplo, la regla **multiplicar el lugar del término por 7** se puede escribir usando la letra ***n*** como:

- **multiplicar 7 por *n*.**
- **7 por *n*.**

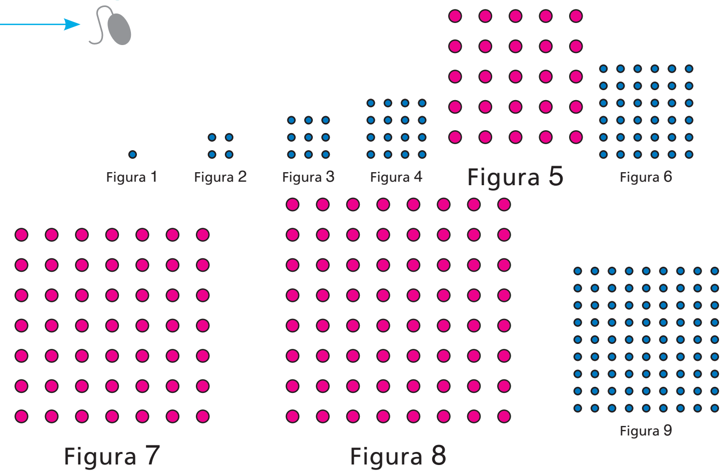
Por convención, **7 × *n*** se puede escribir como: **7*n***.

Entonces:

- El término que está en el primer lugar es igual a **7 × 1 = 7**.
- El término que está en el segundo lugar es igual a **7 × 2 = 14**.
- El término que está en el tercer lugar es igual a **7 × 3 = 21**.
- El término que está en el **lugar *n*** es igual a **7 × *n***.

>>> Lo que aprendimos

Completa la siguiente sucesión de figuras y contesta las preguntas.



50

Integrar al portafolios. Se espera que los alumnos sean capaces de identificar la regla de la sucesión y que puedan formularla mediante una expresión general.

Si nota que tienen dificultad para identificar la regla, sugiérales que realicen una tabla como la de la actividad III del apartado *Manos a la obra*. Si tienen dificultades para formular la expresión general, revise y comente nuevamente, junto con los alumnos, la información del recuadro *A lo que llegamos*. Procure hacer un análisis similar con algunas de las reglas que los alumnos hayan generado para este ejercicio, y ayúdeles a identificar las reglas equivalentes y a expresarlas utilizando la letra ***n***.

Respuestas. El número de puntos de cada figura,es igual al cuadrado del lugar de la figura: la figura 5 tiene 25 puntos (5 x 5), la figura 7 tiene 49 puntos (7 x 7), la figura 8 tiene 64 puntos (8 x 8).

a) ¿Qué figura tendrá 25 puntos ? ______

b) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 8? ______

c) ¿Qué figura tendrá 100 puntos? ______

d) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 20? ______

e) Escribe una regla para calcular el número de puntos de la figura del lugar *n*:

______

______

______

>>> Para saber más

Sobre las sucesiones de números y patrones consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Ruiz, Concepción y Sergio De Régules. "Aventuras Fractales" en *El Piropo matemático. De los números a las estrellas*. México: SEP/Editorial Lectorum, Libros del Rincón, 2003.

Sobre patrones que aparecen en la naturaleza como la razón áurea y los fractales consulta: http://www.interactiva.matem.unam.mx
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].
Ruta para la razón áurea: SECUNDARIA → RAZÓN ÁUREA (dar clic en el dibujo de Nautilus).
Ruta para fractales: BACHILLERATO Y LICENCIATURA → FRACTALES (dar clic en el dibujo de la Curva de Koch).
Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, UNAM.

51

Respuestas.

a) La figura 5.

b) 64 puntos.

c) La figura 10.

d) 400 puntos.

e) Algunas respuestas correctas son: $n \times n$, n por n, n^2.

Propósito de la sesión. Elaborar expresiones algebraicas para calcular el perímetro de cuadrados, rectángulos, polígonos regulares y otras figuras. Operar con literales.
Organización del grupo. Se recomienda que los alumnos trabajen en parejas, y que el apartado *Lo que aprendimos* se resuelva de manera individual.

Propósitos del video. Reconocer el perímetro como el contorno de una figura y calcularlo en algunos polígonos.

SECUENCIA 4

Geometría y expresiones algebraicas

En esta secuencia explicarás en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas, interpretando las literales como números generales con los que es posible operar.

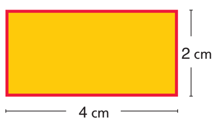
SESIÓN 1

FÓRMULAS Y PERÍMETROS

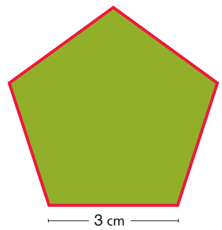
>>> Para empezar

Fórmulas y perímetros

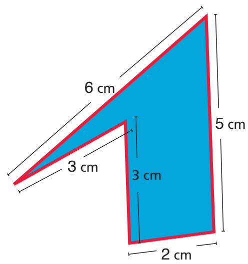
Recuerda que el perímetro de una figura geométrica es la medida de su contorno. A continuación se calcula el perímetro de un rectángulo, de un pentágono regular (de lados y ángulos iguales) y el de un polígono irregular; observa que el contorno está resaltado con una línea roja.



Perímetro = 4 cm + 2 cm + 4 cm + 2 cm = 12 cm



Perímetro = 5 × 3 cm = 15 cm



Perímetro = 6 cm + 5 cm + 2 cm + 3 cm + 3 cm = 19 cm

52

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de literales.
Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos resolvieron situaciones en las que debían interpretar o construir fórmulas geométricas para calcular el perímetro y el área de algunas figuras. En esas situaciones las literales que utilizaron eran interpretadas como etiquetas o abreviaturas. En esta ocasión se retomarán ese tipo de situaciones para interpretar las literales como números generales con los que se puede hacer operaciones.

Propósitos de la secuencia
Explicar en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas, interpretando las literales como números generales con los que es posible operar.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	*Fórmulas y perímetros.* Elaborar expresiones algebraicas para calcular el perímetro de cuadrados, rectángulos, polígonos regulares y otras figuras. Operar con literales.	Video *Fórmulas y perímetros* Interactivo
2	*Fórmulas y áreas.* Elaborar expresiones algebraicas para calcular las áreas de las figuras anteriores.	Interactivo

MATEMÁTICAS I

>>> Consideremos lo siguiente

Completen la siguiente tabla para calcular el perímetro de algunos cuadrados de distintos tamaños:

Medida del lado (cm)	Perímetro (cm)
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
20	
25	

Tabla 1

a) ¿Cómo se obtiene el perímetro de un cuadrado? ______________________

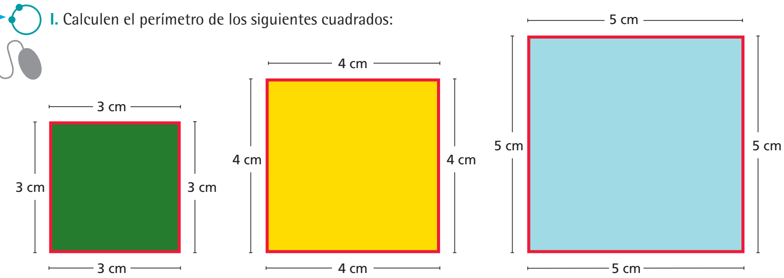
____

b) ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide x cm? ______________

Comparen sus tablas y comenten sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Calculen el perímetro de los siguientes cuadrados:



Perímetro: __________ Perímetro: __________ Perímetro: __________

¿Cómo se calcula el perímetro de cualquier cuadrado? ______________________

____

53

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos calculen los perímetros sin mayores dificultades, (pueden multiplicar la medida del lado por 4 o sumar cuatro veces la medida del lado). La finalidad está centrada en que logren verbalizar cuál es el procedimiento que utilizaron para obtener el perímetro en todos los casos (inciso a), y que posteriormente traten de generalizar ese procedimiento utilizando una literal (inciso b).

Respuestas. Hay distintas formas de responder, lo importante es que los alumnos traten de expresar o verbalizar el procedimiento que utilizaron para completar la tabla. Algunas respuestas posibles son: "Multiplicando la medida del lado por 4", "sumando cuatro veces el lado", "L × 4".

Posibles errores. En los casos anteriores los alumnos sumaron medidas expresadas con números, pero en este caso se trata de sumar o de multiplicar una literal que también representa una medida. Es posible que este cambio en la representación de medidas les dificulte responder a la pregunta o que lo hagan de manera errónea (por ejemplo, podrían contestar $x + 4$ o utilizar algunas otras expresiones sin sentido).
No se preocupe si en este momento no pueden responder de manera correcta, en el siguiente apartado tendrán oportunidad de ver distintas formas de generalizar. Algunas respuestas correctas:

4x,
4 por **x,**
4 veces **x,**
$x + x + x + x$.

Propósito del interactivo. Deducir las expresiones algebraicas de fórmulas de áreas y perímetros.

Propósito de la actividad. Por una parte, se espera que los alumnos verbalicen el procedimiento que utilizaron para calcular el perímetro de los cuadrados y, por la otra, que la expresión (verbal o simbólica) de ese procedimiento sea tan general que permita obtener el perímetro de *cualquier* cuadrado. Las respuestas pueden ser diversas: "Sumando cuatro veces la medida del lado", *multiplicando por cuatro la medida del lado*, L × 4, L + L + L + L.

Respuesta. Las cuatro últimas expresiones son correctas.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que argumenten por qué cada una de las expresiones –o reglas– es válida o no. Una forma de verificar sus respuestas es calculando el perímetro del cuadrado de 30 cm que se sugiere. Una vez que hayan acordado cuáles son las expresiones correctas, pueden comentarse ventajas o desventajas de algunas de esas expresiones; por ejemplo, en la segunda, puede confundirse la "x" con el símbolo de multiplicación.

Sugerencia didáctica. En la sesión 1 de la secuencia 3 los alumnos identificaron *reglas equivalentes*, por lo que usted puede retomar lo que ellos ya saben al respecto para poder interpretar la información que ahora se les presenta sobre las *expresiones equivalentes.*

Propósito del interactivo. Deducir las expresiones algebraicas de fórmulas de áreas y perímetros.

II. En una escuela escribieron las siguientes expresiones para calcular el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide x cm. Subrayen las correctas.

- $x + 4$;
- $x \times 4$;
- $x + x + x + x$;
- x por 4;
- 4 por x.

Comenten en grupo las expresiones que creen que son correctas y contesten:

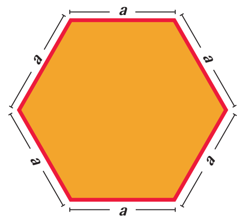
a) ¿Cómo usarían las expresiones para calcular el perímetro de un cuadrado de lado 30 cm?

b) ¿Cuáles de las expresiones les dan los mismos resultados?

>>> A lo que llegamos

Dos expresiones para calcular el perímetro son **equivalentes** si siempre dan los mismos resultados. Por ejemplo, las expresiones $x + x + x + x$ y **4 por x** son equivalentes.

III. La siguiente figura es un hexágono regular.



a) Encuentren y subrayen las expresiones correctas para calcular el perímetro del hexágono:

$6 \times a$	$6a$
$3a + 3a$	$6 + a$
$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$	$a + a + a + a + a + a$
$a \times 6$	$a + 6$

Tabla 2

Respuestas. Las expresiones correctas son:

$6 \times a$,
$3a + 3a$,
$a \times 6$,
$6a$,
$a + a + a + a + a + a$.

b) Usando las expresiones que escogieron llenen la siguiente tabla para calcular el perímetro de algunos hexágonos.

Anoten en el primer renglón las expresiones que encontraron.

Lado (cm)					
2					
4					
10.5					

Tabla 3

>>> A lo que llegamos

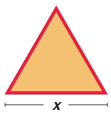
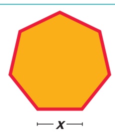
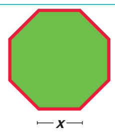
Las expresiones como las de la tabla 2 se llaman **expresiones algebraicas**.

Las expresiones algebraicas $a + a + a + a + a + a$, $3a + 3a$, $a \times 6$, $6 \times a$ y $6a$ son equivalentes y sirven para calcular el perímetro de un hexágono con medida de lado igual que a.

Por convención, $6 \times a$ también se escribe $6a$.

>>> Lo que aprendimos

1. Relaciona las columnas escribiendo en el paréntesis la letra que corresponda.

(A) 	( ) $3 \times x$
(B) 	( ) $x + x + x + x + x + x + x$
(C) 	( ) $8 + x$
	( ) $8 \times x$
	( ) $x + 6$

Propósito de la actividad. Al aplicar a casos específicos las expresiones que los alumnos eligieron, tendrán la oportunidad de verificar si efectivamente las distintas expresiones son equivalentes o no.

Sugerencia didáctica. Es conveniente que una vez identificadas las expresiones correctas, los alumnos comenten las ventajas y desventajas de algunas de ellas, particularmente la confusión que podría provocar el uso del símbolo de multiplicación "×", pues se puede confundir con la letra "x". También es importante enfatizar que la expresión $6a$ puede interpretarse como **6** por a o **6** veces a.

Sugerencia didáctica. Una vez que hayan leído y comentado la información que aquí se presenta, pueden acordar en el grupo utilizar en adelante expresiones como la de $6a$ para sustituir el signo de multiplicación "×" y evitar así posibles confusiones.

Propósito de las actividades. Al inicio de esta sesión se plantearon situaciones en las que las medidas se dieron con números para que a partir del cálculo aritmético los alumnos pudieran verbalizar y generalizar sus procedimientos; en las situaciones que a continuación se plantean, se espera que los alumnos logren expresar relaciones utilizando únicamente literales.

Respuestas.

(A) **3** por x.

(B) **8** × x.

(C) $x + x + x + x + x + x + x$.

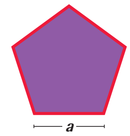
Respuestas. Algunas posibles, son: Para el rectángulo: $s + s + t + t$, y también $2s + 2t$. Para el pentágono: $5a$, y también $a + a + a + a + a$. Para el dodecágono (la cruz): $12b$. Para el romboide: $2p + 2q$, y también $p + p + q + q$.

Propósito de la sesión. Elaborar expresiones algebraicas para calcular áreas de las figuras anteriores.

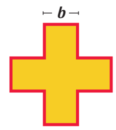
Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en parejas, a excepción del apartado *Lo que aprendimos*, el cual se recomienda trabajar de manera individual.

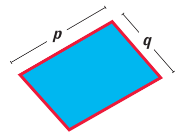
Sugerencia didáctica. Durante la escuela primaria los alumnos trabajaron ampliamente el cálculo de áreas de diversas figuras geométricas utilizando distintos recursos, por lo que se espera que no tengan dificultades relevantes. No obstante, es recomendable que esta información se lea y se comente con todo el grupo con la finalidad de que la noción de área no sea una dificultad para resolver los problemas que se plantean en esta sesión.

2. Escriban las expresiones algebraicas que sirven para calcular los perímetros de las siguientes figuras geométricas:



Expresión: ________________ Expresión: ________________





Expresión: ________________ Expresión: ________________

SESIÓN 2

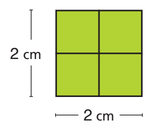
FÓRMULAS Y ÁREAS

>>> Para empezar

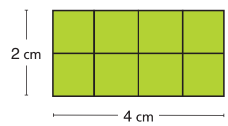
El **área** de una figura es la cantidad de unidades de superficie que caben en su interior.

Un ejemplo de unidad de superficie es un centímetro cuadrado, que es de este tamaño y se abrevia **cm²**.

Por ejemplo, el área de un rectángulo se obtiene multiplicando el largo por el ancho; en el caso del cuadrado, ambas medidas son iguales, por lo que se multiplica lado por lado.



Área = 4 cm^2

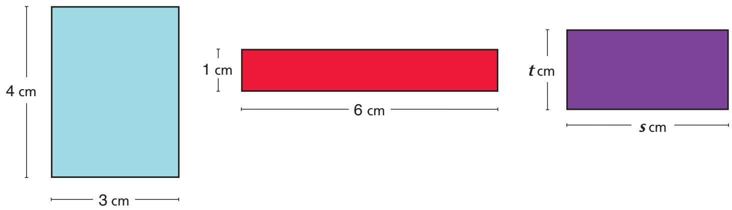


Área = 8 cm^2

56

>>> Consideremos lo siguiente

Observen los siguientes rectángulos



a) ¿Cuánto mide el área del rectángulo azul? ____________________

b) ¿Cuánto mide el área del rectángulo rojo? ____________________

c) ¿Cuánto mide el área del rectángulo morado? ____________________

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las encontraron.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla:

Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
2	1	
4	3	
5	2	
6	2	
6	5	
7	4	
8	3	
8	6	
9	7	
10	2	
10	3	

Comparen sus tablas y comenten cómo las completaron.

Posibles procedimientos. Para el primero y el segundo rectángulo se espera que los alumnos multipliquen el largo por el ancho, aunque también podrían cuadricular la superficie en unidades cuadradas y contarlas, como se muestra en el ejemplo del apartado *Para empezar*; en cambio, para el tercer cuadrado los alumnos tendrán que recurrir a una expresión algebraica, por ejemplo: $t \times s$, ts. Es posible que tengan dificultades para este último caso, o que se confundan con la regla para calcular el perímetro.

Sugerencia didáctica. Invite a los alumnos a que expliquen cómo obtuvieron sus resultados, sobre todo para el caso del tercer rectángulo. Aquí es particularmente interesante que identifiquen cuáles expresiones son equivalentes.

Propósito del interactivo. Deducir las expresiones algebraicas de fórmulas de áreas y perímetros.

Propósito de la actividad. Se espera que al completar la tabla los alumnos identifiquen –o constaten– que para obtener el área de cualquier rectángulo se multiplica el largo por el ancho.

Sugerencia didáctica. Dibuje la tabla en el pizarrón para que una vez que los alumnos la hayan completado, algunos de ellos pasen al pizarrón a escribir sus respuestas y puedan compararlas.

Respuesta. Las expresiones correctas son la tercera, la cuarta y la sexta.

3

Sugerencia didáctica. Anime a los alumnos a que argumenten por qué consideran que las expresiones que eligieron son las correctas, y por qué consideran que las otras no lo son. Una forma de verificar sus respuestas es calculando el área de las figuras que se sugieren utilizando las reglas elegidas; de esa misma forma pueden identificar qué expresiones son equivalentes.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que las expresiones ts y $t \times s$ también son equivalentes.

Respuesta. $b \times b$, y bb.

II. ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas sirven para calcular el área del rectángulo que mide de largo s y de ancho t? Subráyenlas.

- $s + t + s + t$.
- $s + t$.
- st.
- $s \times t$.
- $s \times s \times t \times t$.
- $t \times s$.

Comparen sus respuestas y usen las expresiones que escogieron para calcular:

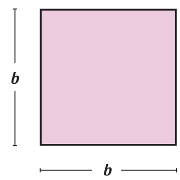
a) El área de un rectángulo que mide de largo **15** cm y de ancho **8** cm.

b) El área de un rectángulo que mide de largo **3** m y de ancho **2** m.

>>> A lo que llegamos

Las expresiones $s \times t$ y st son expresiones algebraicas para calcular el área de un rectángulo de largo s y ancho t. Por convención, $s \times t$ se escribe st.

III. La siguiente figura es un cuadrado cuyo lado mide b:



a) Subrayen las expresiones correctas para calcular el área del cuadrado anterior:

$4 \times b$	$4b$
$b + b$	$4 + b$
$b + b + b + b$	bb
$b \times b$	

b) Usando las expresiones que escogieron, llenen la siguiente tabla para calcular el área de algunos cuadrados.

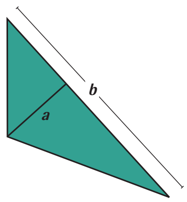
Anoten en el primer renglón las expresiones que encontraron.

Lado		
3 cm		
2.5 cm		
2 m		

Comparen sus expresiones.

>>> Lo que aprendimos

1. a) Escribe una expresión algebraica que permita calcular el área del siguiente triángulo:



Expresión: _______________

Recuerda que:

El área de un triángulo se calcula multiplicando la medida de la base por la medida de la altura y dividiendo el resultado entre dos.

b) Usa la expresión que escribiste para calcular el área de los triángulos con las siguientes medidas:

Base (cm)	Altura (cm)	Área (cm^2)
2	1	
4	3	
2	5	
6	2	

c) Compara la expresión algebraica que escribiste y tu tabla con uno de tus compañeros. Comenten si las expresiones que encontraron son equivalentes.

>>> Para saber más

Sobre el cálculo de áreas y perímetros de distintas figuras geométricas consulta:
http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Los_cuadrilateros/Cuadrilateros2.htm
[Fecha de consulta: 16 de junio 2006].
Proyecto Descartes, Ministerio de Educación y Ciencia. España.

59

Sugerencia didáctica. Copie la tabla en el pizarrón y pida a algunas parejas que escriban en ella sus resultados. En caso de que haya resultados diferentes, pida al grupo que revise las expresiones que se utilizaron y que identifique cuáles son.

Integrar al portafolios. Se espera que los alumnos logren expresar de *manera algebraica* el procedimiento para calcular el área de un triángulo. Si nota alguna dificultad, retome algunas de las expresiones correctas y otras incorrectas que hayan surgido de los mismos alumnos, y pídales que calculen el área de los triángulos que se sugieren en el inciso b). Posteriormente, analice junto con ellos qué expresiones son correctas y equivalentes, y cuáles no son correctas.
Respuesta: Puede haber varias expresiones correctas:
$\frac{ba}{2}, \frac{ab}{2}, \frac{b\times a}{2}$.

Propósito de la sesión. Explicitar que los puntos simétricos están a la misma distancia del eje de simetría y que el segmento que los une es perpendicular al eje de simetría.
Materiales. Escuadras, regla, transportador y compás para los alumnos; de ser posible, un juego de geometría grande para el maestro.
Organización del grupo. Aun cuando en la sesión hay momentos de trabajo individual, en equipos y de intercambio grupal, usted puede organizar equipos desde el inicio y mantenerlos durante para toda la sesión.

SECUENCIA 5

Simetría

En esta secuencia tendrás la oportunidad de construir figuras simétricas respecto a un eje, analizarlas y explicitar las propiedades que se conservan en figuras tales como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.

SESIÓN 1

COMO SI FUERA UN ESPEJO

>>> Para empezar

El Taj Mahal se encuentra en la India y por su diseño y belleza es considerado una maravilla de la arquitectura. ¿Ya observaste cómo se refleja en el agua?

Cuando el agua está tranquila refleja las imágenes de los objetos y seres como si fuera un espejo.

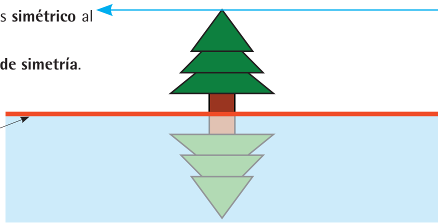
60

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Transformaciones.
Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos trabajaron con situaciones que ponen en juego la noción de simetría con respecto a un eje (simetría axial): aprendieron a identificar ejes de simetría y a distinguir figuras simétricas de las que no lo son; asimismo, trabajaron con la medición de ángulos, el trazo de rectas paralelas y perpendiculares y la medición de la distancia de un punto a una recta, aspectos vinculados a las propiedades de la simetría que se estudiarán en esta secuencia.

Propósitos de la secuencia
Construir figuras simétricas respecto a un eje, analizarlas y explicitar las propiedades que se conservan en figuras tales como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	*Como si fuera un espejo* Explicitar que los puntos simétricos están a la misma distancia del eje de simetría y que el segmento que los une es perpendicular al eje de simetría.	Interactivo
2	*Papel picado* Trazar figuras simétricas con respecto a un eje utilizando sus instrumentos geométricos.	Interactivo
3	*Los vitrales* Explicitar las propiedades que se conservan en figuras simétricas: igualdad de lados y ángulos, paralelismo y perpendicularidad de lados.	Video *Vitrales*
4	*Algo más sobre simetría* Practicar los conocimientos adquiridos al resolver diversos ejercicios.	

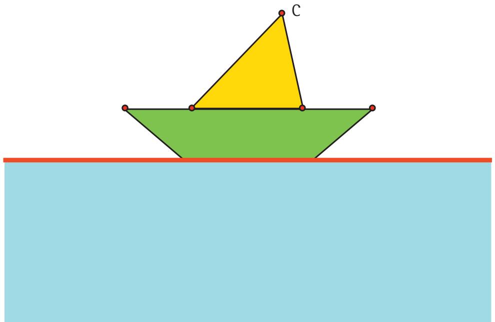
- En la figura de la derecha el reflejo es **simétrico** al árbol con respecto a la línea roja.
- Esa línea roja recibe el nombre de **eje de simetría**.



Eje de simetría

>>> Consideremos lo siguiente

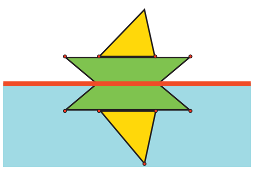
¿De qué manera podría trazarse el simétrico del barco con respecto a la línea roja? Planeen y lleven a cabo una manera para hacer el trazo con sus instrumentos geométricos.

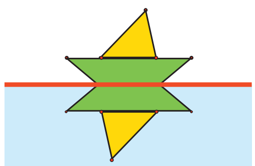


Comenten con otros equipos el procedimiento que emplearon para trazar el simétrico.

>>> Manos a la obra

I. En los siguientes dibujos el simétrico no está bien trazado. Corríjelos.





Para recordar. La simetría axial es una propiedad de las figuras: una figura es simétrica con respecto a un eje cuando se traza una recta que divide en dos a la figura, de manera que la recta sirve como espejo: lo que se ve de un lado está también del otro, pero con la orientación contraria. La simetría con respecto a un eje es uno de los movimientos rígidos en el plano, caracterizados porque no cambian el tamaño ni la forma.

Posibles procedimientos. Algo que podrían hacer de manera inmediata es calcar el barco y reproducirlo simétricamente en la parte azul; otros podrían medir, aunque es probable que tomen las medidas con respecto al eje de manera imprecisa, esto es, sin trazar perpendiculares y haciendo uso de la regla en lugar del compás —que es más preciso para trasladar medidas—. Puede suceder que en lugar de reflejar el barco lo trasladen, esto es, que tracen la figura sin cambiar su orientación. No los corrija en este momento, a lo largo de la sesión tendrán oportunidad de notar por sí mismos su error. Permita que resuelvan sin darles pistas, tampoco es necesario que resuelvan un problema similar antes de trabajar esta lección. Motívelos a que realmente discutan las posibles maneras de solucionarlo e invítelos a utilizar sus instrumentos geométricos.

Respuesta. El trazo correcto se muestra en la actividad II del apartado *Manos a la obra*.

Propósitos del interactivo. Que los alumnos desarrollen la idea de simetría de puntos de manera intuitiva y que descubran y utilicen las dos propiedades de los puntos simétricos.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos empiecen a notar que las figuras simétricas deben cumplir ciertas condiciones. En el primer caso el punto C y su simétrico no equidistan (no guardan la misma distancia) con el eje; en el segundo caso, a pesar de que el punto C y su simétrico sí equidistan del eje, si los unimos, el segmento no es perpendicular al eje de simetría.

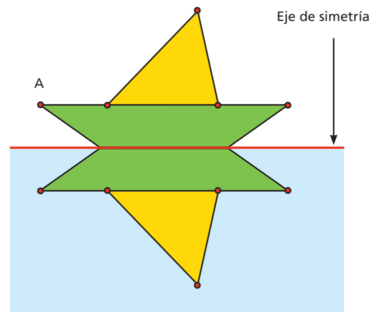
Posibles dificultades. Los alumnos aprendieron en la primaria a medir distancias de un punto a una recta (por ejemplo, las alturas de los triángulos), sin embargo es probable que cometan el error de medir la distancia utilizando otra recta en lugar de la perpendicular. Si nota que son varios los que tienen dificultades, usted puede mostrar al grupo la manera de hacerlo.

Respuestas. La medida para el inciso a) y la medida para el inciso b) deben ser las mismas. La medida del ángulo debe ser de 90°.

II. En el siguiente dibujo se ha trazado correctamente el simétrico del barco.

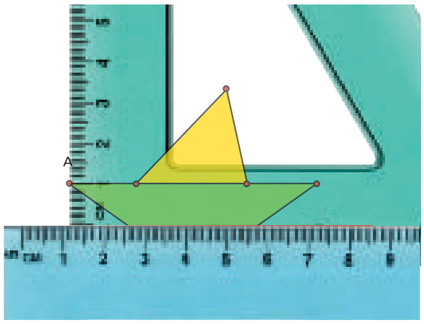
- Encuentra el punto que es el simétrico de **A**, nómbralo **A'** (se lee A prima)

Se dice que A es el simétrico de A', o bien, que A es el correspondiente simétrico de A'.



Recuerda que:
Las perpendiculares forman ángulos de 90°.
La distancia de un punto a una recta se mide por la perpendicular que va del punto a la recta.

- Usa tu regla para unir A con A', al hacerlo obtienes el **segmento AA'**.



a) ¿Cuánto mide la distancia del **punto A** al **eje de simetría**?

____

b) ¿Cuánto mide la distancia del **punto A'** al **eje de simetría**?

____

c) ¿Cuánto mide el ángulo que forman el **eje de simetría** y el **segmento AA'**?

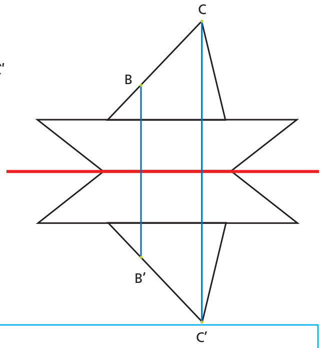
____

- La distancia del punto A y de A' al eje de simetría es la misma, es decir, el punto A y A' **equidistan** del eje.
- El eje de simetría y el segmento AA' son perpendiculares.

62

III. Verifica que para los puntos B y C y sus simétricos se cumplen también las dos condiciones enunciadas en el recuadro anterior.

- Anota en la figura las distancias de B, B′, C, C′ al eje y la medida de los ángulos que forman el segmento BB′ y CC′ con el eje.
- Elige otros dos puntos y sus simétricos y verifica que también se cumplen las condiciones mencionadas.

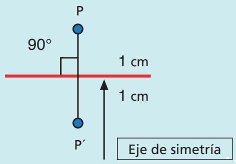


Esto que exploraste con algunas parejas de puntos simétricos pasa con cualquier pareja de puntos simétricos.

IV. Verifica en el problema inicial que los puntos rojos y sus simétricos también cumplen esas dos condiciones.

>>> A lo que llegamos

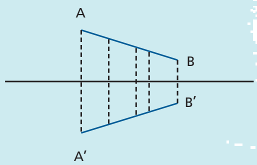
Un punto es simétrico a otro con respecto a una recta si y sólo si se cumple que ambos puntos equidistan de la recta y el segmento que los une es perpendicular a la recta.



El simétrico de un segmento con respecto a una recta es otro segmento.

Todos y cada uno de los puntos del segmento AB tienen su correspondiente simétrico en el segmento A′B′.

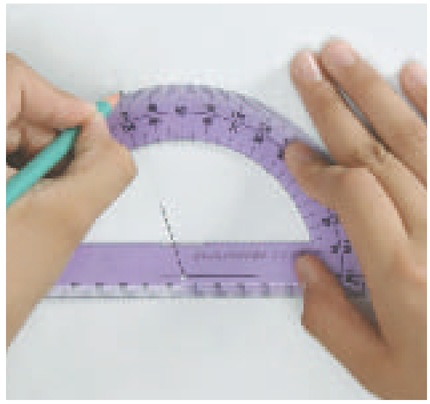
El segmento A′B′ es el correspondiente simétrico del segmento AB



Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, recuerde al grupo:

1) Cómo se usa el transportador para medir ángulos.
2) Que las rectas que forman ángulos de 90° se llaman perpendiculares.

Recuerde que. Para medir ángulos es necesario que el vértice del ángulo coincida con la marca del transportador:



Sugerencia didáctica. Cerciórese de que los alumnos realmente lleven a cabo esta actividad en el trazo del problema inicial.

2

Sugerencia didáctica. En las clases de matemáticas es sumamente importante establecer un concepto o un procedimiento; comente con el grupo la información del recuadro, si lo considera conveniente, pida que la copien en su cuaderno.

Sugerencia didáctica. Haga énfasis en que el primer párrafo del recuadro se refiere a un punto; en cambio, en el segundo párrafo se generaliza para todos los puntos de un segmento.

Propósito de la sesión. Trazar figuras simétricas con respecto a un eje utilizando sus instrumentos geométricos.

1

Organización del grupo. Forme equipos para resolver el problema inicial; el resto de la sesión puede trabajarse de manera individual.
Materiales. Juego de geometría.

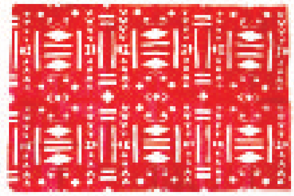
SECUENCIA 5

SESIÓN 2

PAPEL PICADO

>>> Para empezar

¿Te has fijado en las figuras que se forman cuando se hace papel picado?



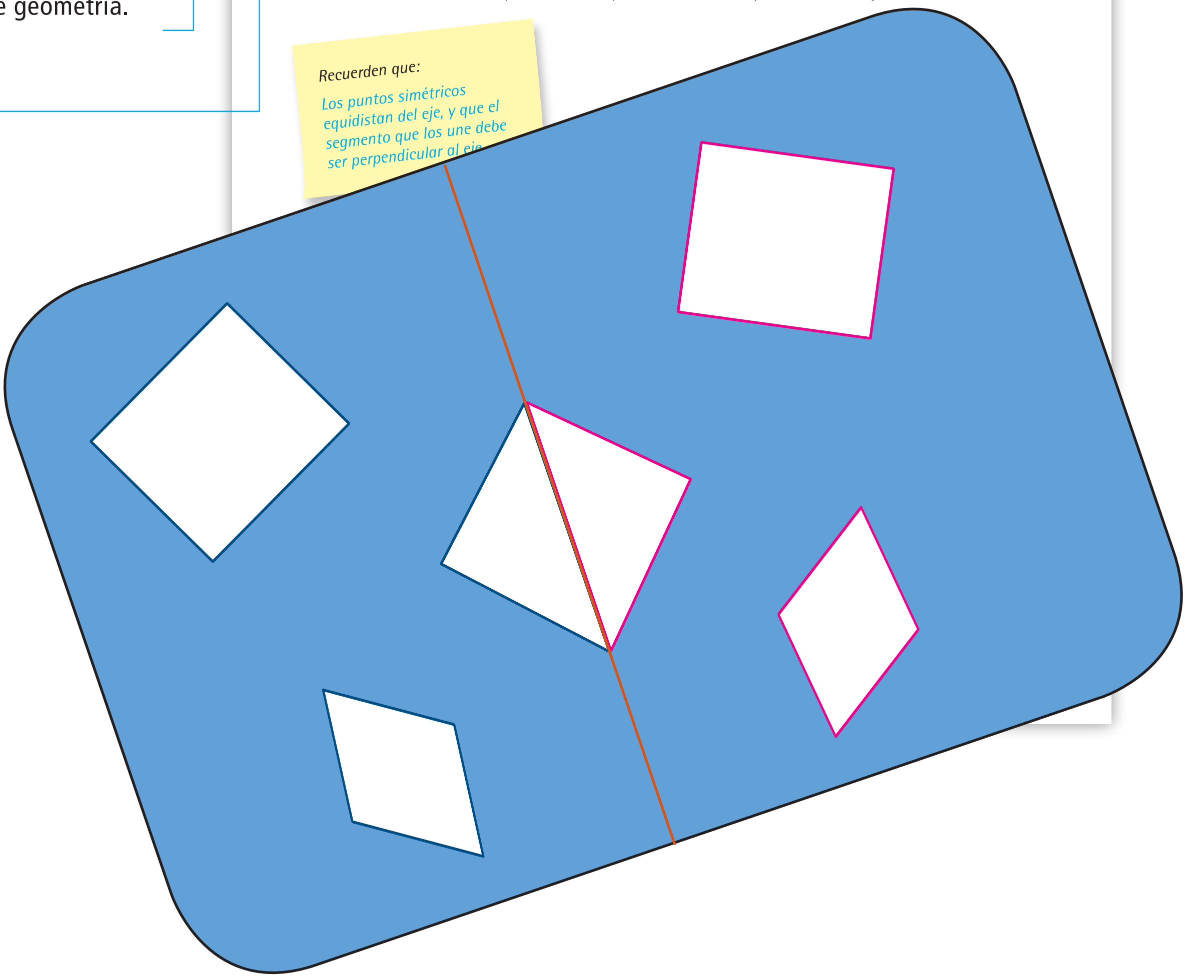
Muchos de los diseños de papel picado son composiciones de figuras simétricas con respecto a un eje.

>>> Consideremos lo siguiente

Planeen y lleven a cabo una estrategia para terminar el siguiente papel picado de tal manera que sea una composición simétrica respecto a la línea roja.

Recuerden que:

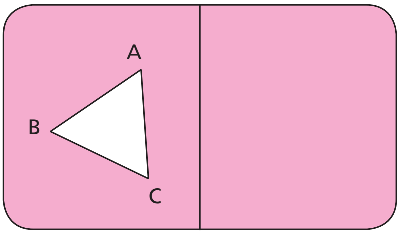
Los puntos simétricos equidistan del eje, y que el segmento que los une debe ser perpendicular al eje.



Posibles procedimientos: Se espera que los alumnos utilicen las propiedades de los puntos simétricos estudiadas en la lección anterior para trazar las figuras que faltan, por ello se introduce la información del recuadro recordándoles ambas propiedades. No obstante, es muy probable que los alumnos sigan empleando "el tanteo" como procedimiento para completar la composición simétrica; de ser así, no les diga directamente cómo trazar las figuras que faltan, invítelos en cambio a cerciorarse de que los puntos simétricos cumplan con lo enunciado en el recuadro.
Posibles errores. Como podrá observar, esta composición es más difícil que la del barco de la sesión anterior, debido a que el eje de simetría se presenta inclinado. Uno de los errores que los alumnos pueden cometer es ignorar la inclinación del eje y trazar la figura como si el eje fuera vertical, encontrando una figura simétrica pero con respecto a otro eje, no al indicado. Otro posible error es que trasladen la figura en lugar de reflejarla; es decir, que tracen la misma figura pero sin cambiar la orientación. Invite a los alumnos a que cada miembro del equipo dé ideas sobre cómo resolver el problema.

>>> Manos a la obra

I. Se quiere trazar el simétrico de este triángulo con respecto al eje



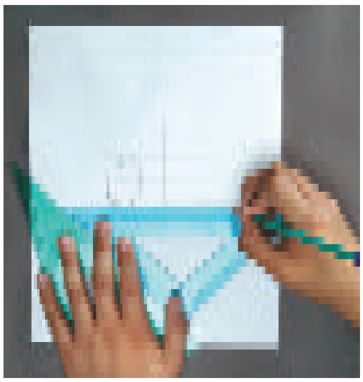
a) ¿Será necesario trazar el simétrico de todos y cada uno de los puntos del triángulo? ____________________

b) ¿Cuáles puntos hay que localizar para trazar el triángulo simétrico?

____

II. El siguiente es un procedimiento que puede emplearse para trazar figuras simétricas con respecto a un eje.

a) Se traza una perpendicular por cada vértice al eje de simetría. Para ello, primero se colocan las escuadras de manera similar al dibujo de la página 62, para trazar un segemento perpendicular el eje; después se prolonga este segmento hasta el otro lado del eje. Esto se hace en cada vértice.

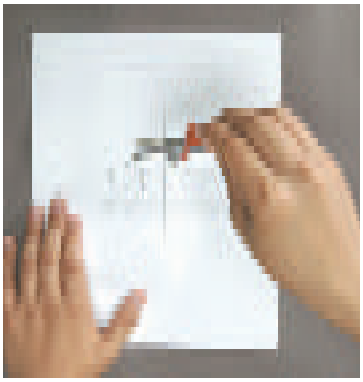


Propósito de la actividad. Hacer notar al alumno que existen puntos "clave" que permiten el trazo de figuras simétricas. En este caso, son suficientes los puntos A, B y C (los vértices) como guías para trazar el simétrico del triángulo; no es necesario trazar el simétrico de todos y cada uno de los puntos de los segmentos.

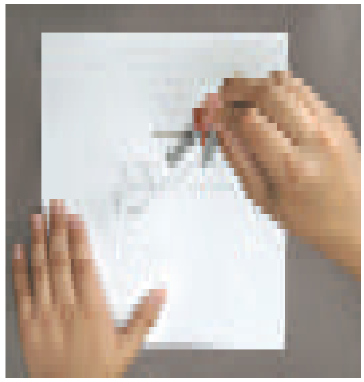
Sugerencia didáctica.
Es importante que los alumnos desarrollen la habilidad de interpretar instrucciones escritas para hacer trazos geométricos, pero esta habilidad se desarrolla gradualmente.

Proponga a los alumnos que en una hoja blanca o en su cuaderno sigan los pasos que se sugieren para trazar figuras simétricas con respecto a un eje. Pueden utilizar la misma figura de la ilustración (proponga usted las medidas) u otra.

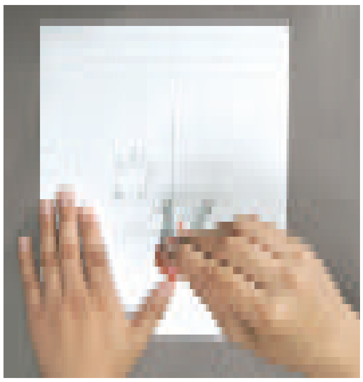
b) Con el compás se toma la medida de la distancia de un punto al eje (puede hacerse con la regla, pero con el compás es más preciso). Observa cómo.



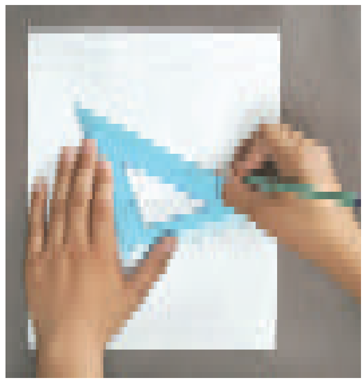
c) Con esa misma abertura se localiza el simétrico de ese punto.



d) Se repite lo indicado en b) y c) en cada vértice de la figura.

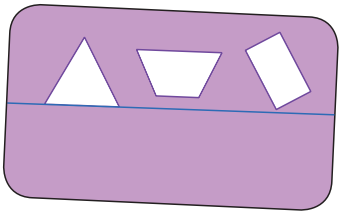


e) Se unen los vértices para obtener la figura buscada.



66

III. Utiliza el procedimiento descrito para completar el dibujo del siguiente papel picado, de tal manera que sea simétrico con respecto a la línea azul.



IV. En tu cuaderno traza un triángulo equilátero y una recta exterior al triángulo, después traza su simétrico con respecto a la recta. Haz lo mismo con un rombo.

>>> A lo que llegamos

Para construir un polígono simétrico a otro con respecto a una recta:

1. **Se traza una perpendicular a la recta por cada vértice de la figura.**
2. **Sobre la perpendicular que se trazó se toma la distancia de cada vértice a la recta y se traslada esa misma distancia del otro lado de la recta. Se puede utilizar la regla o el compás.**
3. **Se unen los vértices encontrados para formar el polígono.**

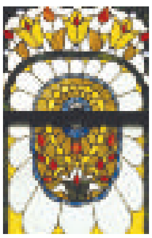
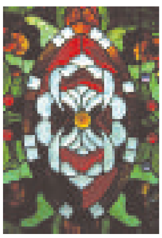
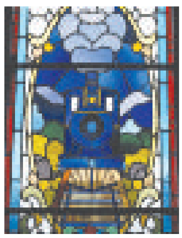
En pocas palabras: se traza el simétrico de cada vértice con respecto a la recta y se unen

SESIÓN

LOS VITRALES

>>> Para empezar

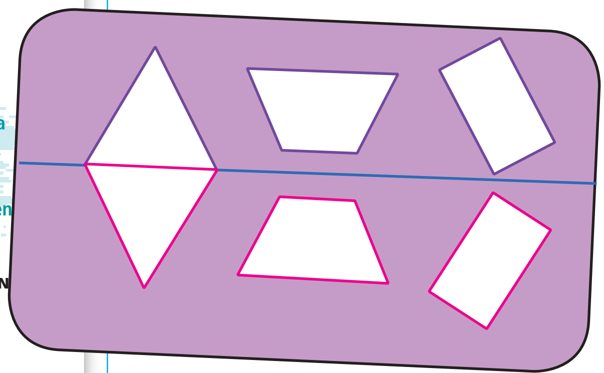
¿Conoces los vitrales? Son composiciones de vidrios de colores, su magia está en la luz que a lo largo del día dejan pasar. La simetría también está presente en algunos vitrales.

67

2

Sugerencia didáctica. Aun cuando los alumnos hayan seguido el procedimiento que se indica para resolver esta actividad, es conveniente que algunos de ellos pasen al pizarrón a mostrar cómo hicieron los trazos (pueden ser tres alumnos, uno para cada figura). Otra opción es que el grupo vaya leyendo las indicaciones mientras usted hace los trazos.



Integrar al portafolios. Además de revisar que en el trazo final efectivamente las figuras sean simétricas en función del eje que se trazó, mientras los alumnos resuelven cerciórese de que sigan el procedimiento propuesto. En caso de que muestren dificultades, repase junto con ellos el procedimiento para trazar figuras simétricas con respecto a un eje que se sugiere en la actividad II del apartado *Manos a la obra* de esta misma sesión.
Recuerde que es importante comentar con los alumnos la información matemática; una buena estrategia es que los alumnos lean y después comenten o escriban lo que entienden de esa información.

Propósitos del interactivo. Desarrollar de manera intuitiva la idea de simetría de figuras utilizando las propiedades de los puntos simétricos.

Propósito de la sesión. Explicitar las propiedades que se conservan en figuras simétricas: igualdad de lados y ángulos, paralelismo y perpendicularidad de lados.

Organización del grupo: Forme parejas para resolver el problema inicial; el resto de la sesión puede trabajarse de manera individual con momentos de intercambio entre todo el grupo.

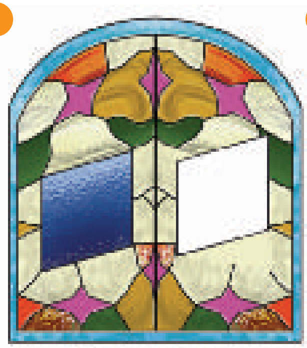
Materiales. Juego de geometría.

Sugerencia didáctica. Los alumnos saben, intuitivamente, que las figuras simétricas son del mismo tamaño. Se espera que usen esa idea para resolver este problema; no obstante, se han puesto figuras de tamaño muy similar para, de alguna manera, obligarlos a medir. Si nota que los alumnos contestan sin recurrir a la medición, puede plantearles la pregunta: "¿Cómo pueden asegurarse de que la figura elegida es la correcta?".
Respuesta. En el primer vitral ambos rombos son iguales, pero la orientación del segundo de ellos no corresponde al reflejo del otro. En el tercer vitral la medida de los ángulos es igual, pero no la medida de los lados. En el cuarto vitral lo que cambia es la medida de los ángulos. El único vitral correcto es el segundo.

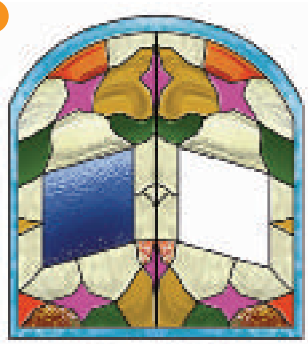
>>> Consideremos lo siguiente

Determinen y coloreen el rombo que ha sido bien trazado para que el vitral sea simétrico con respecto a la línea vertical.

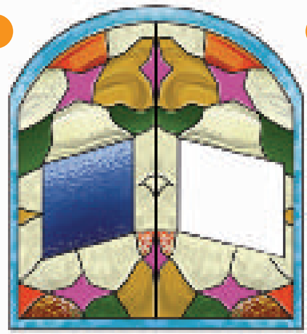
1



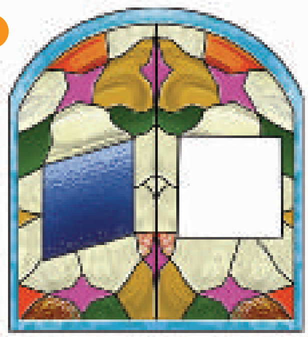
2



3



4



¿En qué se fijaron para elegir las figuras? ______________________

____

____

Comenten sus respuestas con sus compañeros del grupo, no olviden mencionar en qué se fijaron para elegir las figuras.

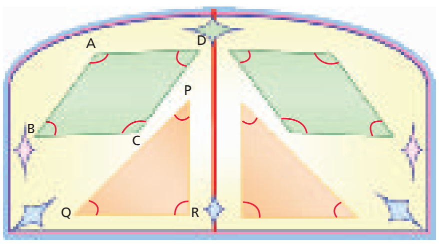
>>> Manos a la obra

I. Anota si estás o no de acuerdo con las siguientes afirmaciones; en cada caso explica por qué.

Afirmación	¿De acuerdo?	¿Por qué?
El vitral simétrico es el 3 porque los ángulos del rombo de la derecha son iguales a sus ángulos correspondientes del rombo azul.		
El vitral simétrico es el 4 porque los lados de la figura de la derecha miden lo mismo que sus correspondientes del rombo de la izquierda.		
El vitral simétrico es el 1 porque los dos rombos tienen sus lados y ángulos correspondientes iguales.		

II. El siguiente vitral es simétrico con respecto al eje rojo.

Nombra A' al simétrico de A, B' al simétrico de B y así sucesivamente. Mide lo que se requiere y completa las tablas.



Medida del segmento (cm)		Medida de su simétrico (cm)	
$\overline{AB}$		$\overline{A'B'}$	
$\overline{BC}$		$\overline{B'C'}$	
$\overline{CD}$		$\overline{C'D'}$	
$\overline{DA}$		$\overline{D'A'}$	
$\overline{PQ}$		$\overline{P'Q'}$	
$\overline{QR}$		$\overline{Q'R'}$	
$\overline{RP}$		$\overline{R'P'}$	

Medida del ángulo (grados)		Medida del ángulo (grados)	
$\angle A$		$\angle A'$	
$\angle B$		$\angle B'$	
$\angle C$		$\angle C'$	
$\angle D$		$\angle D'$	
$\angle P$		$\angle P'$	
$\angle Q$		$\angle Q'$	
$\angle R$		$\angle R'$	

a) ¿Cómo son entre sí la medida de un segmento y su simétrico?

b) ¿Cómo son entre sí la medida de un ángulo y su correspondiente?

Propósito de las actividades. Las actividades del apartado *Manos a la obra* pretenden, por una parte, que aquellos alumnos que no se fijaron en la medida de los lados y los ángulos se den cuenta de que es necesario considerar ambas medidas; y por otra parte, que además de la igualdad de la medida de ángulos y de lados, observen que la distancia de un punto al eje debe ser la misma que la de su simétrico, formando una recta perpendicular con respecto al eje.

Respuestas. La medida de cada uno de los segmentos debe ser igual a la medida de su simétrico. De la misma manera, la medida de cada uno de los ángulos interiores debe ser igual a la medida del ángulo del vértice que le corresponde en su simétrico.

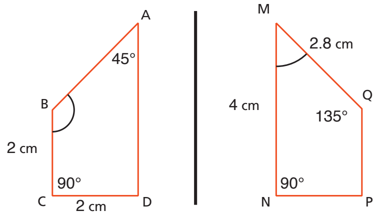
Sugerencia didáctica. Generalmente, los alumnos saben más de lo que expresan; sin embargo, es probable que ante este tipo de preguntas den respuestas muy limitadas o que no tienen que ver con el contenido matemático. No se preocupe, se espera que poco a poco los alumnos puedan hacer análisis más profundos y que incluyan argumentos matemáticos en sus respuestas.

Respuestas. La medida de cada segmento debe ser igual a la medida de su simétrico; de la misma manera, la medida de cada ángulo debe ser igual a la medida del ángulo que le corresponde en la figura simétrica.
Sugerencia didáctica. Si durante la confrontación del problema inicial no se propuso la medición de ángulos y de lados para verificar las respuestas, ésta es una buena oportunidad para que usted lo sugiera al grupo.

2

Sugerencia didáctica. Un aspecto relevante de la enseñanza de las matemáticas es que los alumnos se hagan competentes en la comunicación e interpretación de ideas, lo que implica que gradualmente se familiaricen con el lenguaje matemático; para ello será necesario que conozcan y utilicen simbología específica que les permita comunicar e interpretar ciertas ideas matemáticas.
En esta parte de la sesión, además de hacer notar que la simetría con respecto a un eje conserva el paralelismo y la perpendicularidad, se introduce la notación para estos dos conceptos.

III. Las siguientes son figuras simétricas con respecto al eje; **sin medir**, anota los datos que se piden. No olvides colocar las unidades de medida (cm y grados).



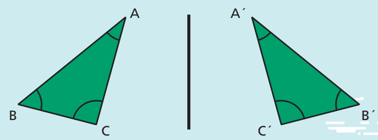
a) Lado AD = ______
b) Lado NP = ______
c) Lado PQ = ______
d) Ángulo M = ______
e) Ángulo B = ______

>>> A lo que llegamos

Una figura simétrica a otra con respecto a un eje conserva la medida de los lados y de los ángulos de la figura original.

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$
$\overline{AC} = \overline{A'C'}$
$\measuredangle A = \measuredangle A'$
$\measuredangle B = \measuredangle B'$
$\measuredangle C = \measuredangle C'$

$\measuredangle$ A se lee ángulo A



IV. Observa en el vitral de la actividad II que:

$\overline{AD}$ **es paralelo a** $\overline{BC}$, esto se simboliza $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.
$\overline{PR}$ **es perpendicular a** $\overline{QR}$, esto se simboliza $\overline{PR} \perp \overline{QR}$.

Recuerda que:
Las rectas paralelas son las que conservan siempre la misma distancia entre sí.

a) ¿Qué segmentos son paralelos en la figura del lado izquierdo? ______
b) ¿Sus simétricos también son paralelos? ______
c) ¿Qué segmentos son perpendiculares en la figura del lado izquierdo?
______
d) ¿Sus simétricos también son perpendiculares? ______

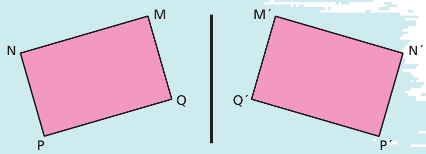
V. Considera las figuras de la actividad III. Anota el símbolo de paralelas (||) o el de perpendiculares (⊥).

Si $\overline{AD}$ ______ $\overline{CD}$ entonces $\overline{MN}$ ______ $\overline{NP}$.

Si $\overline{AD}$ ______ $\overline{BC}$ entonces $\overline{MN}$ ______ $\overline{QP}$.

>>> A lo que llegamos

Como en una simetría se conservan las medidas de los segmentos y de los ángulos, entonces, si hay lados paralelos o perpendiculares en la figura original sus simétricos también son paralelos o perpendiculares.



Si $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ entonces $\overline{M'N'} \parallel \overline{P'Q'}$.
Si $\overline{MN} \perp \overline{NP}$ entonces $\overline{M'N'} \perp \overline{N'P'}$.

Los vitrales

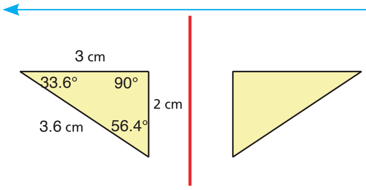
Como te has dado cuenta, la simetría permite dar belleza y armonía a diversas composiciones, como es el caso de los vitrales. Para construir un vitral simétrico es importante identificar las propiedades que se conservan en la simetría con respecto a un eje.

ALGO MÁS SOBRE SIMETRÍA

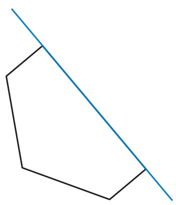
SESIÓN 4

>>> Lo que aprendimos

1. Estos dos triángulos son simétricos respecto al eje rojo; sin medir, escribe la medida de cada lado y de cada ángulo de la figura simétrica.

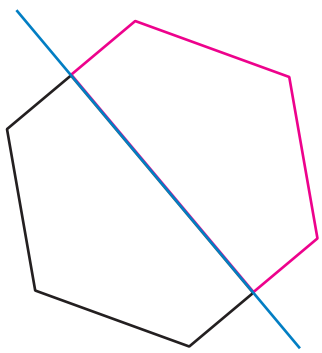


2. Completa la figura para que sea simétrica con respecto a la línea azul.



71

Integrar al portafolios. Observe si los alumnos logran identificar puntos y segmentos simétricos. Recuerde que en figuras poligonales es suficiente con localizar los puntos simétricos de los vértices y después unirlos mediante los segmentos adecuados.
Si los alumnos muestran dificultades para resolver el ejercicio, realice con ellos más ejercicios como los que se trabajan en el apartado *Manos a la obra* de la sesión 2.



Sugerencia didáctica. Al comentar esta información haga énfasis en que la conservación de paralelas y perpendiculares es consecuencia de que la simetría conserva medidas de ángulos y de longitudes.

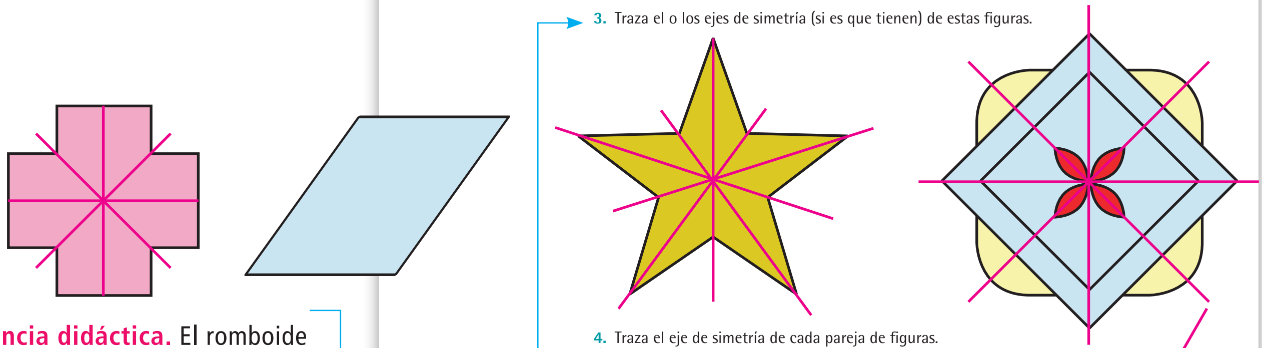
Propósito del video. Conocer la manera de trazar una figura simétrica con respecto a otra e identificar las propiedades que se conservan con la simetría axial.

Propósito de la sesión. Practicar los conocimientos adquiridos al resolver diversos ejercicios.
Organización del grupo. Es conveniente que los alumnos resuelvan estos ejercicios de manera individual; no obstante, procure que en algún momento (en la misma clase o en la clase siguiente) se abra un espacio para comparar procedimientos y resultados.

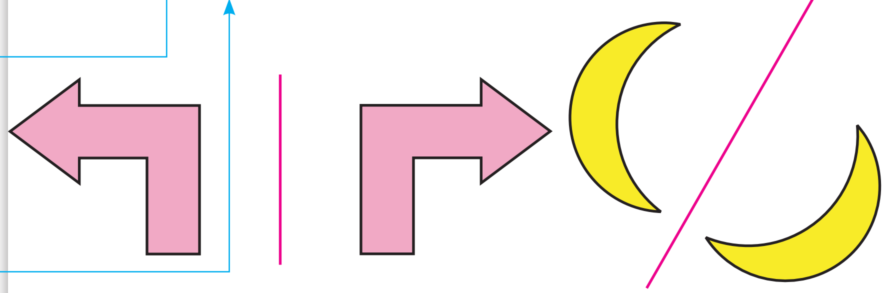
Integrar al portafolios. Con este ejercicio podrá obtener información respecto al conocimiento de los alumnos sobre el concepto de simetría, particularmente de la propiedad de preservación de las magnitudes.
Los alumnos deben concluir que las medidas en el triángulo simétrico se corresponden uno a uno con las del triángulo original.
Si nota alguna dificultad lean nuevamente la conclusión del último recuadro *A lo que llegamos* de la sesión 3 y realice con ellos más ejercicios como los que se proponen en las actividades II y III del apartado *Manos a la obra* de esa misma sesión.
Respuestas. La medida de cada segmento debe ser igual a la medida de su simétrico; de la misma manera, la medida de cada ángulo debe ser igual a la medida del ángulo que le corresponde en la figura simétrica.

SECUENCIA 5

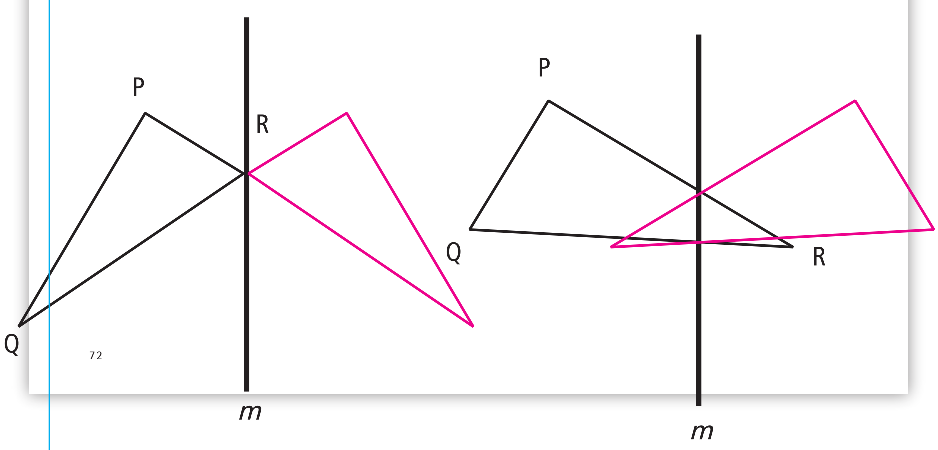
3. Traza el o los ejes de simetría (si es que tienen) de estas figuras.



4. Traza el eje de simetría de cada pareja de figuras.



5. Traza el simétrico del triángulo PQR con respecto a la recta *m*.



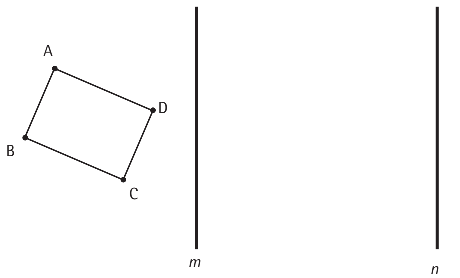
72

Sugerencia didáctica. El romboide es la única figura que no tiene eje de simetría, sin embargo, es posible que algunos alumnos consideren las diagonales como ejes. Si sucede eso, invítelos a verificar si se cumplen las propiedades que han estudiado.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos apliquen las propiedades estudiadas en la primera sesión de la secuencia y que usen implícitamente la idea de que el eje de simetría es mediatriz de los segmentos que unen puntos simétricos (la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio); aunque el tema de mediatriz corresponde al bloque 2, los alumnos pueden resolver el ejercicio con lo que han aprendido en estas lecciones.

Posibles dificultades. En el segundo caso el eje de simetría cruza a la figura, por lo que es probable que sea difícil para los alumnos resolverlo; si nota que hay muchas dificultades, puede sugerirles que consideren primero la parte de la figura que está a la izquierda del eje y luego la que está a la derecha.

6. Traza el simétrico del rectángulo ABCD con respecto a la recta *m*; obtendrás el rectángulo A'B'C'D'.



a) ¿Cuáles segmentos son paralelos en el rectángulo ABCD? ______________________

b) ¿Cuáles segmentos son paralelos en el rectángulo A'B'C'D'? ______________________

c) Anota dos parejas de lados perpendiculares: ______________________

d) ¿Sus simétricos también son perpendiculares? ______________________

7. En la figura del número 6, traza el simétrico del rectángulo A'B'C'D' con respecto a la recta *n*; obtendrás el rectángulo A''B''C''D'' (A'' se lee *A bi-prima*)

¿Puede decirse que el primer rectángulo y el rectángulo que acabas de trazar son simétricos? ________ ¿Por qué? ______________________

>>> Para saber más

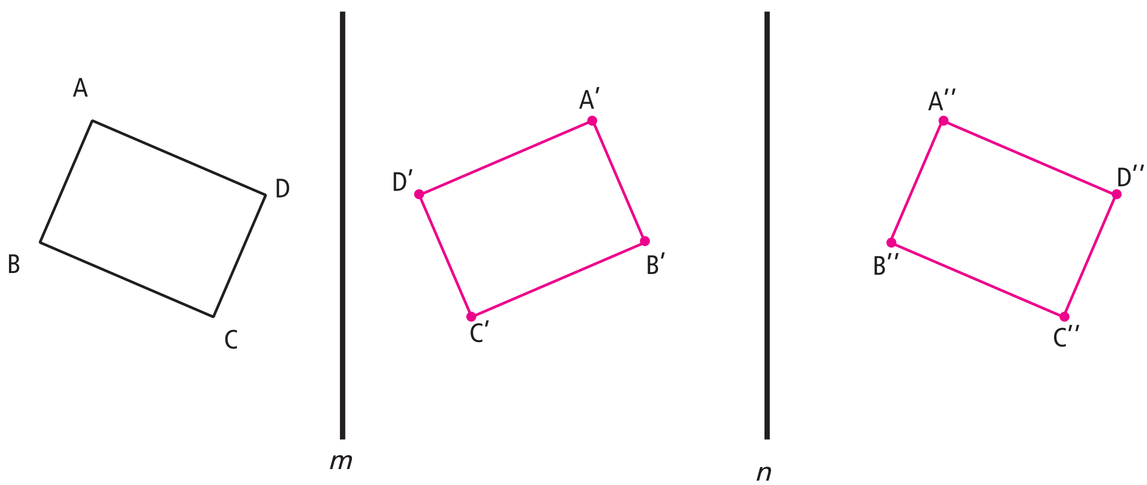
Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Lo mismo de un lado y de otro" en *Una ventana a las formas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre cómo se usa la simetría con respecto a un eje en el funcionamiento de un pantógrafo consulta: http://www.matematicas.net/paraiso/cabri.php?id=simaxi
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Sobre dibujos simétricos consulta: www.google.com.mx
[Fecha de consulta: 16 de junio 2006].
Ruta: Imágenes (escribir simetría y dar clic en búsqueda de imágenes para ver dibujos simétricos).

Propósito de la actividad. Preparar a los alumnos para un tema que estudiarán más adelante: la composición de dos simetrías con respecto a dos ejes paralelos. Se espera que los alumnos noten que el resultado es una figura idéntica a la primera, pero que no es su simétrica.



Propósito de la sesión. Caracterizar las situaciones en las que hay cantidades directamente proporcionales, resolver algunas de esas situaciones mediante el uso de tablas y utilizar la suma y la multiplicación de cantidades directamente proporcionales como estrategias de resolución.

Organización del grupo. Se sugiere trabajar toda la sesión en parejas y organizar intercambios grupales para comparar resultados y procedimientos.

Sugerencia didáctica. Antes de que los alumnos comiencen a resolver la primera actividad, dedique unos minutos para que en parejas la lean. Posteriormente puede preguntar al grupo: "¿De qué se trata el problema?" para ver si los alumnos lo han comprendido. Procure no adelantar resultados o estrategias de solución.

Posibles dificultades. El problema tiene cierta complejidad, por lo que es posible que no todos los alumnos respondan correctamente. Un posible error al tratar de obtener el costo de 500 ml de pintura verde claro es el de sumar el costo de 1 ℓ de pintura azul con el costo de 1 ℓ de pintura amarilla, sin considerar las cantidades que se indican para obtener la mezcla. Este error podrá ser corregido en el apartado *Manos a la obra*.

SECUENCIA 6

Proporcionalidad

En esta secuencia identificarás y resolverás situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante", utilizando de manera flexible diversos procedimientos.

SESIÓN 1

LAS CANTIDADES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

>>> Para empezar

En esta sesión estudiarás los costos de distintas mezclas de colores de pintura. A la gama de colores conocidos se les llama colores compuestos y se obtienen al mezclar los tres colores primarios: amarillo, azul y rojo.

El color verde, por ejemplo, se obtiene mezclando azul y amarillo. Las distintas tonalidades de verde, más claro o más oscuro, dependen de las cantidades de colores azul y amarillo que se mezclen.

>>> Consideremos lo siguiente

Manuel es pintor y quiere saber cuánto cuesta medio litro de pintura de aceite de color verde claro. Fue a una tienda de pinturas, pero como no tenían pintura verde claro, le ofrecieron los colores que puede mezclar para obtenerla.

La siguiente tabla muestra los colores que hay que mezclar para obtener la pintura verde claro que Manuel quiere:

Recuerden que:
1 000 mililitros (1 000 ml) equivalen a 1 litro (1 l)
1 l = 1 000 ml.

Pintura azul	Pintura amarilla	Color final de la mezcla: pintura verde claro
150 mililitros	350 mililitros	500 mililitros

74

Eje
Manejo de la información.

Tema
Análisis de la información.

Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos aprendieron a distinguir situaciones de proporcionalidad directa de las que no lo son y resolvieron problemas de variación proporcional mediante distintos procedimientos. Ahora analizarán esos recursos con mayor profundidad destacando las propiedades que caracterizan a las situaciones de proporcionalidad directa.

Propósitos de la secuencia
Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diferentes contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos	Vínculos
1	*Las cantidades directamente proporcionales* Caracterizar las situaciones en las que hay cantidades directamente proporcionales, resolver algunas de esas situaciones mediante el uso de tablas y utilizar la suma y la multiplicación de cantidades directamente proporcionales como estrategias de resolución.		
2	*Valor unitario* Utilizar el valor unitario en problemas de escalas y emplear fracciones unitarias para determinar valores faltantes en situaciones directamente proporcionales.	Video *Escalas y maquetas en arquitectura*	Geografía Secuencia 2
3	*Proporcionalidad en otros contextos* Aplicar el valor unitario en la solución de problemas que impliquen cantidades directamente proporcionales.	Interactivo	Ciencias Secuencia 9

El costo de la pintura varía dependiendo del color. La siguiente tabla muestra los costos de los colores primarios de la pintura de aceite:

Color de la pintura	Azul	Rojo	Amarillo
Precio por litro	$300	$500	$700

Comenten y contesten:

¿Cuál es el costo de 500 ml de pintura verde claro? ______

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. En un grupo de otra telesecundaria hicieron el siguiente procedimiento para calcular el costo de 500 mililitros de pintura verde claro:

1 litro de pintura azul $300

+

1 litro de pintura amarilla $700

=

2 litros de pintura verde claro $1 000

Y al final dijeron: "como dos litros de pintura verde claro cuestan 1 000 pesos, entonces dividimos todo entre cuatro y tenemos que 500 mililitros cuestan $250".

Comenten

¿Consideran correcto el procedimiento que encontraron en la otra telesecundaria?

Argumenten su respuesta.

II. Cuando Manuel fue a pagar le cobraron $290.

Comenten:

¿Le cobraron bien a Manuel en la tienda?

Respuestas. Una forma de resolver el problema es calculando el costo de la cantidad de pintura que se requiere de cada color.

1 ℓ de pintura azul cuesta $300; 100 ml cuestan $30; 50 ml cuestan $15.

Entonces 150 ml de pintura azul cuestan $45.

1 ℓ de pintura amarilla cuesta $700;

100 ml cuestan $70;

50 ml cuestan $35.

Entonces 350 ml de pintura amarilla cuestan $245.

En total, 500 ml de pintura verde cuestan $290.

Sugerencia didáctica. Puede registrar en el pizarrón las respuestas de cada una de las parejas y pedirles a aquellas que hayan obtenido resultados distintos (correctos o incorrectos) que expliquen cómo resolvieron el problema.

2

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos se tomen el tiempo suficiente para comentar este procedimiento.

Propósito de la pregunta. La intención es que los alumnos se percaten de que el procedimiento seguido en la otra telesecundaria es erróneo (porque para hacer 2 ℓ de pintura verde claro se utilizarían 600 ml de pintura azul y 1 400 ml de pintura amarilla), y que corrijan su respuesta en caso de haber tenido el mismo error.

Propósito de la actividad. Al completar estas tablas se pretende que los alumnos identifiquen que en las cantidades directamente proporcionales, el aumento o la disminución de una cantidad produce un aumento o disminución proporcional en la otra.

Para recordar. Una situación de proporcionalidad directa cumple con todas las siguientes propiedades:

1. *Cuando crece una de las magnitudes, crece la otra de manera proporcional.* Al aumentar la cantidad de pintura aumenta el costo de manera proporcional. Por ejemplo, si 1 000 ml de pintura azul cuestan 300 pesos, entonces 2 000 ml (que son el doble de 1 000 ml) deben costar 600 pesos (el doble de 300 pesos).
2. *A la suma de valores de una magnitud le corresponde la suma de valores de la otra magnitud.* Para la pintura azul: 100 ml + 50 ml = 150 ml; la suma de los costos correspondientes es igual al costo de 150 ml: \$30 + \$15 = \$45.
3. *A diferencias iguales en una magnitud, corresponden diferencias iguales en la otra magnitud.* 150 ml – 100 ml = 50 ml; la diferencia entre los costos correspondientes, es igual al costo de 50 ml: \$45 – \$30 = \$15.
4. *El cociente entre las cantidades de un mismo renglón es siempre el mismo.* 300 ÷ 1 000 = **0.3**; 45 ÷ 150 = **0.3**; 15 ÷ 50 = **0.3**.

Posibles procedimientos. Los alumnos podrían hacer una tabla como la siguiente:

Cantidad de pintura verde claro	Costo
500 ml	\$290
800 ml	\$464
120 ml	\$69.60
100 ml	\$58
1000 ml	\$580

III. Completen las siguientes tablas para calcular los costos de 150 ml de pintura azul y de 350 ml de pintura amarilla:

Cantidades de pintura azul	Costo de la pintura azul
1 000 ml	\$300
100 ml	
50 ml	
150 ml	

Cantidades de pintura amarilla	Costo de la pintura amarilla
1 000 ml	\$700
100 ml	
50 ml	
350 ml	

Ahora que ya saben el costo de la cantidad de pintura azul y de la cantidad de pintura amarilla que necesita Manuel para obtener el verde claro, completen lo siguiente:

Cantidad de pintura amarilla	350 ml
Costo de la pintura amarilla	_____ pesos

+

Cantidad de pintura azul	150 ml
Costo de la pintura azul	_____ pesos

=

Cantidad de pintura verde claro	500 ml
Costo de la pintura verde claro	_____ pesos

IV. Contesten las siguientes preguntas en sus cuadernos. Pueden usar tablas para hacer sus cálculos:

a) ¿Cuánto cuestan 800 ml de pintura verde claro?

b) ¿Cuánto cuestan 120 ml de pintura verde claro?

>>> A lo que llegamos

La cantidad de pintura amarilla y su costo son cantidades **directamente proporcionales**, pues al aumentar (al doble, al triple, etc...) o disminuir (a la mitad, a la tercera parte, etc...) la cantidad de pintura, su costo también aumenta (al doble, al triple, etc...) o disminuye (a la mitad, a la tercera parte, etc...).

Por ejemplo, si 100 ml de pintura amarilla cuestan \$70, entonces 200 ml cuestan \$140. Fíjate que la cantidad de pintura aumentó el doble, y por eso el costo también es el doble.

Lo mismo sucede con la pintura azul; la cantidad de pintura azul y su costo son **cantidades directamente proporcionales**.

Y ya hecha la mezcla, la cantidad de pintura verde claro y su costo también son **cantidades directamente proporcionales**.

76

Otra forma de resolver es:
Como 500 ml cuestan \$290, 1 ℓ cuesta lo doble: \$580; entonces 100 ml cuestan \$58 (\$580 ÷ 10). Se multiplica 58 × 8 para obtener el precio de 800 ml. El precio de 800 ml es \$464;

120 ml de verde claro cuestan \$69.60, porque como 100 ml cuestan \$58 y 10 ml cuestan \$5.80 pesos, entonces 20 ml cuestan \$11.60. Se suma \$58 + \$11.60 = \$69.60.

2

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que lean esta información y que después contesten en sus cuadernos: ¿Cuándo dos cantidades son directamente proporcionales?

V. Como no le alcanzaba el dinero, Manuel preguntó qué otro color con menor precio podía llevar. El vendedor le dijo que comprara verde oscuro, que era más barato porque lleva 300 ml de pintura azul y 200 ml de pintura amarilla. En sus cuadernos contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto cuestan 500 ml de pintura verde oscuro?

b) ¿Cuánto cuestan 800 ml de pintura verde oscuro?

c) ¿Cuánto cuestan 120 ml de pintura verde oscuro?

Sugerencia didáctica. Esta actividad puede quedar como un ejercicio para que los alumnos resuelvan en casa. En su oportunidad, cuando se revisen sus respuestas, usted puede proponer una tabla en el pizarrón para que ahí se concentren los resultados:

Cantidad de pintura verde oscuro:	Costo
500 ml	$230
800 ml	$368
120 ml	$55.20

>>> A lo que llegamos

Al sumar los costos de las cantidades de pintura amarilla y azul necesarias para obtener pintura verde (clara u oscura), se obtiene el costo de la pintura verde. Este costo resulta ser directamente proporcional a la cantidad de pintura verde.

EL VALOR UNITARIO

SESIÓN 2

Propósito de la sesión. Utilizar el valor unitario en problemas de escalas y emplear fracciones unitarias para determinar valores faltantes en situaciones directamente proporcionales.

Organización del grupo. Se sugiere trabajar toda la sesión en parejas y organizar intercambios grupales para comparar resultados y procedimientos.

>>> Para empezar

En la secuencia 2 **El mundo en que vivimos** de su libro de **Geografía** ya estudiaron algunos de los usos de las escalas. En esta sesión continuarán estudiando los usos de las escalas.

Escalas y maquetas en arquitectura

Propósito del video. Observar las propiedades que definen a las relaciones directamente proporcionales.

La maqueta de un edificio es una reproducción más pequeña que conserva sus proporciones. Es decir, si a cada centímetro de la maqueta le corresponden 100 cm en el edificio, se dice que la escala de la maqueta es **1** a **100**, lo que significa "un centímetro en la maqueta son 100 cm en el edificio". En ese caso, todas las dimensiones de la maqueta son 100 veces menores a las del edificio: la medida de la altura es 100 veces más chica, la de la base es 100 veces más chica, la del ancho de las ventanas es 100 veces más chica.

Recuerden que:

100 centímetros (100 cm) equivalen a 1 metro (1 m).

Nueva Biblioteca Pública de México Vasconcelos, México, D.F.

Posibles procedimientos. Los alumnos pueden obtener el doble, el triple o la mitad de una medida para obtener otra medida. Por ejemplo, pueden ver que el ancho del pasillo es la mitad del ancho de la habitación principal; por lo tanto, las medidas reales correspondientes deben tener la misma relación:

2.5	400
1.25	200

De la misma manera, pueden ver que el ancho total de la construcción es tres veces el ancho de la habitación principal; por lo tanto, las medidas que les corresponden mantienen esa misma relación:

2.5	400
7.5	1 200

Permita que los alumnos exploren las maneras de llenar la tabla. Si cometen equivocaciones, más tarde tendrán oportunidad de corregirlas.

Respuestas. Obtener el largo del terreno es más difícil, pues se requiere calcular cuánto equivale un centímetro en el plano, en la medida real; es decir, se necesita hallar el valor unitario: 1 cm en el plano = 160 cm en la medida real. Si conocen el valor unitario pueden utilizarlo para obtener el largo del terreno multiplicando 11 por 160.

>>> Consideremos lo siguiente

La figura 1 es el plano de una casa dibujado a una escala de **2.5** cm a **4** m (es decir, dos centímetros y medio del dibujo representan cuatro metros de la medida real de la casa).

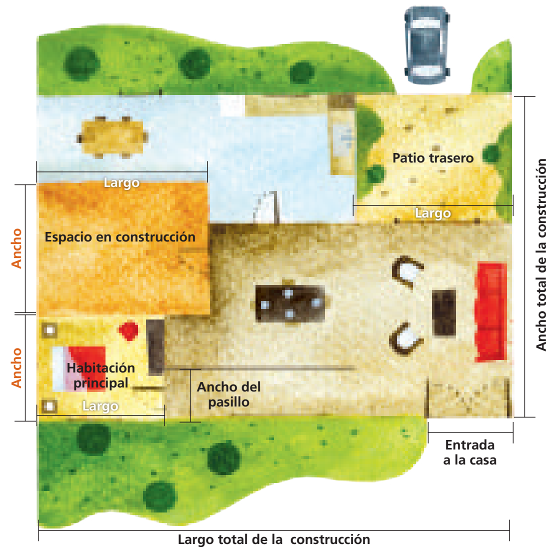


Figura 1

Completen la siguiente tabla para encontrar las medidas reales que tendrá la casa.

	Medida del plano (cm)	Medida real (cm)
Ancho de la habitación principal	2.5	400
Ancho del pasillo	1.25	200
Ancho total de la construcción	7.5	1 200
Largo del patio trasero	3.75	600
Largo del terreno	11	1 760
Largo del espacio en construcción	4	640

78

>>> Manos a la obra

I. Comparen sus resultados y comenten:

a) ¿Cómo calcularon las medidas reales de la casa?

b) ¿Cómo calcularon el largo del terreno?

c) ¿Cuántas veces más grande es la medida real del largo del terreno que la medida del largo del terreno en la figura 1?

>>> A lo que llegamos

Una estrategia útil para encontrar datos faltantes en relaciones de proporcionalidad es determinar el valor unitario, es decir, hallar el dato equivalente a 1. Por ejemplo, en el problema del plano se sabe que 1 cm del dibujo equivale a 160 cm del tamaño real de la casa. En este problema, 160 cm es el valor unitario que permite pasar de cualquier medida en el dibujo a su medida real.

Usando el valor unitario verifiquen la tabla de la página anterior.

II. En la secuencia 9 **Cómo medir seres pequeñitos** de su libro de **Ciencias I** han estudiado algunos de los descubrimientos hechos con el uso de los microscopios.

Los microscopios se usan para poder observar cosas muy pequeñas, como células de plantas y animales, ya que amplifican las imágenes hasta hacerlas visibles. Hay microscopios que agrandan las imágenes 100 veces, 500 veces, 1 000 veces y ¡hasta 1 000 000 de veces!

Algunos microscopios permiten observar algunos de los microorganismos más pequeños que existen: los virus, que miden alrededor de 0.1 micrómetros.

El micrómetro es una unidad de longitud muy pequeña.

Micra es la abreviatura de micrómetro.

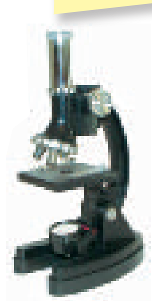
1 micra equivale a $\frac{1}{1000}$ de mm o a $\frac{1}{1000000}$ de m.

Resuelvan el siguiente problema:

Un microscopio amplifica la imagen de un virus de 0.2 micrómetros a 120 micrómetros.

a) ¿De qué tamaño se vería con ese microscopio la imagen de un virus de 0.4 micrómetros? ____________

b) ¿De qué tamaño se vería con ese microscopio la imagen de un virus de 1 micrómetro? ____________



Posibles dificultades. Probablemente algunos alumnos contesten que la medida real es 1.6 veces más grande que la del dibujo (porque 4 ÷ 2.5 = 1.6), pero no es así porque deben considerarse las unidades empleadas, mientras que en el dibujo son centímetros, en la medida real son metros. Por lo tanto, las medidas reales son 160 veces más grandes que el dibujo (400 ÷ 2.5 = 160).
Comente con los alumnos este punto antes de pasar a lo siguiente.

2

Sugerencia didáctica. Ésta es una oportunidad para que el procedimiento del valor unitario se haga explícito. Es conveniente que comenten en grupo esta información y que pongan otros ejemplos.

Respuestas. 1 micra del tamaño real equivale a 600 micras en el microscopio. Ese es el valor unitario.

a) 240 micras (0.4 × 600).

b) 600 micras (1 × 600).

Sugerencia didáctica. En este momento corrijan los errores que pudieran existir en la tabla, y si lo considera necesario resuélvanla entre todos en el pizarrón y explique cómo pueden calcularse los datos utilizando el valor unitario o fijándose en las relaciones de la tabla (por ejemplo, calculando el doble, el triple o la mitad de una medida para obtener otra medida).

Respuestas.
a) 1 micra se amplifica a 600 micras. Si los alumnos no la obtuvieron en el inciso anterior es importante dedicarle tiempo para discutirlo.
b) Es 600 veces más chico.

2

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban en su cuaderno qué es valor unitario y cómo puede usarse en situaciones de proporcionalidad directa.

Propósito de la sesión. Aplicar el valor unitario en la solución de problemas que impliquen cantidades directamente proporcionales.
Organización del grupo. A lo largo de la sesión los alumnos trabajan individualmente, en parejas y en equipos de tres.

Respuestas. Pagó $7 porque cada caramelo cuesta $0.50. El costo de un caramelo es el valor unitario.

Completen la siguiente tabla para calcular los tamaños reales de otros microorganismos.

Tamaño real (micrómetros)	Tamaño en el microscopio (micrómetros)
0.2	120
3	800
4.5	2 700
7	4 200
8	4 800

III. Comparen los resultados de sus tablas y comenten:

a) ¿Cuál es el **valor unitario** que permite pasar del tamaño real al tamaño que se ve en el microscopio? ______

b) ¿Cuántas veces más chico es el tamaño real de una célula que el tamaño de la célula vista en este microscopio? ______

>>> A lo que llegamos

La estrategia del **valor unitario** en una situación de cantidades directamente proporcionales es muy útil, ya que basta saber el valor que le corresponde a la unidad para determinar cualquier valor requerido.
Este dato es suficiente para encontrar los valores de las medidas observadas con el microscopio a partir de sus medidas reales.
Por ejemplo, se sabe que el microscopio aumenta 1 micrómetro de tamaño a 600 micrómetros de tamaño. Para encontrar la ampliación de una célula de 4.5 micrómetros de tamaño en el microscopio, basta multiplicar 4.5 micrómetros × 600.

SESIÓN 3

LA PROPORCIONALIDAD EN OTROS CONTEXTOS

>>> Lo que aprendimos

1. Una bolsa con 50 caramelos cuesta $25.00; Juan compró 14 caramelos, ¿cuánto pagó? ______

Propósito del interactivo. Resolver problemas que involucran cantidades directamente proporcionales utilizando la estrategia de valor unitario.

Completa la siguiente tabla para encontrar la cantidad de dinero que pagó Juan por los 14 caramelos que compró:

Número de caramelos	Precio de los caramelos (pesos)
50	25
10	5
5	2.50
1	0.50
14	7

El número de caramelos y su precio son cantidades directamente proporcionales. ¿Cuál es el valor unitario que permite encontrar el precio a partir del número de caramelos?

2. Las compañías fabricantes de automóviles hacen pruebas de velocidad a sus autos para verificar sus motores, frenos y sistemas de suspensión. Entre otras cosas, deben verificar que las velocidades a las que pueden viajar se mantengan constantes durante recorridos largos. En esta actividad vas a calcular algunos recorridos a partir de las velocidades de los automóviles.

a) Viajando en carretera, un automóvil va a 120 kilómetros por hora en promedio. Completa la siguiente tabla para encontrar las distancias recorridas en distintos tiempos de viaje.

Tiempo de viaje (horas)	Kilómetros recorridos
1	120
2	240
$3\frac{1}{2}$	420
$4\frac{1}{5}$	504
$5\frac{1}{3}$	640
6	720

En la sesión 1 de esta secuencia puedes revisar cuándo dos cantidades son directamente proporcionales.

b) A continuación hay dos tablas que corresponden a los resultados de las pruebas de velocidad de dos autos distintos. Uno de ellos fue siempre a la misma velocidad, el otro no.

Sugerencia didáctica. En este caso, los alumnos no requieren obtener el valor unitario (ese dato ya se les da en la tabla), pero sí podrían tener dificultades al trabajar con fracciones y con números decimales.
Puede sugerirles que escriban el 4.2 como fracción ($4\frac{2}{10}$ o $4\frac{1}{5}$) para que todos sean fraccionarios. Entonces tendrían que multiplicar cada fracción por 120.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos reconozcan una situación de variación proporcional directa (automóvil 1) comparándola con otra en la que la variación no es proporcional (automóvil 2). Estas actividades son importantes y puede ser de utilidad que ponga otros ejemplos.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos que resuelvan y copien en una hoja aparte esta actividad. Utilícela para ver qué estrategia de resolución emplean y si logran determinar la respuesta correcta. Si tienen dificultades ponga más ejercicios, como el de los caramelos que aparece en esta sesión.

Respuestas. El automóvil 1, por cada hora de viaje recorre 80 km (valor unitario) y se verifica en todos los datos de la tabla, es decir, fue siempre a la misma velocidad.

El automóvil 2, por cada hora de viaje recorre 50 km (valor unitario), pero en el último renglón las cantidades ya no son proporcionales, porque $12 \times 50 = 600$.

Respuestas.

a) La rana roja, porque sus saltos son más largos, cada salto avanza 3 rayitas.

b) La rana ganadora dio 7 saltos, a los 6 saltos lleva 18 rayitas, al séptimo salto ya rebasó la meta.

c) Rana verde: en 1 salto avanza 2 rayitas.
Rana roja: en 1 salto avanza 3 rayitas.
Rana azul: en 1 salto avanza 0.5 rayitas.

AUTOMÓVIL 1

Tiempo de viaje (horas)	Kilómetros recorridos
2.5	200
4	320
6.75	540
8	640
9.25	740

AUTOMÓVIL 2

Tiempo de viaje (horas)	Kilómetros recorridos
1.5	75
3	150
4.5	225
9	450
12	610

a) ¿En cuál de las dos tablas el número de kilómetros es directamente proporcional al tiempo de viaje? ____________

b) ¿Cuál de los dos automóviles fue siempre a la misma velocidad? ____________

>>> A lo que llegamos

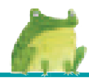
Cuando un automóvil va siempre a la misma velocidad (velocidad constante), entonces la distancia recorrida por el automóvil y el tiempo que tarda en recorrerla son cantidades directamente proporcionales.

3. La competencia de las ranas.

Tres ranas compitieron en una carrera de saltos. Una rana es verde, otra roja y otra azul.

Las ranas saltaron en una pista de 20 m de longitud, los saltos que dio cada rana fueron siempre iguales.

Las siguientes tablas indican algunos de los lugares donde cayeron las ranas al saltar:



RANA VERDE

Número de saltos	Distancia (rayitas)
2	4
4	8

RANA ROJA

Número de saltos	Distancia (rayitas)
1	3
2	6

RANA AZUL

Número de saltos	Distancia (rayitas)
6	3
10	5

Comenten:

a) ¿Cual de las tres ranas ganó la competencia? ____________

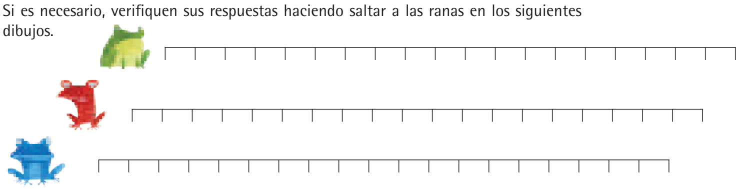
b) ¿Cuántos saltos dio la rana que ganó la competencia? ____________

c) ¿Cuál fue la longitud del salto de cada rana? Anótenlo en las siguientes líneas:

82

Rana verde ____________ Rana roja ____________ Rana azul ____________

Si es necesario, verifiquen sus respuestas haciendo saltar a las ranas en los siguientes dibujos.



4. La luz solar tarda aproximadamente 8 minutos en llegar a la Tierra. Esto se debe a que la Tierra está a 150 millones de kilómetros del Sol.

No olvides que la luz viaja siempre a la misma velocidad, es decir, cada 8 minutos recorre 150 millones de kilómetros.

Completa la siguiente tabla:

Planeta	Distancia al Sol (millones de kilómetros)	Tiempo que tarda en llegar la luz (minutos)
Marte	6 000 (320 × 18.75)	12
Mercurio	60	3.2 (60 ÷ 18.75)
Venus	108	5.76 (108 ÷ 18.75)
Tierra	150	8
Saturno	1 425	76 (1 425 ÷ 18.75)
Neptuno	4 500	240 (4 500 ÷ 18.75)

>>> A lo que llegamos

La distancia que recorre la luz y el tiempo que tarda en hacerlo son cantidades directamente proporcionales.

>>> Para saber más

Sobre el Sistema Solar consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
"El Sistema Solar", en *Gran atlas visual del Cosmos, la Tierra y México*. México: SEP/Ediciones Euroméxico, Libros del Rincón, 1999.

Sobre los colores primarios y sus mezclas consulta:
http://www.xtec.es/~aromero8/acuarelas/color.htm
http://www.xtec.es/~aromero8/acuarelas/index.htm
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Sobre los planetas, el Sol y la velocidad de la luz consulta:
http://www.xtec.es/~rmolins1/solar/es/planetes.htm
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Sugerencia didáctica. Lo más importante en estas actividades es que los alumnos trabajen con situaciones de proporcionalidad directa. Puede decirles que utilicen la calculadora para que no se detengan mucho en hacer las operaciones con punto decimal.

Respuestas. Una forma económica de resolver este problema es calcular cuántos kilómetros recorre la luz del Sol en un minuto, es decir, el valor unitario. En un minuto la luz recorre 18.75 millones de kilómetros, por lo tanto, para hallar cuánto tiempo tarda en llegar la luz a Mercurio, por ejemplo, hay que encontrar un número que multiplicado por 18.75 dé 60, es decir, ____ × 18.75 = 60, que puede resolverse así: 60 ÷ 18.75 = _____

El cálculo de la distancia a la que se encuentra Marte puede hallarse multiplicando el tiempo que la luz tarda en llegar por el valor unitario, 12 × 18.75 = ______ o bien, fijarse en los datos de la tabla. Si en 8 minutos la luz recorre 150 millones de kilómetros en 4 recorre la mitad (75). Entonces en 12 minutos recorrerá una distancia tres veces mayor que la que recorre en 4 minutos, quedaría 75 × 3 = 225.

Propósito de la sesión. Solucionar problemas sencillos de reparto proporcional mediante diversos procedimientos y utilizando tablas de cantidades directamente proporcionales.
Organización del grupo. En la sesión hay trabajo individual, en parejas y momentos de intercambio grupal.

Sugerencia didáctica. El problema no es tan sencillo, es conveniente dejar que los alumnos intenten resolverlo aunque no lo consigan. Más adelante se les proporcionarán elementos para que puedan hacerlo.
Respuestas. Deben tocarles, respectivamente, \$150, \$300 y \$600.

SECUENCIA 7

Reparto proporcional

En esta secuencia elaborarás y utilizarás procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.

SESIÓN 1

LA KERMÉS

>>> Para empezar

La kermés es una verbena popular tradicional en nuestro país. Casi siempre se lleva a cabo en el atrio de una iglesia o en el patio de una escuela. Es muy divertida porque puedes disfrutar de juegos y platillos típicos de la cocina mexicana.

>>> Consideremos lo siguiente

En una escuela se llevó a cabo una kermés. Entre tres amigos pusieron un puesto de enchiladas y juntaron sus ahorros para comprar los ingredientes. El primero puso \$25, el segundo \$50 y el tercero \$100.

Al final del día obtuvieron una ganancia de \$1 050 por la venta y decidieron repartirlo de manera proporcional a lo que aportó cada quién para comprar los ingredientes.

84

Eje
Manejo de la información.
Tema
Análisis de la información.
Antecedentes
En la secuencia anterior los alumnos identificaron y resolvieron situaciones de proporcionalidad en diversos contextos. En esta secuencia los alumnos emplearán distintos procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional mediante ejercicios como: un grupo de personas aporta una cantidad inicial (por ejemplo, dinero que se invierte para un negocio), la ganancia obtenida habrá que repartirla proporcionalmente de acuerdo con lo que cada persona aportó.

Propósitos de la secuencia
Elaborar y utilizar procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	*La kermés* Solucionar problemas sencillos de reparto proporcional mediante diversos procedimientos y utilizando tablas de cantidades directamente proporcionales.	Video *Reparto proporcional* Interactivo
2	*Más sobre reparto proporcional* Solucionar problemas de reparto proporcional mediante el uso del valor unitario.	

Respondan las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto le debe tocar al primer amigo? ___

b) ¿Cuánto le debe tocar al segundo amigo? ___

c) ¿Cuánto le debe tocar al tercer amigo? ___

>>> Manos a la obra

I. El primer amigo propuso dividir la ganancia total ($1 050) entre 3, de modo que a cada uno le tocarían $350.

El tercer amigo no está de acuerdo con la forma de repartir el dinero propuesta por el primer amigo.

Comenten:

a) ¿Por qué creen que el tercer amigo está en desacuerdo?

b) El tercer amigo puso cuatro veces la cantidad de dinero que puso el primero. Del dinero que van a repartir, ¿cuántas veces más le debe tocar al tercer amigo respecto del primero? ___

c) El segundo amigo puso el doble de dinero que el primero. Del dinero que van a repartir, ¿cuántas veces más le debe tocar al segundo amigo respecto del primero?

___

II. Contesten:

¿Cuánto dinero juntaron entre todos? ___

Completen la siguiente tabla para encontrar cuánto dinero le toca a cada uno de los amigos:

	Cantidad de dinero invertido (pesos)	Dinero obtenido en la venta (pesos)
Total	175	1 050
Primer amigo	25	
Segundo amigo	50	
Tercer amigo	100	

85

Propósito del interactivo. Resolver problemas de reparto proporcional.

1

2

Sugerencia didáctica. Es interesante que los alumnos hagan comentarios sobre la situación para ir comprendiendo lo que quiere decir "hacer un reparto proporcional".

Respuestas.

a) Al tercer amigo no le parece bien repartirlo así porque él puso más dinero que los otros dos.
b) Cuatro veces más.
c) Dos veces más.

Posibles procedimientos. Algunos alumnos pueden intentar completar la tabla hallando el valor unitario. Por cada peso invertido se obtuvieron 6, por lo tanto, 6 es el valor unitario. Si el primer amigo invirtió $25, su ganancia debe ser 25 × 6.

Otra forma de resolverlo es fijándose en las relaciones de la tabla. Al invertir $175 se obtuvieron $1 050, y $175 entre 7 es igual a $25, por lo tanto la ganancia del primer amigo puede hallarse dividiendo 1 050 entre 7. El segundo amigo invirtió el doble que el primero, así que su ganancia deberá ser el doble.

Respuesta. El valor unitario en este caso es 120 porque cada hectárea se pagó a $120.

Sugerencia didáctica. Si ya no tiene tiempo, puede dejar esta actividad como tarea y al siguiente día pedirles que en pequeños equipos comenten mediante qué procedimiento lo resolvieron y qué resultados obtuvieron.

Posibles procedimientos.

1. Puede obtenerse el valor unitario (cada m^2 se pagó a $20) y multiplicar lo que cada albañil levantó por 20.
2. También se pueden fijar en que el que levantó 15 m^2 debe recibir la mitad del pago, el que levantó 10 m^2 la tercera parte del pago y el resto es para el que levantó 5 m^2.

Respuestas. El que levantó 15 m^2 debe recibir $300; el que levantó 10 m^2 $200; y el que levantó 5 m^2, $100.

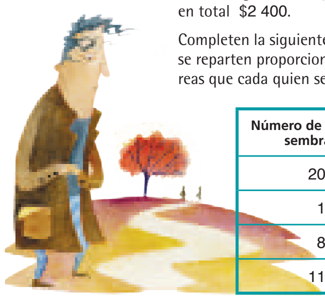
Propósito del video. Determinar si un problema es o no de reparto proporcional y la parte que corresponde a cada uno de los involucrados.

>>> A lo que llegamos

Una forma de resolver los problemas de reparto proporcional consiste en determinar la cantidad total y las partes en las que se va a llevar a cabo dicho reparto. Por ejemplo, en el problema de la kermés, la cantidad a repartirse es el dinero total recaudado y se reparte proporcionalmente entre las distintas partes que cada quién aportó. Las cantidades que están en proporción son la cantidad de dinero aportado y la cantidad de dinero obtenido respecto a lo aportado.

III. Tres campesinos sembraron un terreno de 20 hectáreas (20 ha). El primero sembró 1 ha, el segundo 8 ha y el tercero 11 ha. Cuando terminaron de sembrarlo les pagaron en total $2 400.

Completen la siguiente tabla para calcular cuánto dinero le toca a cada campesino si se reparten proporcionalmente el total del dinero pagado entre el número de hectáreas que cada quien sembró:



Número de hectáreas sembradas	Cantidad pagada por el número de hectáreas sembradas (pesos)
20	2 400
1	
8	
11	

>>> Lo que aprendimos

Tres albañiles levantaron una barda de 30 m^2. El primer albañil levantó 10 m^2, el segundo albañil levantó 5 m^2 y el tercero levantó 15 m^2. Por el total del trabajo les pagaron $600.

Si se reparten el dinero proporcionalmente al número de metros cuadrados que cada quién levantó, ¿cuánto dinero le tocaría a cada uno de los albañiles?

Reparto proporcional

Luis y Juan son albañiles, acaban de construir una pared rectangular de 50 m^2, Luis construyó 35 m^2 y Juan 15 m^2. ¿Te parece justo que se repartan por partes iguales?, ¿por qué? Este tipo de problemas se llaman de reparto proporcional.

SESIÓN 2

MÁS SOBRE REPARTO PROPORCIONAL

>>> Para empezar

Los contextos en los cuales surgen las situaciones de reparto proporcional son muy variados. En esta sesión estudiarás tres situaciones más en las cuales aparece el reparto proporcional.

86

Propósito de la sesión. Solucionar problemas de reparto proporcional mediante el uso del valor unitario.

Organización del grupo. Las actividades se realizan en parejas, salvo la última y cuando se sugiere comentar con los demás.

>>> Consideremos lo siguiente

Pedro y Édgar invirtieron sus ahorros en un negocio. Pedro puso $2 200 y Édgar puso $2 800. Al finalizar el negocio obtuvieron una ganancia de $100 000.

Si se reparten proporcionalmente el dinero que ganaron:

a) ¿Cuánto le tocaría a Pedro? _______________

b) ¿Cuánto le tocaría a Édgar? _______________

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para encontrar cuánto dinero le corresponde a Pedro y cuánto a Édgar.

Cantidad de dinero invertido (pesos)	Ganancia correspondiente a la inversión (pesos)
5 000	100 000
500	10 000
50	1 000
5	100
1	20
2 200	44 000
2 800	56 000

II. Comparen los resultados de la tabla anterior con los que ustedes obtuvieron y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la ganancia por cada peso invertido? _______________

b) Si Pedro hubiera invertido $3 500, ¿cuánto dinero hubiera recibido de ganancias?

____

>>> A lo que llegamos

Otra de las formas de resolver los problemas de reparto proporcional consiste en encontrar el valor unitario, que permite pasar de la cantidad invertida a la ganancia correspondiente. Por ejemplo, en el problema del negocio entre Pedro y Édgar la inversión total fue de $5 000 y la ganancia total de $100 000, así que el valor unitario que permite saber cuánto ganaron por cada peso que invirtieron es $20, es decir, por cada peso que invirtieron ganaron $20.

87

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos utilicen el procedimiento que prefieran aunque no logren las respuestas; si no pueden obtenerlas, aquí lo harán más adelante.
Respuestas. Juntaron $5 000 y por cada peso ganaron $20, que es el valor unitario. A Pedro le deben tocar $44 000 (2 200 × 20) y a Édgar $56 000 (2 800 × 20).

Respuestas.

a) La ganancia por cada peso invertido es el valor unitario ($20).

b) Si Pedro hubiera invertido $3 500, tendría que recibir 3 500 × 20, que da como resultado $70 000, pero la cantidad que ganaría Édgar se vería modificada. Pregunte a sus alumnos cómo pueden saber cuánto ganaría en ese caso Édgar y cuánto habría invertido.

Sugerencia didáctica. Solicite a los alumnos que lean con atención el relato o pida que uno de ellos lo lea en voz alta.

Este problema es muy interesante, ya que aparentemente la situación que se plantea corresponde a un reparto proporcional. El reto que se presenta a los alumnos es que logren identificar y argumentar lo contrario. Sin embargo, es probable que varios alumnos concluyan que el reparto sí es proporcional. Pídales que den sus argumentos, posteriormente tendrán la oportunidad de verificar sus respuestas.

Propósito de la actividad. Pretende confrontar la idea errónea de que el reparto sí es proporcional haciendo un análisis de la cantidad de pan que cada viajero aportó y la cantidad que cada uno de ellos comió.

Respuestas. En total se repartieron 8 panes entre 3 viajeros y cada viajero comió $\frac{8}{3}$ de pan, es decir, $2\frac{2}{3}$. Uno de los viajeros aportó 3 panes, de los que Salem se comió $\frac{1}{3}$ de pan; mientras que el otro viajero aportó 5 panes, de los que Salem se comió $2\frac{1}{3}$ panes. Por lo tanto, Salem debió dar 1 moneda de oro al que aportó 3 panes, y 7 monedas al que dio 5 panes; es decir, una moneda de oro por cada tercio de pan que se comió.

Integrar al portafolios. Las respuestas que den los alumnos a este problema podrán darle información acerca de lo que saben sobre el reparto proporcional. Es importante considerar que en este problema hay dos elementos presentes: el manejo de fracciones y la proporcionalidad, y es posible que los alumnos tengan dificultades con uno de los dos aspectos o con ambos. Podría serles de ayuda hacer los repartos mediante representaciones de los panes con plastilina o papel.

Salem y el reparto de pan [1]

III. Resuelvan el siguiente problema.

Dos viajeros se encontraron en el camino a un hombre que había sido asaltado. Este hombre se llamaba Salem Nasair, quien les dijo:

– ¿Traéis algo de comer?, me estoy muriendo de hambre.

– Me quedan tres panes —respondió uno de los viajeros.

– Yo llevo cinco —dijo el otro viajero.

– Pues bien, dijo Salem, yo os ruego que juntemos esos panes y nos los repartamos en partes iguales. Cuando llegue a mi hogar prometo pagar con ocho monedas de oro el pan que coma.

Cuando llegaron, Salem Nasair recompensó a los viajeros como había prometido. Le dio tres monedas de oro al que llevaba tres panes y cinco monedas de oro al que llevaba cinco panes. Sin embargo uno de los viajeros dijo:

– ¡Perdón, Salem!, la repartición, hecha de este modo, puede parecer justa, pero no es un reparto proporcional.

Respondan las siguientes preguntas:

a) ¿A cuál de los viajeros creen que no le pareció justo el reparto? ____________

b) ¿Por qué? ____________

IV. En otra telesecundaria, un equipo que resolvió la actividad de los viajeros comentó:

"Salem dio ocho monedas por el pan compartido, entonces sí es justo porque al que puso cinco panes le dio cinco monedas de oro y al que puso tres panes le dio tres monedas de oro"

Respondan las siguientes preguntas:

a) ¿Qué cantidad de pan comió cada uno de los viajeros?

____

b) ¿Cuánto pan dio a Salem el viajero que traía tres panes?

____

c) ¿Cuánto pan dio a Salem el viajero que traía cinco panes?

____

d) ¿Cómo hubieran repartido ustedes el dinero entre los viajeros para que fuera un reparto proporcional? ____________

Comparen sus respuestas y comenten los procedimientos que usaron para encontrarlas.

1 Malba, Tahan (2005). *El hombre que calculaba.* México: SEP/Editorial Limusa. Libros del Rincón. pp. 23, 24 y 25.

88

>>> Lo que aprendimos

Nuestro país tiene una población aproximada de 110 000 000 de personas y el territorio nacional es de 2 000 000 de km². Sin embargo, la población no está repartida proporcionalmente en el territorio. Hay estados cuyo territorio comprende muy pocos kilómetros cuadrados y, sin embargo, tienen muchísimos habitantes: ¡En el Distrito Federal hay casi 9 000 000 de personas viviendo en un territorio de 1 500 kilómetros cuadrados!

Y otros estados tienen grandes extensiones de tierra y muy pocos habitantes viviendo en ella: Nuevo León, por ejemplo, tiene 3 800 000 mil habitantes viviendo en 64 000 kilómetros cuadrados.

La siguiente tabla muestra la extensión territorial y el número de habitantes de algunos de los estados de la República Mexicana.

Entidad federativa	Extensión (km^2)	Número de habitantes
Tlaxcala	2 000	960 000
Querétaro	12 000	1 400 000
Distrito Federal	1 500	8 700 000
Nuevo León	64 000	3 800 000

Los datos se aproximaron para simplificar los cálculos. Tomado de *XII Censo General de Población y Vivienda* 2000 disponible en: http://www.inegi.gob.mx (consulta: 23 mayo 2006).

Contesta en tu cuaderno:

a) ¿Cuál es el total de habitantes que hay entre los cuatro estados?

b) ¿Cuántos kilómetros cuadrados hay en total juntando los cuatro estados?

c) ¿Cómo repartirías proporcionalmente la población entre los territorios de estos estados?

Número de habitantes que habría en Tlaxcala 373 836.478

Número de habitantes que habría en Querétaro 2 243 018.868

Número de habitantes que habría en el Distrito Federal 280 377.3585

Número de habitantes que habría en Nuevo León 11 962 767.3

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. México: SEP/Editorial Limusa, Libros del Rincón, 2005.

Sobre la densidad de población en México consulta: http://www.inegi.gob.mx/inegi/default.asp
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Ruta: Información estadística → Estadísticas por tema → Estadísticas sociodemográficas → Dinámica de la población → Volumen, estructura, crecimiento y distribución → Densidad de población por entidad federativa, 2000.
Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática.

Respuestas. Hay que encontrar el valor unitario, es decir, cuántos habitantes habría en 1 km². Se obtiene dividiendo 14 860 000 (el total de habitantes de los cuatro estados) entre 79 500 (el total de kilómetros cuadrados de los cuatro estados), y da como resultado 186.918239 habitantes por km². El resultado es un número con muchas cifras decimales que deberá redondearse o truncarse. Para hacer el reparto proporcional se multiplica este valor unitario por la extensión de cada estado.

Sugerencia didáctica. Las respuestas obtenidas son números con punto decimal porque el valor unitario no es un número entero; sin embargo, para algunos alumnos puede ser confuso el resultado. Conviene comentar qué significa que haya 373 836.478 personas en Tlaxcala, y por la dificultad del cálculo se sugiere que utilicen calculadora. Otra opción es redondear el valor unitario a 187 habitantes por kilómetros cuadrados.

Sugerencia didáctica. Si cuentan con Internet pida a los alumnos que busquen información sobre su estado y la comparen con la de otros estados.

Propósito de la sesión. Identificar situaciones que se resuelven mediante procedimientos de recuento o enumeración, y utilizar estrategias personales para resolverlas.

Materiales. Lápices de colores.

1

Organización del grupo. Se propone que los alumnos trabajen en parejas y que el apartado *Lo que aprendimos* se resuelva de manera individual.

SECUENCIA 8

Problemas de conteo

En esta secuencia resolverás problemas de conteo utilizando diversos recursos y estrategias, como tablas, diagramas de árbol y otros procedimientos de enumeración.

SESIÓN 1

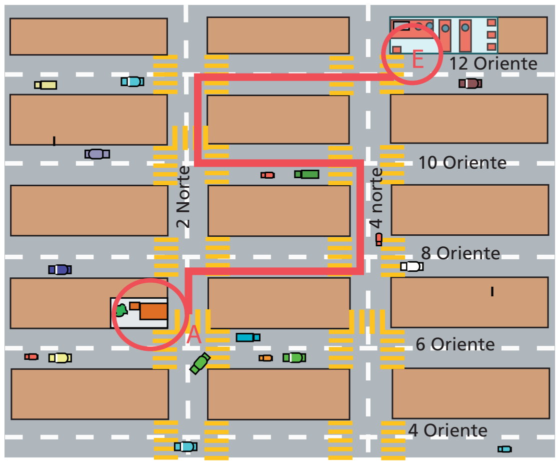
¿CUÁNTOS CAMINOS HAY?

>>> Para empezar

Hay situaciones que pueden resolverse de distintas formas; por ejemplo, piensa en los recorridos que puede hacer un repartidor de mercancías en el centro de la ciudad de Puebla. ¿Cuántos caminos distintos puede tomar para ir de un lugar a otro?, ¿habrá uno más corto que los demás?, ¿cuál conviene tomar?

Problemas como éstos son los que se plantearán en las siguientes sesiones.

- Ana vive en el centro de la ciudad de Puebla, en la esquina que forman las calles 2 Norte y 6 Oriente. Ella va a la escuela que está ubicada en 4 Norte y 12 Oriente. El mapa muestra el recorrido que ayer hizo Ana para ir de su casa a la escuela.



90

Propósitos de la secuencia
Resolver problemas de conteo utilizando diversos recursos y estrategias como tablas, diagramas de árbol y otros procedimientos de enumeración.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos	Vínculos
1	*¿Cuántos caminos hay?* Identificar situaciones que se resuelven mediante procedimientos de recuento o enumeración y utilizar estrategias personales para resolverlas.	Video *¿Saben cuántos caminos hay?* Interactivo	
2	*¿De cuántas formas?* Explorar formas de realizar un conteo mediante tablas o diagramas de árbol.	Interactivo	Ciencias, secuencia 31 ¿Cómo se heredan las características de un organismo?
3	*¿Cuántos viajes hay...?* Encontrar procedimientos sistemáticos de conteo en situaciones diversas; particularmente utilizar la regla del producto.	Interactivo	
4	*Otros contextos* Interpretar procedimientos sistemáticos de conteo.	Interactivo	

Eje

Manejo de la información.

Tema

Representación de la información.

Antecedentes

En la escuela primaria los alumnos resolvieron problemas en los que fue necesario interpretar y organizar información presentada a través de tablas, gráficas y diagramas de árbol. En este mismo sentido, se espera que los alumnos desarrollen conocimientos y habilidades que les permitan deducir e interpretar información a partir de la que se muestra en este tipo de representaciones.

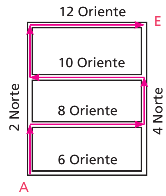
Realicen las siguientes actividades

a) En el mapa de su libro, cada quién marque con color verde otro recorrido que podría hacer Ana para ir de su casa a la escuela.

b) En este recorrido, ¿cuáles son las calles por las que pasa Ana para llegar a la escuela? ______

c) Marca en tu mapa con color azul el recorrido que trazó tu compañero. ¿Por cuáles calles pasa este nuevo recorrido? ______

MAPA 1

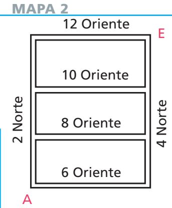


>>> Consideremos lo siguiente

Como ven, casi todas las calles del centro de la ciudad de Puebla son rectas, por lo que es posible representar el recorrido que hizo Ana de su casa (A) a la Escuela (E), como muestra el **mapa 1**.

a) Encuentren en el **mapa 2** un recorrido en el que Ana camine el menor número de cuadras para llegar a la escuela (E) y represéntenlo aquí.

MAPA 2



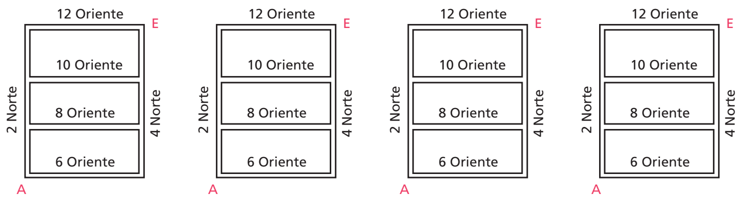
b) ¿Cuántas cuadras tiene ese recorrido? ______

c) ¿Cuántas formas diferentes hay de caminar ese recorrido? ______

Comparen su solución con las de los otros equipos.

a) ¿Cuántas formas diferentes tiene Ana de caminar el menor número de cuadras? ______

b) Marquen esos recorridos en los siguientes mapas:



>>> Manos a la obra

I. Una pareja de alumnos representó el recorrido que siguió Ana mediante flechas: $\uparrow \rightarrow \uparrow \uparrow$

Otra pareja lo representó así: **N,O,N,N** utilizando las letras **O** de calle **O**riente y **N** de calle **N**orte.

a) ¿Puede llegar Ana a la escuela siguiendo el camino **O,O,N,N**? ______

b) ¿Y siguiendo el camino $\rightarrow \uparrow \uparrow \rightarrow$? ______

91

Propósito de las actividades. Por una parte, se pretende que los alumnos se familiaricen con el mapa, y por la otra, que exploren de manera intuitiva los posibles recorridos que podría efectuar Ana.
Hay distintas respuestas, algunos recorridos pueden ser más largos o más cortos (por ejemplo, 6 Oriente y 4 Norte).

Propósito de la actividad. En esta actividad se les propone a los alumnos una representación que abstrae del mapa de la ciudad de Puebla la información necesaria y suficiente para poder encontrar los diferentes recorridos que puede seguir Ana.
Se espera que los alumnos logren detectar algunas ventajas que se buscan al realizar un recorrido, como caminar el menor número de calles, lo que implica realizar el recorrido en un tiempo menor.

Respuestas. El recorrido menor es de 4 cuadras, y hay 4 formas distintas de caminar ese recorrido.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos se familiaricen con dos formas de representar los recorridos, una utiliza flechas y la otra letras. De estas dos representaciones se enfatizará en las letras, pues tiene la ventaja de que al representar los recorridos se obtiene una lista en la que es muy claro reconocer aquellos que efectivamente son cortos, así como garantizar que se han obtenido todas las posibilidades.

Respuestas.

a) No es posible, porque 1 recorrido correcto sólo tiene una calle hacia el Oriente, y éste tiene 2.

b) No es posible, porque un recorrido correcto tiene 3 calles hacia el Norte, y éste sólo tiene 2.

Propósito del interactivo. Resolver problemas de conteo ocupando el procedimiento de enumeración mediante la visualización de recorridos más cortos.

Respuesta. Cada recorrido correcto tiene 3 calles hacia arriba (Norte) y una calle hacia la derecha (Oriente).

Respuestas.

NNNO;

NNON;

NONN;

ONNN;

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que revisen nuevamente la lista de recorridos que obtuvieron, para verificar si efectivamente en ninguno de ellos hay "regresos".

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos pongan en práctica los procedimientos de enumeración propuestos, y que identifiquen algunas regularidades.

Respuestas.

a) Por ejemplo, María está una calle más lejos que Ana y el menor número de cuadras que camina es 5: 4 cuadras de las calles Norte y 1 cuadra de las calles Oriente.

b) Hay 5 formas diferentes de realizar ese recorrido: ONNNN; NONNN; NNONN; NNNON; NNNNO.

Respuesta. El menor número de cuadras que se caminan es 6: 5 cuadras de las calles Norte y 1 de las calles Oriente. Esta regularidad se debe a la manera en que están alineadas las calles. Hay 6 maneras diferentes de hacer estos recorridos:

ONNNNN;

NONNNN;

NNONNN;

NNNONN;

NNNNON;

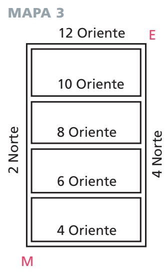
NNNNNO.

c) Discute con tu compañero si Ana puede o no realizar el recorrido.

d) Utilizando las letras N y O, representen en su cuaderno los recorridos que puede hacer Ana para ir de su casa a la escuela caminando el menor número de cuadras.

Los recorridos que constan del menor número de cuadras que se puede caminar son aquellos en los que no hay regresos. A estos recorridos se les llamará recorridos más cortos.

II. Consideren el **mapa 3**; María (M) es compañera de Ana y vive en la esquina de 4 Oriente y 2 Norte.



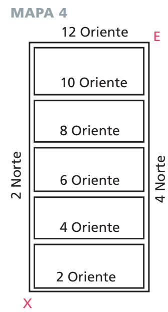
a) ¿Cuál es el menor número de cuadras que debe caminar María para ir de su casa a la escuela?

____

b) ¿De cuántas formas diferentes puede ir de su casa a la escuela caminando el menor número de cuadras? Utiliza el código de las letras N y O para representar, en tu cuaderno, los recorridos más cortos que puede hacer María.

III. Consideren el **mapa 4**, ¿de cuántas formas diferentes puede llegar alguien a la escuela si vive en la esquina de 2 Oriente y 2 Norte, caminando el menor número de cuadras?

____



>>> Lo que aprendimos

Encuentra en el **mapa 5** los diferentes recorridos que puede seguir alguien para ir del punto M a la escuela (E), caminando el menor número de cuadras. Represéntalos en tu cuaderno utilizando las letras N y O.

a) ¿Cuántas cuadras tiene el recorrido más corto?

____

b) ¿De cuántas formas diferentes puedes caminarlo para llegar a la escuela? ______________________

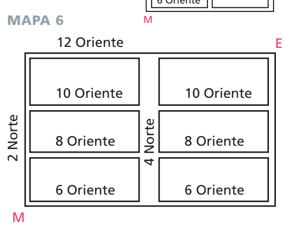
c) En el **mapa 6**, ¿cuántas cuadras forman al recorrido más corto que se puede seguir para ir de M a E?

____

d) ¿De cuántas formas diferentes lo puedes realizar? __________

¿Se puede realizar el siguiente recorrido N, N, O, O, N, N?

____



92

Propósitos interactivo. Resolver problemas de conteo ocupando el procedimiento de enumeración mediante la visualización de recorridos más cortos.

Respuestas.

a) El menor número de cuadras que se caminan es 4, debido a la forma en que están distribuidas las calles.

b) Hay 6 recorridos diferentes: NNOO; NONO; NOON; ONNO; ONON; OONN.

c) El menor número de cuadras que se deben caminar son 5.

d) Hay 10 recorridos diferentes. No se puede realizar el recorrido N,N,O,O,N,N, porque en cualquier recorrido corto sólo se caminan 3 cuadras hacia el Norte y 2 hacia el Oriente.

>>> A lo que llegamos

Al encontrar cuántas formas diferentes hay de realizar un recorrido, se está resolviendo un problema de conteo. En los problemas de conteo es conveniente utilizar una manera de distinguir un resultado de otro.

Por ejemplo, en el caso de Ana se puede diferenciar un camino de otro si cada uno de ellos se distingue con un símbolo, una letra o un nombre. Dos maneras de representar uno de los cuatro recorridos que Ana puede hacer son: N,N,O,N y ↑↑→↑.

Estas maneras de resolver problemas de conteo se llaman procedimiento de enumeración.

¿DE CUÁNTAS FORMAS?

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Existen situaciones en las que se debe elegir un producto o servicio entre varios que se ofrecen. Por ejemplo, en la compra de zapatos se pueden elegir diferentes modelos y colores; lo mismo sucede al comprar ropa, autos o cualquier otro artículo.

>>> Consideremos lo siguiente

En la pastelería "La gran rebanada" elaboran pasteles de diferentes sabores, formas y decorados. Cuando alguien hace un pedido, el vendedor debe llenar un formato como el siguiente:

La gran rebanada Pastelería	
Nombre del cliente:	Num. de pedido: Precio: Anticipo:
Num. de vendedor:	Fecha de entrega: Hora:
Instrucciones: en cada caso, marcar con "X" la opción deseada	
Formas	
	
Sabores	
□ Chocolate □ Tres leches □ Vainilla	
Decorado	
□ Cereza □ Nuez □ Fresa	

93

Sugerencia didáctica. Después de leer y comentar la información puede solicitar a los alumnos que redacten en sus cuadernos otras situaciones (una o dos) en las sea necesario llevar a cabo procesos de conteo. Invítelos a sugerir algunas formas de enumerar.

Para recordar. Los problemas de conteo se presentan en situaciones en las que debemos responder a la pregunta: ¿de cuántas maneras se puede resolver? En esta secuencia se trabaja con tres formas de resolver los problemas de conteo: enumeración, tablas y diagramas de árbol.

La enumeración consiste en hacer una lista ordenada de todas las formas en las que podemos resolver el problema. Es importante encontrar una manera sistemática que nos permita hacer la lista y con la que podamos distinguir un resultado de otro, así como garantizar que hemos obtenido todos los resultados posibles.

Propósito de la sesión. Explorar formas de realizar un conteo mediante tablas o diagramas de árbol.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en parejas a lo largo de toda la sesión.

Posibles errores. Algunos alumnos podrían sumar los sabores, las formas y los decorados respondiendo que hay 8 variedades de pastel. Otros alumnos podrían pensar que hay 12 variedades al identificar en cada una de las formas (redonda o cuadrada), 6 variedades que resultan de sumar los sabores y los decorados. Lo importante en este momento es que los alumnos exploren procedimientos para resolver el problema.

Respuesta. Se pueden elaborar 18 pasteles diferentes.

Sugerencia didáctica. Mientras resuelven, trate de identificar los procedimientos que utilizan, sus dificultades y errores, para posteriormente, en el apartado *Manos a la obra*, recuperar algunos de ellos.

Sugerencia didáctica. Antes de que los alumnos resuelvan, usted puede registrar en el pizarrón el cálculo de cada una de las parejas, para que una vez que hayan resuelto puedan verificar qué tanto se acercaron a la respuesta exacta.

SECUENCIA 8

a) ¿Cuántos pasteles diferentes pueden elaborar en esa pastelería? ____

b) ¿Habrá más de 10 pasteles diferentes? ____ ¿Más de 20? ____ ¿Más de 40? ____

Comparen sus respuestas

>>> Manos a la obra

I. Completen las siguientes tablas.

Pastel circular	Decorado cereza (c)	Decorado fresa (f)	Decorado nuez (n)
Chocolate (Ch)	Ch-c		
Tres leches (T)		T-f	
Vainilla (V)			

Pastel cuadrado	Decorado cereza (c)	Decorado fresa (f)	Decorado nuez (n)
Chocolate (Ch)			
Tres leches (T)			
Vainilla (V)		V-f	

a) ¿Cuántos tipos diferentes de pastel de forma circular hay con sabor chocolate?

____

b) ¿Cuántos tipos diferentes de pastel con decorado de nuez y sabor vainilla hay?

____

c) ¿Cuántos tipos diferentes de pastel con decorado de fresa hay?

____

d) Observen las tablas. En la primera casilla de cada tabla está identificada la forma del pastel, de la segunda columna en adelante están los decorados y del segundo renglón hacia abajo, los sabores. Si en vez de construir las tablas a partir de la forma del pastel se construyen a partir de los diferentes sabores, ¿cuántas tablas tendrían que hacerse? ____ Elabórenlas en su cuaderno.

e) ¿Cambia el número total de variedades de pastel? ____ ¿Por qué?

____

____

94

2

Propósito de la actividad. Con la realización de estas actividades los alumnos están utilizando, además de un código, como lo hicieron en la lección anterior, diagramas de árbol y tablas para representar los resultados y poder contar todas las combinaciones posibles.

Respuestas.

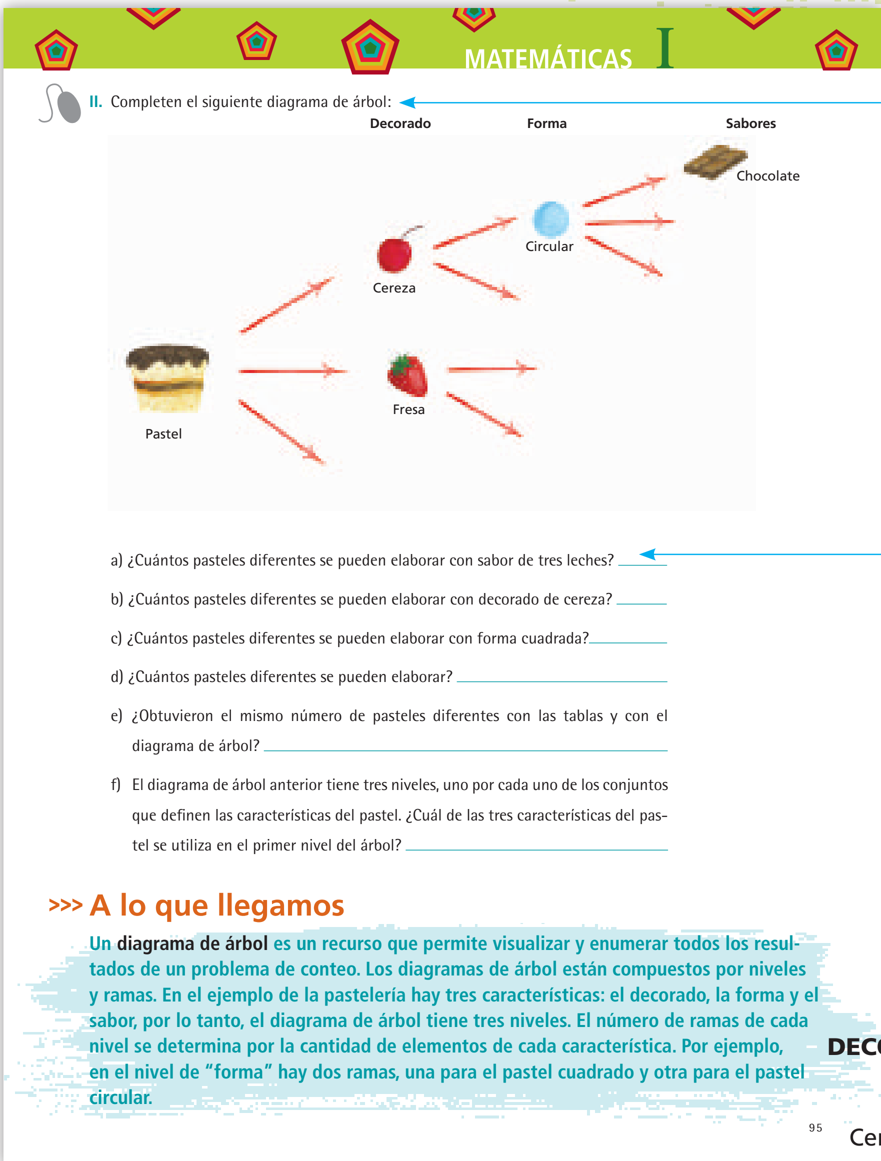
a) Tres tipos de pastel redondos con sabor chocolate, porque hay 3 decorados diferentes.

b) Dos tipos, uno redondo y el otro cuadrado.

c) Hay seis tipos, se combinan 3 sabores diferentes con 2 formas diferentes.

d) Tendrían que hacerse tres tablas, una por cada sabor. En los renglones podrían ir las formas de los pasteles y en las columnas los decorados.

e) No cambia, porque siguen siendo las mismas opciones en cuanto a forma, sabores y decorados.



MATEMÁTICAS I

II. Completen el siguiente diagrama de árbol:

a) ¿Cuántos pasteles diferentes se pueden elaborar con sabor de tres leches? ______

b) ¿Cuántos pasteles diferentes se pueden elaborar con decorado de cereza? ______

c) ¿Cuántos pasteles diferentes se pueden elaborar con forma cuadrada? ______

d) ¿Cuántos pasteles diferentes se pueden elaborar? ______

e) ¿Obtuvieron el mismo número de pasteles diferentes con las tablas y con el diagrama de árbol? ______

f) El diagrama de árbol anterior tiene tres niveles, uno por cada uno de los conjuntos que definen las características del pastel. ¿Cuál de las tres características del pastel se utiliza en el primer nivel del árbol? ______

>>> A lo que llegamos

Un **diagrama de árbol** es un recurso que permite visualizar y enumerar todos los resultados de un problema de conteo. Los diagramas de árbol están compuestos por niveles y ramas. En el ejemplo de la pastelería hay tres características: el decorado, la forma y el sabor, por lo tanto, el diagrama de árbol tiene tres niveles. El número de ramas de cada nivel se determina por la cantidad de elementos de cada característica. Por ejemplo, en el nivel de "forma" hay dos ramas, una para el pastel cuadrado y otra para el pastel circular.

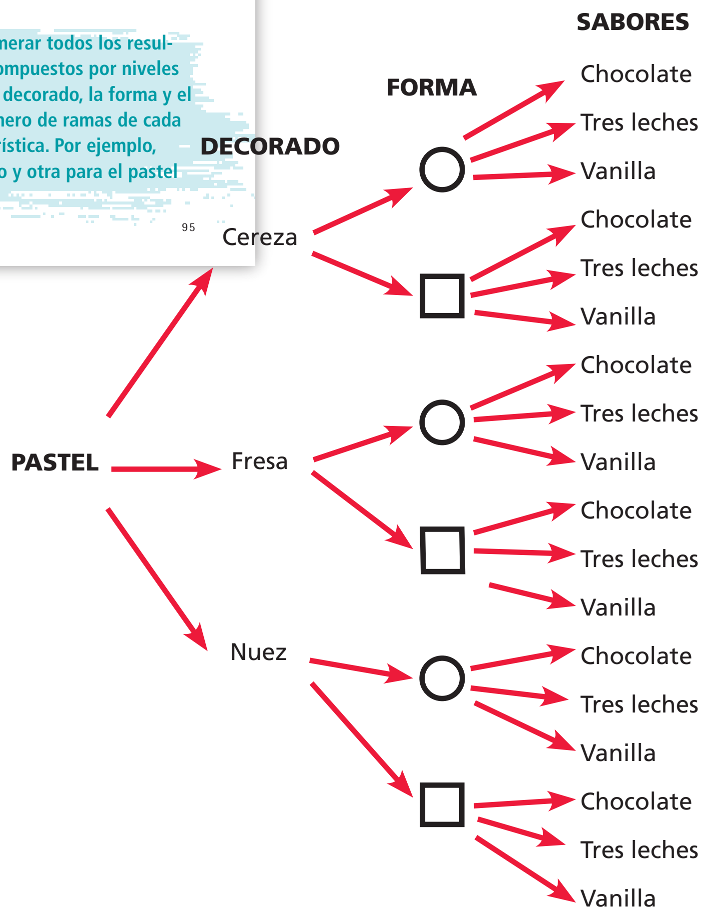
95

Propósito del interactivo. Utilizar el diagrama de árbol como técnica de conteo en la resolución de problemas.

Propósito de la actividad. Con las respuestas de estas preguntas se pretende que los alumnos no se limiten a completar las tablas y el diagrama de árbol. Deberán leer la información que están representando e interpretar los resultados. De manera complementaria, comprenderán que no importa qué características se utilicen para empezar a contar, si han utilizado adecuadamente el recurso, obtendrán el mismo resultado.

Respuestas.

a) Seis pasteles de tres leches (2 formas diferentes y 3 decorados diferentes).
b) Seis pasteles con decorado cereza (2 formas diferentes y 3 sabores diferentes).
c) Nueve pasteles diferentes.
d) Dieciocho pasteles diferentes.
e) Deben obtenerse el mismo número de pasteles con la tabla y con el diagrama de árbol.
f) El decorado.



Propósito de la pregunta. Identificar que al aumentar un elemento en uno de los niveles se incrementa el número total de variedades.

Respuesta. Aumentan 6 variedades (24 en total) porque para el nuevo decorado tenemos 2 formas y 3 sabores (2 × 3).

Propósito del interactivo. Utilizar el diagrama de árbol como técnica de conteo en la resolución de problemas.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos identifiquen que al incluir una categoría cambia el número de combinaciones, por lo que deben seleccionar el recurso que consideren más adecuado para resolver este problema.

Respuesta. Son 36 opciones en total (2 × 2 × 3 × 3).

Posibles procedimientos. Si optan por el diagrama de árbol, deben agregar un nivel de ramificación; si eligen las tablas, el procedimiento es más difícil: ahora son 4 niveles de opción y los alumnos deben decidir cómo incluirlos en las tablas. Una solución es poner 2 características en la primera casilla, por ejemplo "forma y relleno", de tal manera que tendrían 4 tablas: "redondo y durazno"; "redondo y almendras"; "cuadrado y durazno"; "cuadrado y almendras". En los renglones y en las columnas de cada tabla se pondrían los decorados y los sabores. Usted puede tomar una o dos tablas generadas por los alumnos y ponerlas a consideración del grupo.

SECUENCIA 8

g) Supongan que en esa pastelería tienen un nuevo decorado: el de frutas. ¿Cuántos pasteles distintos podrían elaborarse ahora? ________ . En su cuaderno, elaboren el diagrama de árbol que representa esta situación.

III. La pastelería puede rellenar los pasteles con dos ingredientes: durazno o almendras. Ahora los ha incluido en el formato de pedidos.

La gran rebanada Pastelería	
Nombre del cliente:	Num. de pedido: Precio: Anticipo:
Num. de vendedor:	Fecha de entrega: Hora:
Instrucciones: en cada caso, marcar con "X" la opción deseada	
Formas	**Sabores**
	□ Chocolate □ Tres leches □ Vainilla
Relleno	**Decorado**
□ Durazno □ Almendras	□ Cereza □ Nuez □ Fresa

a) ¿Cuántos pasteles distintos pueden elaborarse ahora en la pastelería? ________

b) ¿Qué recurso les pareció más conveniente utilizar para resolver el problema, el diagrama de árbol o las tablas? Utilícenlo para resolver este problema en su cuaderno.

>>> A lo que llegamos

Las **tablas** y los **diagramas de árbol** son dos recursos para encontrar de manera sistemática todos los resultados posibles en un problema de conteo. En ambos casos se ha hecho uso de códigos para enumerar los diferentes resultados.

Cuando se realiza un conteo de modo sistemático, el resultado será siempre el mismo, no importa el recurso que se utilice.

96

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos la información comparando los resultados que obtuvieron en alguna de las situaciones haciendo el conteo con un diagrama de árbol y con tablas. Verificarán que se obtienen los mismos resultados.

Para recordar. En los problemas de conteo existen aquellos en los que se tienen distintos objetos o distintas características que debemos combinar. Por ejemplo, en el caso de las tablas se utilizan tantos renglones y tantas columnas como lo indique el número de elementos de cada característica. Si existen más de 2 características debemos utilizar más de una tabla para representar distintas combinaciones entre ellas; por ello en ocasiones es más fácil representar las combinaciones utilizando un diagrama de árbol.

En ocasiones no es posible realizar la enumeración, la tabla o el diagrama de árbol debido al elevado número de posibles soluciones. En estos casos podemos plantear un problema similar con un menor número de características, en el que sí podamos utilizar alguno de los recursos; de esta forma intentaremos encontrar una regla o una fórmula que nos permita resolver el problema inicial.

>>> Lo que aprendimos

En la secuencia 31 **¿Cómo se heredan las características de un organismo?** de tu libro **Ciencias I**, estudiarás que en los caracteres que los seres vivos heredan hay algunos que son dominantes y otros recesivos. Por ejemplo, en tu familia, ¿cuál color de ojos es un carácter dominante?, ¿cuál color de ojos es un carácter recesivo?

Supon que en cierta planta las flores de color rojo es un carácter dominante y las de color azul es recesivo. Identifica el color rojo con **RR** (dos letras porque la información de la herencia biológica se transmite en pares) y el azul con **aa**.

Si en la primera generación se cruzan una con flores rojas y otra con flores azules, tendrás la siguiente tabla:

Planta RR	Planta aa	
	a	a
R	Ra	Ra
R	Ra	Ra

Las flores que nacen, todas son rojas porque **Ra** significa que la flor es roja, pero lleva información de la flor azul (aunque no se manifieste). La única manera de que la flor sea azul, por ser recesiva, es cuando ambas letras sean **aa**.

Si se toman dos de los cuatro descendientes y se cruzan, ¿de qué color serán las flores? Averígualo completando la siguiente tabla:

Planta Ra	Planta Ra	
	R	a
R	RR	Ra
a	aR	aa

a) ¿Cuántas flores son rojas? (recuerda que son las que por lo menos tienen una letra **R**) __________________

b) ¿Cuántas flores son azules (**aa**)? __________________

Propósito de la actividad. La intención es presentar un contexto más en el que la tabla o el diagrama de árbol son un recurso valioso para organizar y analizar información. Si aún los alumnos no han trabajado la secuencia 31de su libro de Ciencias I Volumen II y Tecnología, pueden ver el video que le corresponde, para tener mayores referencias sobre la situación que aquí se comenta.

Respuestas. Son 3 flores rojas y 1 azul.

¿CUÁNTOS VIAJES HAY...?

SESIÓN 3

>>> Para empezar

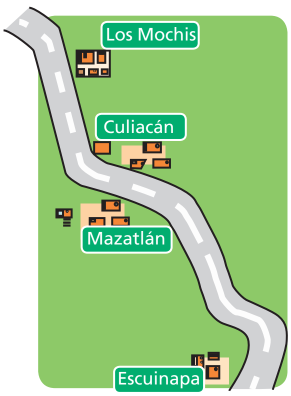
En esta sesión vas a seguir estudiando estrategias de conteo, ahora considerando los distintos viajes que una línea de autobuses ofrece.

Propósito de la sesión. Encontrar procedimientos sistemáticos de conteo en situaciones diversas; particularmente utilizar la regla del producto.

Organización del grupo. Se recomienda que organice al grupo en parejas para trabajar de esa manera durante toda la sesión.

>>> Consideremos lo siguiente

Una línea de autobuses cubre las principales ciudades del estado de Sinaloa: Los Mochis, Escuinapa, Culiacán y Mazatlán. La línea de autobuses sólo ofrece viajes directos, es decir, no hace paradas intermedias (si va de Los Mochis a Mazatlán, no hace parada en Culiacán). ¿Cuántos viajes diferentes ofrece la línea de autobuses?



Comparen sus respuestas

97

Posibles procedimientos. En las lecciones anteriores los alumnos han utilizado distintas estrategias para contar los resultados, particularmente se ha tratado de propiciar el uso del diagrama de árbol, las tablas o algún código. Se espera que los alumnos utilicen cualquiera de esas estrategias para la resolución de este problema; no obstante, podrían utilizar otras, por ejemplo, apoyándose en el mapa, podrían empezar a contar de la siguiente manera. Los Mochis-Culiacán, Los Mochis-Mazatlán, Los Mochis-Escuinapa, etc. El reto con esta estrategia es que logren tener un control que les permita cubrir todos los recorridos posibles y evitar repeticiones.

Propósito de las actividades. Estas preguntas ayudarán a los alumnos a comprender y explorar mejor el problema inicial; particularmente si algunos alumnos proponen que un viaje sea Los Mochis-Culiacán-Mazatlán; al organizar la información en la tabla podrán percatarse de que únicamente deben considerar el lugar de salida y el de llegada del viaje.

Respuestas.

b) 3.

c) 3.

d) Son 12 viajes diferentes: de cada ciudad se puede ir a 3 destinos, hay 4 ciudades (4 × 3).

Propósito de la actividad. Si en la primera parte de la lección los alumnos no utilizaron como procedimiento de resolución un diagrama de árbol o una tabla, en esta parte se les pide que empleen y analicen un diagrama de árbol. Este diagrama puede ser creado en el *applet* o en el cuaderno.
Respuesta. Son 5 ciudades de salida, cada una tiene 4 ciudades posibles de llegada, en total hay 20 viajes.

>>> Manos a la obra

I. Realicen lo que se les pide.

a) Completen la tabla de la izquierda.

b) Si una persona sale de Culiacán viajando en esta línea de autobuses, ¿a cuántos destinos diferentes puede llegar? __________

c) Si una persona llega a Mazatlán, ¿de cuántas ciudades diferentes pudo haber salido? __________

d) En total, ¿cuántos viajes diferentes hay? __________

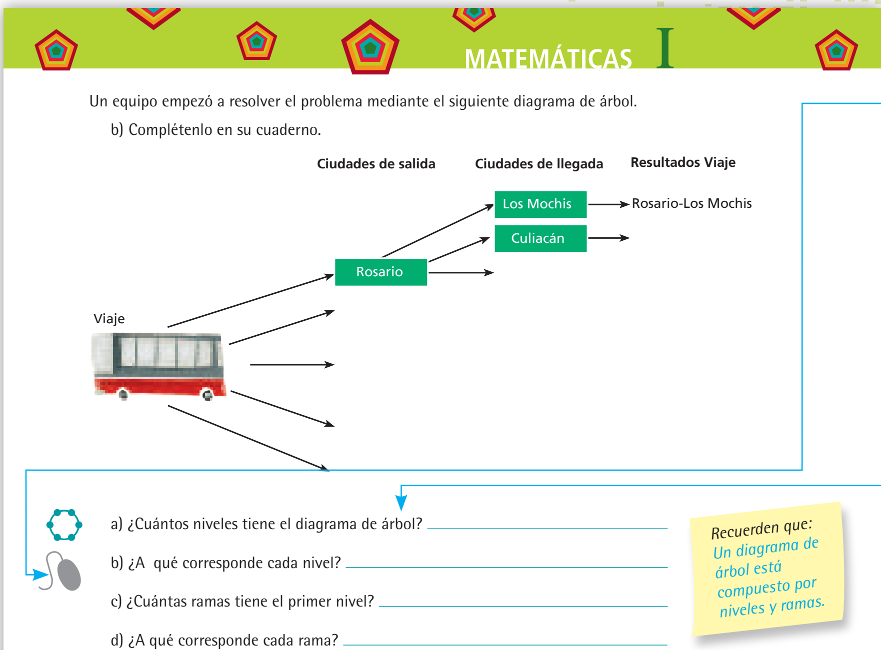
Ciudad de salida	Ciudad de llegada

II. La línea de autobuses ha decidido dar servicio a la ciudad de Rosario.

a) ¿Cuántos viajes diferentes ofrece ahora la línea de autobuses?

____

98


MATEMÁTICAS I

Un equipo empezó a resolver el problema mediante el siguiente diagrama de árbol.

b) Complétenlo en su cuaderno.

a) ¿Cuántos niveles tiene el diagrama de árbol?

b) ¿A qué corresponde cada nivel?

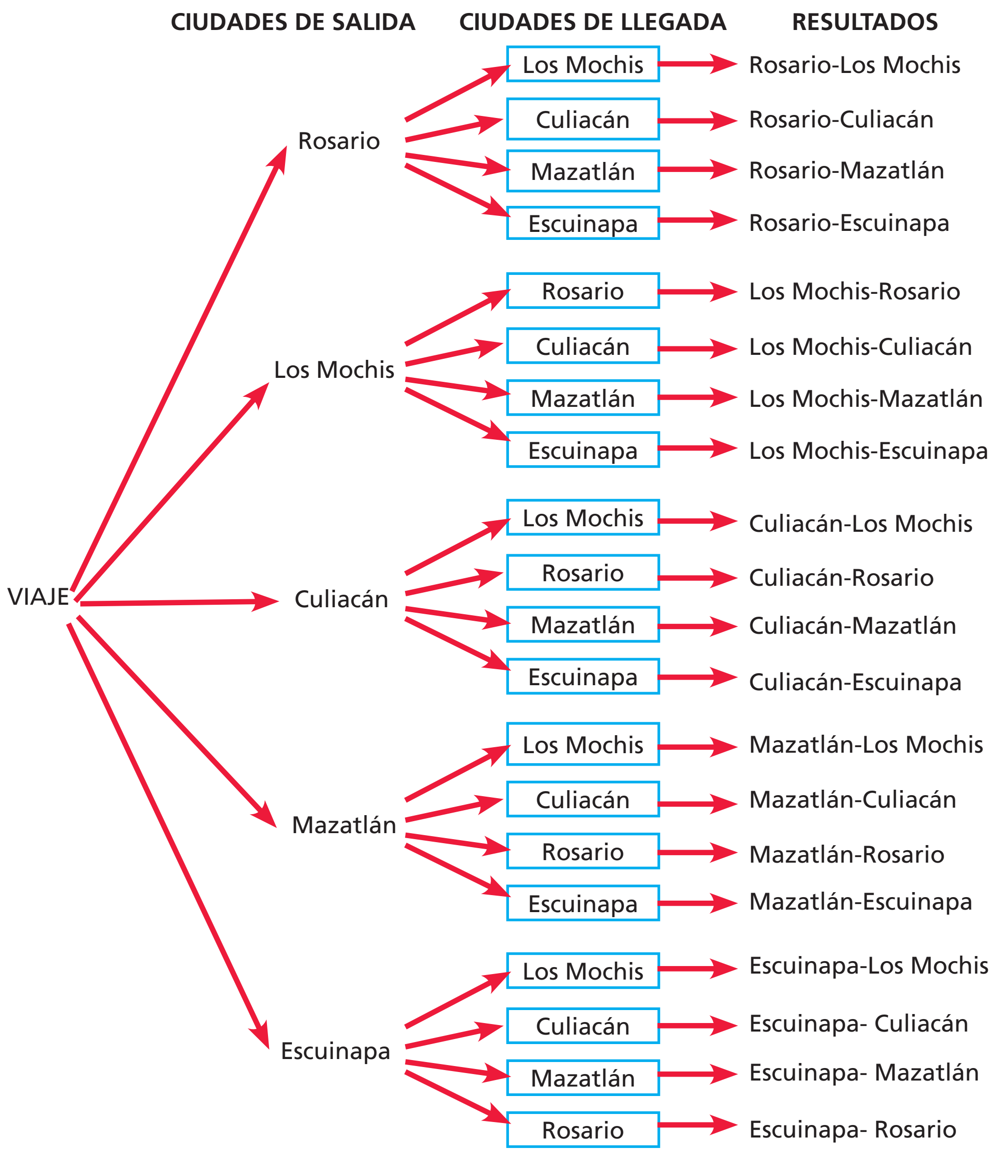
c) ¿Cuántas ramas tiene el primer nivel?

d) ¿A qué corresponde cada rama?

Recuerden que:
Un diagrama de árbol está compuesto por niveles y ramas.

Propósito del interactivo. Utilizar el diagrama de árbol como técnica de conteo en la resolución de problemas.

Propósito de la actividad. Con este conjunto de preguntas se pretende que los alumnos conozcan y analicen un procedimiento más económico y eficiente que les ayude a encontrar la respuesta al problema; se trata de la regla del producto, que en este caso es la multiplicación del número de ciudades de salida por el número de ciudades de llegada



Respuestas.

a) 3 niveles.

b) Ciudades de salida, ciudades de llegada, viajes.

c) 20 ramas.

d) A una ciudad de llegada.

e) 20 ramas.

f) Cada rama corresponde a un viaje.

g) 4 opciones de viaje.

h) 20 opciones de viaje.

i) El número de ciudades de salida (5) por el número de ciudades de llegada (4), es igual al número total de viajes: 5 × 4 = 20.

Sugerencia didáctica. Invite a los alumnos a utilizar la regla anterior ("número de ciudades de salida por número de ciudades de llegada") para responder a estas preguntas. **Respuestas.** El inciso a) se obtiene multiplicando 6 × 5; en el inciso b) se multiplica 10 × 9, y en el inciso c), 32 × 31.

Propósito de la información. Los alumnos cuentan al menos con tres procedimientos sistemáticos para resolver problemas que implican conteos: diagrama de árbol, tablas y multiplicación. Se espera que logren identificarlos como recursos que les permiten resolver ese tipo de problemas y que puedan elegir la utilización de uno o de otro.

Propósito del video: Conocer e identificar situaciones que se resuelven mediante procedimientos de conteo.

SECUENCIA 8

III. Contesten las siguientes preguntas.

a) Ahora la línea da servicio a las seis principales ciudades de Sinaloa. ¿Cuántos viajes diferentes ofrece la línea de autobuses? ______

b) La línea de autobuses ahora da servicio a diez ciudades. ¿Cuántos viajes diferentes ofrece? ______

c) Otra línea de autobuses ofrece como destinos las capitales de las 32 entidades federativas del país. ¿Cuántos viajes diferentes ofrece esta línea? ______

>>> A lo que llegamos

Los diagramas de árbol y las tablas son recursos que ayudan a encontrar todas y cada una de las opciones existentes en un problema de conteo.

En ocasiones, la multiplicación es la operación que permite encontrar el número total de opciones existentes.

>>> Lo que aprendimos

Mi amigo Juan me planteó un acertijo. Me dijo que el número de su casa tiene dos cifras, que ninguna de las dos es 0 y que son diferentes entre sí.

Número de la casa: 1ra. cifra ☐ 2da. cifra ☐

a) ¿Qué números puedo utilizar como primera cifra? ______ ¿Cuántos son en total? ______

b) Si la primera cifra fuera 2, ¿qué números podría utilizar como segunda cifra? ______ ¿Cuántos son en total? ______

c) Entonces, ¿cuántos números de dos cifras pueden ser el número de la casa de Juan? ______ ¿cuántos pares de números existen en total que cumplen con las condiciones del problema? ______

¿Saben cuántos hay?

La vida diaria exige moverse de un lugar para otro, y en el caso de la ciudad de México no solamente cuentan las distancias sino también el tiempo de traslado, por eso hay que buscar las rutas que más nos convengan entre varias posibilidades.

Pero también hay gente que se traslada a diferentes minicipios dentro de un estado. En el video se pueden observar ambas situaciones.

100

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos que en la hoja en la que entregarán el ejercicio, incluyan los procedimientos o los recursos que hayan utilizado para resolver el problema (cálculos, tablas, diagramas de árbol o cualquier otro recurso). Para poder aplicar adecuadamente la regla del producto, los alumnos deben identificar la cantidad de números que pueden utilizar en cada cifra. Tal vez algunos alumnos tengan dificultades para plantear la multiplicación y les resulte más claro elaborar una tabla o un diagrama. En general, algunas de las dificultades que los alumnos suelen tener al resolver problemas de conteo están relacionadas con el número de elementos de cada conjunto o grupo a combinar; otra dificultad es la de identificar el tipo de operación que interviene en la resolución del problema. Si los alumnos tienen dificultades para formar el número, puede pedirles que digan dos números que podría tener la casa y, a partir de ahí, iniciar la elaboración de un diagrama de árbol. Pida a los alumnos que traten de completarlo o que encuentren las respuestas haciendo cálculos aritméticos.

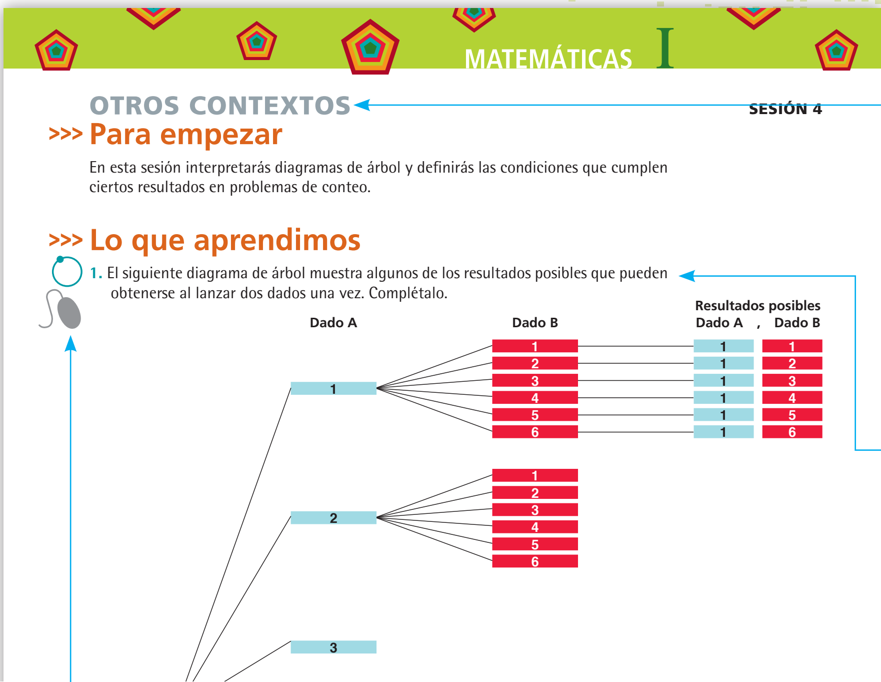
Posteriormente, usted puede plantear el mismo problema pero ahora sí se puede utilizar el cero en la segunda cifra. Pregunte: ¿cuántos números diferentes podrían ser? Incorpore este último problema al portafolios.

Respuestas.

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nueve en total.

b) 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ocho en total.

c) 72 pares de números. (Se multiplica 9 × 8.)


MATEMÁTICAS I

OTROS CONTEXTOS

SESIÓN 4

>>> Para empezar

En esta sesión interpretarás diagramas de árbol y definirás las condiciones que cumplen ciertos resultados en problemas de conteo.

>>> Lo que aprendimos

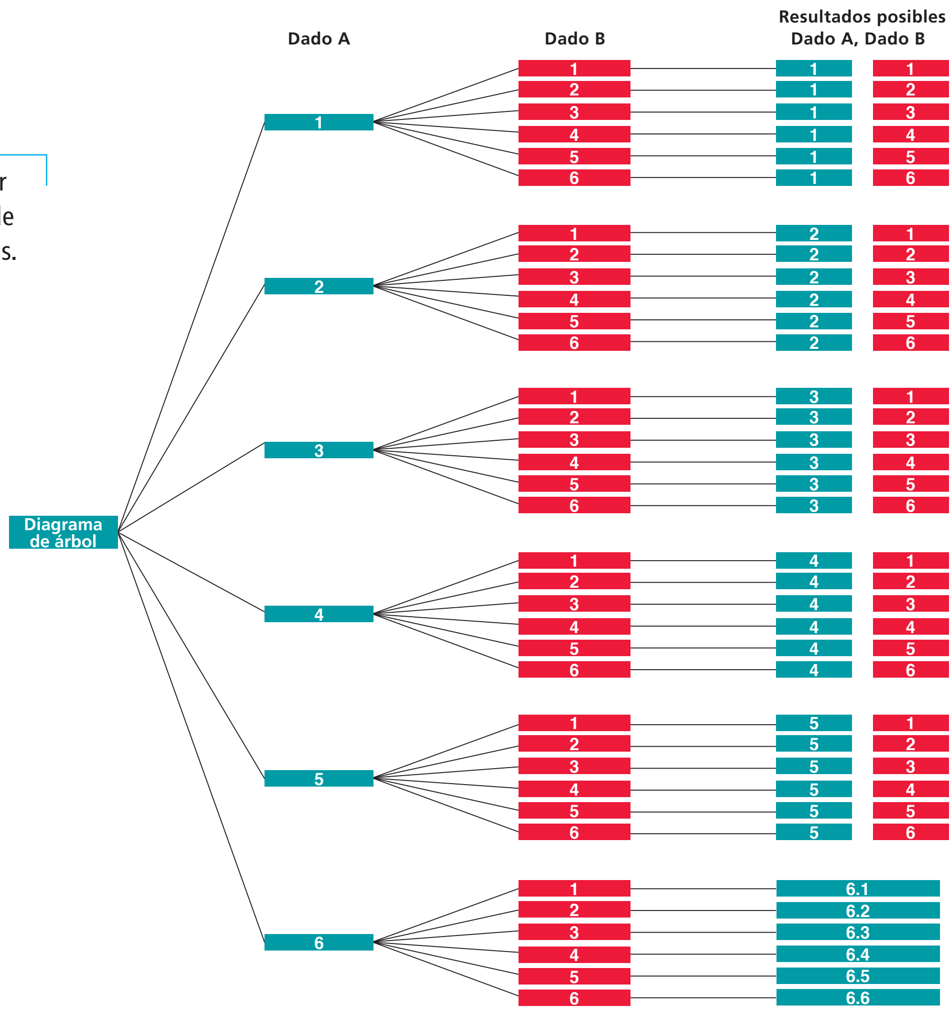
1. El siguiente diagrama de árbol muestra algunos de los resultados posibles que pueden obtenerse al lanzar dos dados una vez. Complétalo.

Propósito de la sesión. Interpretar procedimientos sistemáticos de conteo.

Organización del grupo. Se recomienda que la primera parte de la sesión se resuelva de manera individual, y que el resto se trabaje en parejas.

2

Sugerencia didáctica. Para responder a las preguntas de esta actividad, los alumnos requieren analizar la información que se muestra en el diagrama; por ello es conveniente que antes de que resuelvan de manera individual, comenten grupalmente cómo interpretan el diagrama en términos generales: cuántos niveles tiene, qué se representa en cada nivel y qué se representa en las ramas.



Propósitos del interactivo: Utilizar el diagrama de árbol como técnica de conteo en la resolución de problemas.

Respuestas.
a) 1.
b) En A cayó 1 y en B cayó 2.
c) En A cayó 6 y en B cayó 6.
d) 36 resultados diferentes.

Respuestas.
a) Son seis resultados en los que los dados caen en el mismo número: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6).
b) Son 15 resultados en los que el dado A cae un número mayor que en el dado B: (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5).
c) Son 18 resultados en los que el dado A cae en número par: (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).

Sugerencia didáctica. Usted puede retomar estas preguntas para destacar las relaciones entre algunos de los datos; por ejemplo, en los incisos b) y c) se generalizan las respuestas que obtuvieron para los incisos a), b) y c), de la actividad anterior.

Respuestas:
a) Son 9 resultados: con 1 son tres: (1,1), (1,3), (1,5), con 3 son tres: (3,1), (3,3), (3,5) y con 5 son tres: (5,1), (5,3), (5,5).
b) Son 9 resultados: con 2 son tres: (2,2), (2,4), (2,6), con 4 son tres: (4,2), (4,4), (4,6) y con 6 son tres: (6,2), (6,4), (6,6).

SECUENCIA 8

Contesta las siguientes preguntas:

a) El resultado (2,1) significa que en el lanzamiento cayó 2 en el dado A, ¿qué cayó en el dado B? ______

b) ¿Qué significa el resultado (1,2)? ______

c) ¿Y el resultado (6,6)? ______

d) ¿Cuántos resultados diferentes en total puede haber al lanzar dos dados?

______

De esos resultados, ¿en cuántos se cumplen las siguientes condiciones?:

a) “En los dos dados cae el mismo número” ______

b) “En el dado A cae un número mayor que en el dado B” ______

c) “En el dado A cae un número par” ______

Comparen sus respuestas y contesten lo que se les pide:

a) ¿Cuántos resultados hay en los que en ambos dados caen números impares?

______

b) ¿Y cuántos resultados hay en los que ambos dados caen números pares?

______

2. Ahora van a sumar los números que pueden caer en ambos dados, por ejemplo:

4 — 5 — 4 5

Dado A: 4 y dado B: 5
La suma es 4 + 5 = 9

Utilicen el diagrama de árbol para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la menor suma que puede obtenerse? ______

b) ¿Cuántas formas hay de obtenerla? ______

c) ¿Cuál es la mayor suma que puede obtenerse? ______

d) ¿Cuántas formas hay de obtenerla? ______

e) ¿Cuál es la suma que más veces aparece? ______

f) ¿Cuántos resultados hay en que la suma es menor de 7? ______

g) ¿Cuántos resultados hay en que la suma es mayor de 7? ______

102

Propósito de la actividad. Utilizar la información que proporciona el diagrama de árbol para producir otra información (por ejemplo, la suma de los resultados de ambos números).

Posibles dificultades. Esta actividad se ubica en el contexto de juegos de azar; si bien no es propósito de esta sesión que los alumnos resuelvan situaciones de probabilidad, sí es importante destacar que algunas de las dificultades que podrían tener son:

1. ¿Cómo hacer el conteo de los distintos resultados posibles para garantizar que se obtuvieron todos?
2. Podrían pensar erróneamente que hay el mismo número de combinaciones para todas las sumas que se pueden obtener al realizar el juego.
3. Sería erróneo considerar que pueden obtener 1 como suma, o que pueden obtener sumas mayores a 12. Quizá también crean que al obtener 4 + 5 ya estén considerando la combinación 5 + 4.

En caso de que se presente alguna de las dificultades anteriores, invite a los alumnos a revisar nuevamente el diagrama de árbol para identificar los diferentes resultados que pueden obtenerse.

Respuestas.
a) 2.
b) 1 forma (1, 1).
c) 12.
d) Una forma, (6, 6).
e) La que resulta 7: (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5) (1,6).
f) 15 resultados: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1).
g) 15 resultados: (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (4,4), (4,5), (4,6), (3,5), (3,6), (2,6).

3. Del diagrama de árbol se ha tomado el siguiente conjunto de resultados.

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6).

¿Qué característica tienen en común estos resultados? ______________

¿Qué característica tienen los siguientes conjuntos de resultados?

a) (1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3) ______________

b) (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5),(6,6) ______________

c) (1,3), (2,2), (3,1) ______________

d) (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) ______________

4. Las claves de larga distancia constan de tres dígitos. Supongan que el primero debe elegirse de los números del 2 al 5. El segundo tiene que ser 0 o 1. El tercero tiene que ser mayor que 5.

a) ¿Cuántas claves distintas se pueden formar? ______________

b) Elaboren tablas de doble entrada para representar los resultados. ¿Cuántas claves de larga distancia inician con 20? ______________

c) ¿Cuántas claves de larga distancia terminan con 9? ______________

d) ¿Cuántas claves de larga distancia tienen el mismo número en los 3 dígitos?

____

>>> Para saber más

Sobre otros ejemplos de problemas de conteo consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Nozaki, Akiro. *Trucos con sombreros.* México: SEP/FCE, Libros del Rincón, 2005.

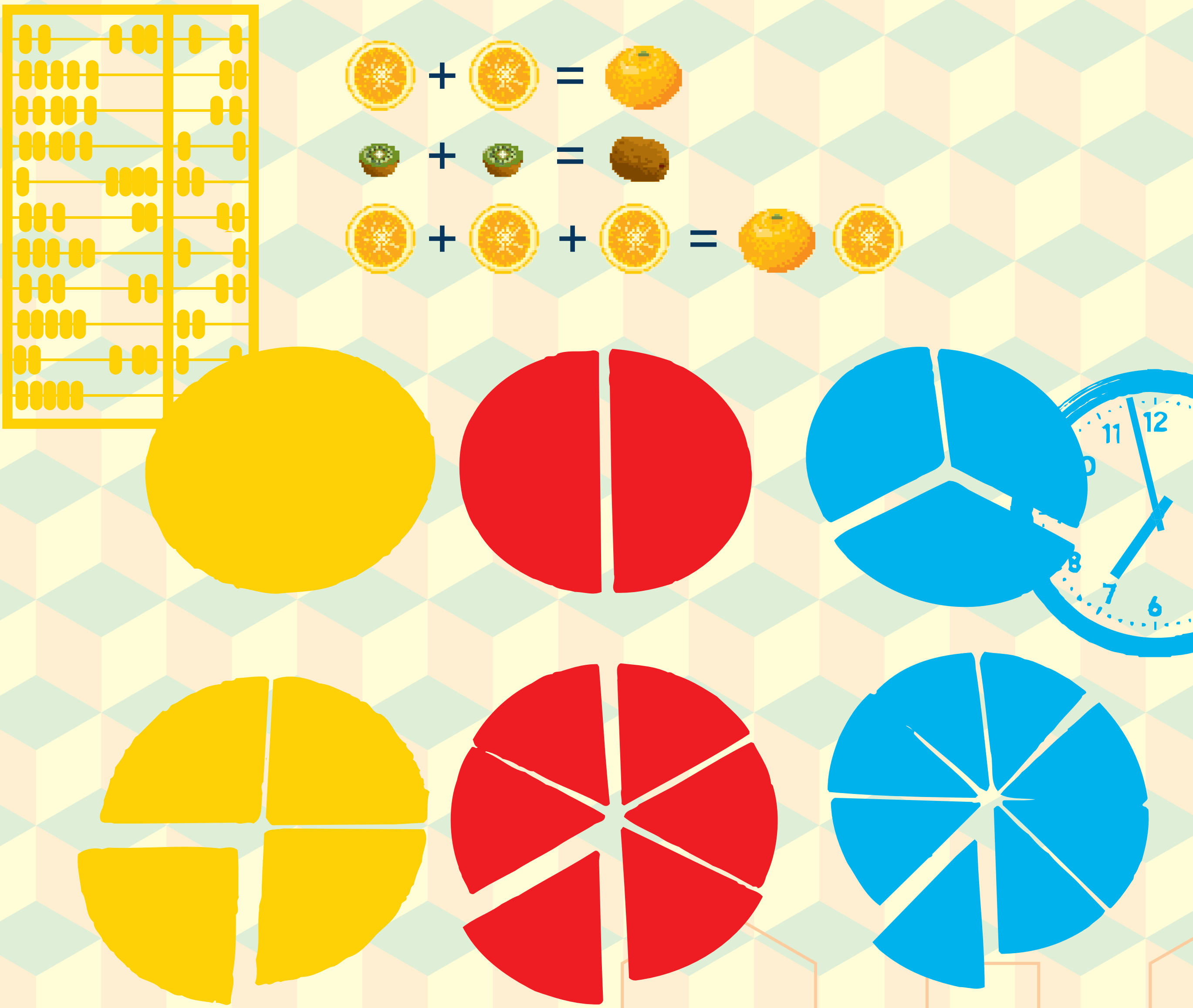
Anno, Mitsumasa. *El jarrón mágico. Una aventura matemática.* México: SEP/Editorial Juventud, Libros del Rincón, 2005.

Respuesta. En todos los resultados el dado A cayó en 4.

Respuestas.
a) En todos el dado B cayó en 3.
b) En todos, en los dos dados, cayó lo mismo.
c) En todos la suma de los dados es 4.
d) En todos la suma de los dados es 7.

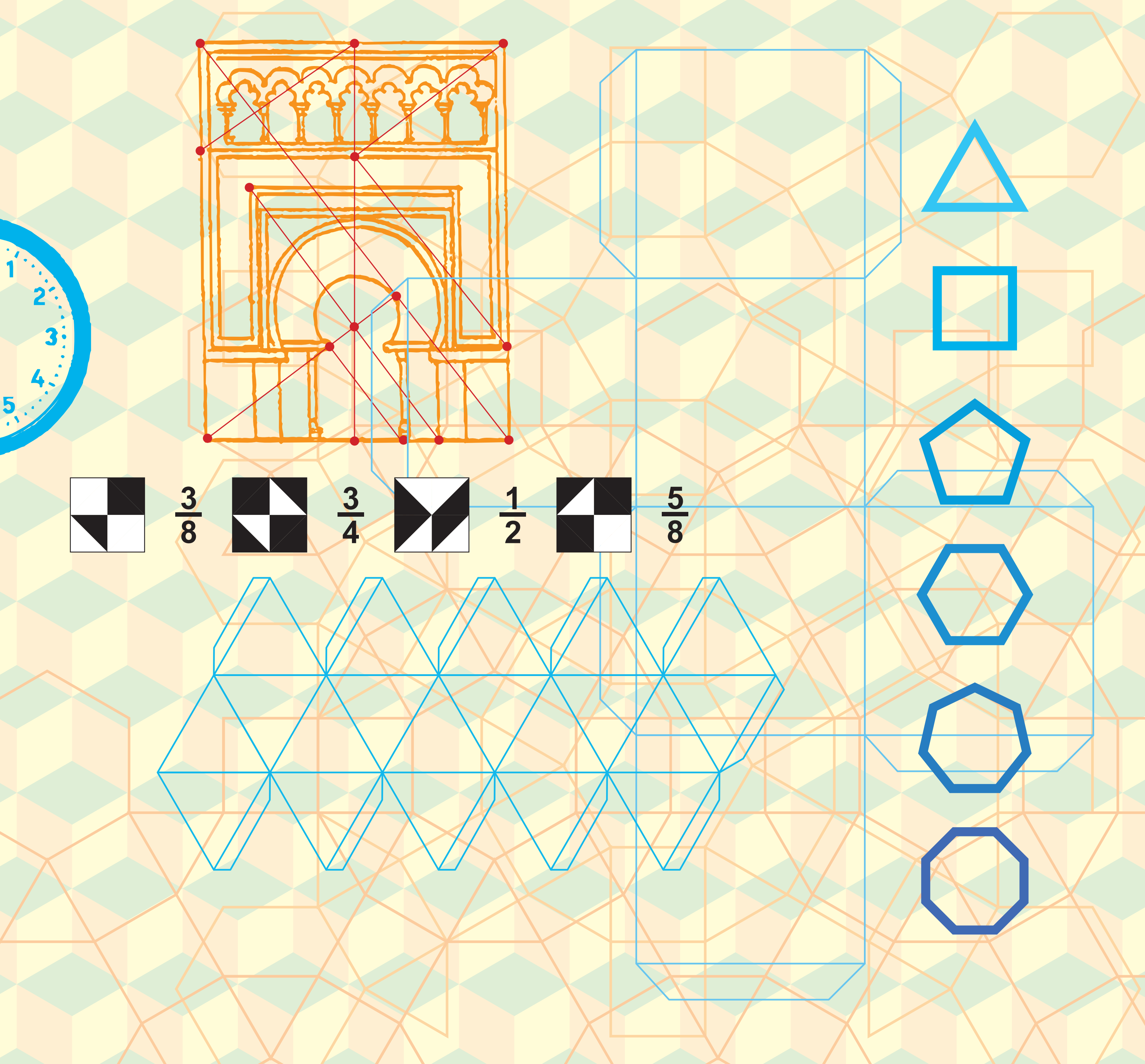
Integrar al portafolios. Si los alumnos tuvieron dificultades para resolver el problema, trabájelo nuevamente junto con ellos haciendo un diagrama de árbol y analizándolo de acuerdo con las preguntas que se plantean en esta misma actividad. Si algún alumno encontró alguna operación con la cual se puede encontrar el número total de claves que se pueden formar, pídale que la explique. Si nadie tiene ninguna operación que proponer, entonces con ayuda del diagrama de árbol pueden observar que hay 4 opciones para la primera cifra (2, 3, 4 y 5), en la segunda cifra hay 2 opciones (0 y 1) y, finalmente, en la tercera cifra hay otras 4 opciones (6, 7, 8 y 9), por lo que el número total de claves se puede obtener mediante la operación $4 \times 2 \times 4$. Como ve, este problema permite que los alumnos lo aborden utilizando alguno de los procedimientos que se estudiaron en esta secuencia, lo que nos proporciona información sobre el nivel de razonamiento combinatorio que tienen.

Respuestas.
a) 32 claves: 206, 207, 208, 209, 216, 217, 218, 219, 306, 307, 308, 309, 316, 317, 318, 319, 406, 407, 408, 409, 416, 417, 418, 419, 506, 507, 508, 509, 516, 517, 518, 519.
b) 4 claves: 206, 207, 208, 209.
c) 8 claves: 209, 219, 309, 319, 409, 419, 509, 519.
d) Ninguna.



11
12
8
7
6

BLOQUE 2



Propósito de la sesión. Resolver problemas aditivos de fracciones con distinto denominador.
Organización del grupo. Se sugiere que resuelvan en parejas las actividades, y que el apartado *Lo que aprendimos* se resuelva de manera individual.

Propósito del video. Presentar algunos ejemplos en los que son utilizadas la suma y resta de fracciones.

1

Sugerencia didáctica. Antes de que las parejas resuelvan, puede pedir que hagan un cálculo preguntándoles: "¿Creen que el grosor será más o menos de una pulgada? ¿Por qué?". En este momento no adelante respuestas, posteriormente verificarán su cálculo resolviendo el problema. Para que los alumnos tengan una mejor idea de la situación que se les plantea, puede sugerirles que utilicen una regla graduada en pulgadas y centímetros y así trabajar con los tamaños reales de las medidas de las tablas de madera.
(1 pulgada = 2.54 cm;
1 cm = 0.395 pulgadas).

SECUENCIA 9

Problemas aditivos de números fraccionarios y decimales

En esta secuencia resolverás problemas aditivos con números fraccionarios y decimales en distintos contextos

SESIÓN 1

EL FESTIVAL DE FIN DE CURSOS

>>> Para empezar

¿Dónde se utilizan las fracciones?

En ocasiones las medidas de los materiales que se utilizan en la carpintería están expresados en fracciones. Por ejemplo, el grosor de las tablas y de las brocas y la longitud de los clavos se miden en pulgadas y fracciones de pulgada.

>>> Consideremos lo siguiente

En una telesecundaria se va a realizar el festival de fin de cursos y requieren construir un templete con una base de madera que tenga un grosor de una pulgada. La escuela sólo cuenta con dos piezas de madera, una de media pulgada y otra de un tercio de pulgada.

Si se empalman estas dos piezas, ¿su grosor será suficiente? ____________

¿Cuánto faltaría o sobraría? ____________

Compare sus respuestas

106

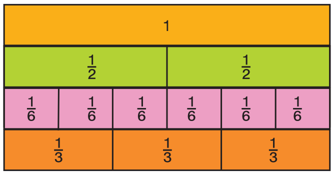
Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de los números.
Antecedentes
Desde la escuela primaria los alumnos han utilizado los algoritmos para la suma y la resta de fracciones y de números decimales. En el primer grado de la escuela secundaria se espera que para sumar y restar números fraccionarios hagan uso de la equivalencia de fracciones, del cálculo mental y la estimación consolidando su uso mediante la resolución de diversos problemas.

Propósitos de la secuencia
Resolver problemas aditivos con números fraccionarios y decimales en distintos contextos.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*El festival de fin de cursos* Resolver problemas aditivos de fracciones con distinto denominador.	Video *¿Dónde se utilizan las fracciones?* Interactivo
2	*Marcas atléticas* Comparar números decimales y fracciones con distinto denominador mediante la resta.	
3	*Los precios de la cafetería* Resolver problemas de suma y resta de números decimales.	

>>> Manos a la obra

I. Utilicen el diagrama para encontrar la suma de media pulgada más un tercio de pulgada.



a) Al empalmar las tablas, ¿cuál es su grosor? ____________

b) ¿Cuánto falta para alcanzar el grosor de la base del templete que se requiere construir? ____________

II. Contesten en sus cuadernos:

a) Si las medidas del grosor de las tablas de madera fueran $\frac{3}{4}$ de pulgada y $\frac{2}{6}$ de pulgada, ¿creen que se obtendrá el espesor deseado para construir la base del templete? ¿Cuál sería su grosor? Pueden hacer un diagrama para calcularlo. ¿Cuánto faltaría o sobraría para alcanzar el grosor de la base del templete?

b) ¿Qué fracciones equivalentes utilizaron para calcular el grosor de las tablas de $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{6}$ de pulgada?

c) Si las medidas del grosor de las tablas fueran: $\frac{1}{3}$ de pulgada y $\frac{5}{12}$ de pulgada, al empalmarlas, ¿cuál sería su grosor? ¿Cuánto faltaría o sobraría para alcanzar el grosor de la base del templete?

d) ¿Qué fracciones equivalentes utilizaron para calcular el grosor de las tablas de $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$?

e) ¿Cuál de las siguientes operaciones con fracciones equivalentes consideran que es mejor para calcular la suma de $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{6}$?

Primer caso	Segundo caso
$\frac{18}{24} + \frac{8}{24} =$	$\frac{9}{12} + \frac{4}{12} =$

f) En cada caso, ¿cómo se obtienen esas fracciones? Si efectúan las operaciones, ¿obtienen el mismo resultado?

Recuerden que:
Para sumar o restar fracciones con diferente denominador se requiere convertirlas a fracciones equivalentes con igual denominador.

107

Respuestas. Es importante que los alumnos se percaten de que en el diagrama $\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{3}{6}$, y que $\frac{1}{3}$ equivale a $\frac{2}{6}$; sumados dan $\frac{5}{6}$. Por lo tanto, las tablas no son suficientes para tener una pulgada de grosor. En el mismo diagrama puede verse que si se tienen $\frac{5}{6}$, para completar un entero hace falta $\frac{1}{6}$.

Sugerencia didáctica. Con objeto de que los alumnos se familiaricen con la equivalencia de fracciones, se sugiere utilizar el diagrama. Las sumas podrían ser $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$, $\frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ u otras.

Respuestas. Es probable que los resultados en todo el grupo no sean los mismos, pero que sí sean equivalentes. Una forma de calcular el grosor es:

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$;

$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$;

$\frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \frac{13}{12}$.

Otra forma consiste en multiplicar los denominadores entre sí para obtener un denominador común, y el numerador de una fracción por el denominador de la otra:

$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$;

$\frac{2}{6} = \frac{8}{24}$;

$\frac{18}{24} + \frac{8}{24} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}$.

Por lo tanto, el grosor sería mayor que una pulgada. La parte sobrante sería $\frac{1}{12}$.

Respuestas. Una forma de calcular el grosor es: $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$;

$\frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$, por lo tanto, las tablas no son suficientes.

La parte faltante es $\frac{3}{12}$ o $\frac{1}{4}$ (a $\frac{9}{12}$ le faltan $\frac{3}{12}$ para ser 1).

Respuestas. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, falta $\frac{1}{6}$ para tener una pulgada de espesor.

$\frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$, falta $\frac{9}{12}$ para tener una pulgada de espesor.

$\frac{3}{4} + \frac{2}{6} = \frac{13}{12}$, le sobra $\frac{1}{12}$ para tener una pulgada de espesor.
La última es la que más se acerca a la medida deseada porque $\frac{1}{12} < \frac{1}{6} < \frac{3}{12}$.

Respuestas. Hay distintas formas de resolver cada una de las sumas: sumar primero dos fracciones cuyos denominadores sean múltiplos y después sumar la tercera fracción; o multiplicar desde el principio los tres denominadores. Algunos ejemplos de resolución son los siguientes:

a) $\frac{7}{15} + \frac{2}{40} + \frac{19}{20} = \frac{56}{120} + \frac{6}{120} + \frac{114}{120} = \frac{176}{120} = \frac{22}{15}$;

b) $\frac{21}{24} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{21}{24} + \frac{15}{24} + \frac{6}{24} = \frac{42}{24} = \frac{7}{4}$;

c) $\frac{3}{4} + \frac{8}{10} + \frac{2}{15} = \frac{45}{60} + \frac{48}{60} + \frac{8}{60} = \frac{101}{60}$.

Ninguna de las sumas da 2 pulgadas o más, pero la que está más cerca de 2 pulgadas es la del inciso b).

SECUENCIA 9

III. A continuación aparecen tres opciones de empalmar dos tablas.

a) ¿Cuál se acerca más a la medida deseada de una pulgada? Expliquen su respuesta y los procedimientos que siguieron para resolverlas.

- Las de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.
- Las de $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$.
- Las de $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{6}$.

b) ¿Cuál de la siguientes opciones consideras que es mejor para calcular el grosor de las tablas de $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$?

$\frac{2}{6} + \frac{5}{12} =$

$\frac{2}{6} + \frac{10}{24} =$

$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} =$

$\frac{4}{12} + \frac{5}{12} =$

IV. Se ha decidido que el grosor de la base del templete sea de dos pulgadas empalmando tres tablas. Las siguientes sumas indican las diferentes opciones que se tendrían para construirlo. Calcúlenlas y encuentren cuál se acerca más a dos pulgadas. Comenten cómo obtuvieron la respuesta.

a) $\frac{7}{15} + \frac{2}{40} + \frac{19}{20} =$

b) $\frac{27}{24} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} =$

c) $\frac{3}{4} + \frac{8}{10} + \frac{2}{15} =$

108

Propósito del interactivo. Visualizar las operaciones de suma y resta de fracciones efectuadas a través de fracciones equivalentes.

V. Consideren que se quiere formar la base del templete con tablas cuyos grosores se señalan en cada uno de los renglones del siguiente cuadro. ¿Qué medida debe tener el grosor de la tercera tabla para construir la base del templete?

Medida del grosor de la base del templete (en pulgadas)	Grosor de la primera tabla (en pulgadas)	Grosor de la segunda tabla (en pulgadas)	Grosor de la tercera tabla (en pulgadas)
2	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$2 - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}$
3	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{6}$	$3 - \left(\frac{7}{4}\right) - \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{12}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$

>>> A lo que llegamos

Para sumar o restar dos o más fracciones que tienen diferente denominador se deben obtener fracciones equivalentes con denominador común.

- En algunas ocasiones el **denominador común** puede ser uno de los denominadores de las fracciones.

  Por ejemplo, en el siguiente caso: $\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6}$ el denominador común de 2, 3 y 6 es 6. Al expresar la operación anterior con fracciones equivalentes con igual denominador se obtiene:

  $$\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{8}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{11}{6} - \frac{2}{6} = \frac{9}{6}.$$

- En otras ocasiones el **denominador común** se puede obtener multiplicando los denominadores y convirtiendo las fracciones a fracciones equivalentes.

  Por ejemplo, para la suma $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ un denominador común se puede obtener multiplicando los denominadores: $4 \times 5 = 20$. No hay que olvidar multiplicar también los numeradores. Las fracciones equivalentes que se obtienen son:

  $$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}; \qquad \frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}.$$

  Entonces, la suma queda expresada como: $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20}$.

  Si en vez de sumarse estas fracciones se restaran, la expresión y diferencia sería:

  $$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}.$$

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban y resuelvan en su cuaderno una suma de fracciones en la que el denominador común sea uno de los denominadores de las fracciones, y otra en la que deba obtenerse multiplicando los dos denominadores.

Propósito del interactivo. Visualizar las operaciones de suma y resta de fracciones efectuadas a través de fracciones equivalentes.

Sugerencia didáctica. Es posible que los alumnos no sepan qué significan los paréntesis en las operaciones. En secuencias posteriores lo trabajarán, pero por lo pronto comente con ellos que los paréntesis son una manera de señalar que la operación que está dentro debe resolverse primero.
Respuestas. Una forma de encontrar las respuestas es convirtiendo las fracciones de cada inciso en fracciones equivalentes con denominador común.

a) $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$;

b) $(\frac{4}{8} + \frac{2}{8}) - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$;

c) $\frac{3}{6} - (\frac{2}{6} - \frac{1}{6}) = \frac{2}{6}$.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que estimen la respuesta, por ejemplo, en el caso del inciso a), ¿será mayor o menor a $\frac{1}{4}$ o a $\frac{3}{8}$? En el segundo caso pregunte si la respuesta puede ser $\frac{1}{3}$ o si será mayor o menor que $\frac{2}{3}$.
Integrar al portafolios. Estas operaciones ponen en juego los conocimientos de los alumnos sobre la suma de fracciones. Si les es difícil resolverlos, convendría trabajar más sobre las equivalencias y la búsqueda del denominador común.
Respuestas.

a) Hay que escribir las fracciones con un denominador común, por ejemplo 8, entonces $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{8}{8}$.

b) El denominador común podría ser 12, entonces $\frac{1}{12} + \frac{8}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

>>> Lo que aprendimos

1. Escribe el signo + o −, según corresponda en cada inciso.

a) $\frac{1}{2} \; \square \; \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

b) $\left(\frac{1}{4} \; \square \; \frac{1}{4}\right) \square \; \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

c) $\frac{1}{2} \; \square \; \left(\frac{1}{3} \; \square \; \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$.

2. Encuentra la fracción que falta en cada inciso.

a) $\frac{3}{8} + \frac{\square}{\square} + \frac{1}{4} = 1$.

b) $\frac{\square}{\square} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

SESIÓN 2

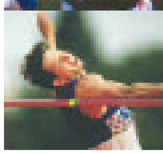
MARCAS ATLÉTICAS

>>> Para empezar

En las competencias de atletismo siempre se busca superar las marcas ya impuestas. En la medición de estas marcas los números fraccionarios y decimales tienen una función muy importante, ya que con ellos se pueden expresar con mayor precisión.

>>> Consideremos lo siguiente

El cuadro presenta las principales marcas internacionales obtenidas en el salto de altura en la categoría femenil y varonil.



Salto de altura			
Récords	**Del mundo**	**Olímpico**	**Atenas 2004**
Varonil	Javier Sotomayor (CUB) $2\frac{1}{2}$ m	Charles Austin (USA) $2\frac{2}{5}$ m	Stefan Hölm (Suecia) $2\frac{1}{3}$ m
Femenil	Stefka Kostadinova (BUL) $2\frac{9}{100}$ m	Stefka Kostadinova (BUL) $2\frac{1}{20}$ m	Hestrie Cloete (Sudáfrica) $2\frac{1}{25}$ m

110

Propósito de la sesión. Comparar números decimales y fracciones con distinto denominador mediante la resta.
Organización del grupo. La sesión entera puede ser resuelta organizando a los alumnos en parejas.

a) De las marcas obtenidas en la categoría varonil, ¿cuál es mejor, la del mundo o la olímpica? ____________ ¿Por cuánto más? ____________

b) ¿Qué distancia le faltó a Hestrie Cloete para igualar el récord olímpico? ____________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. La diferencia entre la marca del mundo y la de Atenas 2004 en la categoría varonil es: $2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}$.

a) ¿Cuál es el valor de esta diferencia? ____________

b) ¿Cuál es la diferencia entre la marca del mundo y la de Atenas 2004 dentro de la categoría femenil? Escriban cómo obtuvieron esa diferencia ____________

Recuerden que:
Un número mixto se puede convertir en una fracción impropia.
Además, para sumar o restar fracciones que tienen diferente denominador, primero se deben expresar como fracciones con igual denominador.

c) ¿Cuál es la diferencia del récord olímpico varonil con respecto a la de Stefan Hölm? ____________

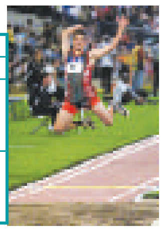
d) ¿Y cuál es la diferencia entre la marca del mundo y la olímpica en la categoría femenil? ____________

e) Expliquen cómo calcularon la diferencia entre la marca del mundo y la olímpica en la categoría femenil ____________

f) ¿Cuál es la diferencia entre la marca mundial y la marca de Hestrie Cloete? ____________ ¿Y la diferencia entre la marca olímpica y la marca de Hestrie Cloete? ____________

II. Utilicen la información del cuadro de marcas de salto de longitud para responder las siguientes preguntas:

Salto de longitud			
Récords	**Del mundo**	**Olímpico**	**Atenas 2004**
Varonil	Mike Powell (EEUU) $8\frac{19}{20}$ m	Bob Beamon (EEUU) $8\frac{9}{10}$ m	Dwight Phillips (EEUU) 8. 59 m
Femenil	Galina Chistyakova (URSS) $7\frac{13}{25}$ m	Jackie Joyner-Kersee (EEUU) $7\frac{2}{5}$ m	Tatiana Lebedeva (URSS) 7.07 m



111

Sugerencia didáctica. Los alumnos pueden recurrir a distintos procedimientos para la comparación de fracciones, por ejemplo: ubicarlas en la recta, obtener fracciones equivalentes o compararlas mediante productos cruzados.
Probablemente no todos los alumnos resuelvan correctamente el problema; en el siguiente apartado tendrán oportunidad de hacer las correcciones necesarias.

Posibles procedimientos.

a) Se resta $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.
También al restar los números mixtos obtenemos:
$\frac{5}{2} - \frac{7}{3} = \frac{15}{6} - \frac{14}{6} = \frac{1}{6}$.

b) Se resta $\frac{9}{100} - \frac{1}{25} = \frac{9}{100} - \frac{4}{100} = \frac{5}{100}$ y se simplifica a $\frac{1}{20}$.
También puede hacerse restando los números mixtos, obtenemos:
$\frac{209}{100} - \frac{51}{25} = \frac{209}{100} - \frac{204}{100} = \frac{5}{100}$.

c) Se resta $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$.
O se restan los números mixtos:
$2\frac{2}{5} - 2\frac{1}{3} = \frac{12}{5} - \frac{7}{3} = \frac{36}{15} - \frac{35}{15} = \frac{1}{15}$.

d) Se resta
$2\frac{9}{100} - 2\frac{1}{20} = 2\frac{9}{100} - 2\frac{5}{100} = \frac{4}{100}$.
Se simplifica a $\frac{1}{25}$ También se pueden convertir a fracciones impropias, $\frac{209}{100} - \frac{205}{100} = \frac{4}{100}$.
Algunos alumnos podrían decidir hacer las operaciones con números decimales 2.09 – 2.05 = 0.04.

f) La diferencia entre la marca mundial y la marca de Cloete ya se calculó: $\frac{1}{20}$. Y la de la marca olímpica y la de Cloete es:
$\frac{41}{20} - \frac{51}{25} = \frac{205}{100} - \frac{204}{100} = \frac{1}{100}$,
o bien,
$2\frac{1}{20} - 2\frac{1}{25} = \frac{1}{20} - \frac{1}{25} =$
$= \frac{5}{100} - \frac{4}{100} = \frac{1}{100}$.

Respuestas. Se busca un denominador común $8\frac{9}{10} - 7\frac{4}{10} = 1\frac{5}{10} = 1\frac{1}{2}$, o bien se escribe como fracción impropia $\frac{89}{10} - \frac{74}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$, o con números decimales $8.9 - 7.4 = 1.5$. Permita que los alumnos decidan de qué manera encontrar la diferencia. Si cometen errores podrán corregirlos más adelante.

3

Sugerencia didáctica. Si en el grupo hubo varias formas de calcular la diferencia, comenten si los resultados $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{10}$, 1.5 u otra diferencia equivalente son números distintos o si son distintas maneras de expresar el mismo número. Para algunos alumnos puede ser difícil imaginar que un número pueda expresarse de distintas formas porque en su experiencia con los números naturales un número sólo tiene una manera de expresarse. Para comprenderlo podría serles útil hacer representaciones gráficas como el sombreado de áreas o la ubicación en la recta.

Respuestas. Hay que escribir 7.07 como $7\frac{7}{100}$, entonces queda $7\frac{2}{5} - 7\frac{7}{100}$. Para hallar un denominador común el Libro del alumno sugiere convertir los quintos en centésimos: $7\frac{40}{100} - 7\frac{7}{100} = \frac{33}{100}$.

Recuerden que:
Un número decimal se puede expresar como una fracción.
Por ejemplo:
$1.5 = 1\frac{5}{10} = \frac{15}{10}$.

a) ¿Cuál es la diferencia entre la marca olímpica varonil y la marca olímpica femenil? ______

Una forma de calcular esa diferencia es expresar las fracciones que tienen diferente denominador como fracciones con igual denominador.

b) Completen la resta: $8\frac{9}{10} - 7\frac{2}{5} = 8\frac{9}{10} - 7\frac{\square}{10}$

c) Luego, se restan enteros y fracciones por separado:

$8 - 7 = \boxed{}$ y $\frac{9}{10} - \frac{\square}{10} = \frac{\square}{\square}$

d) El resultado es: $1 + \frac{\square}{10} = 1\frac{\square}{10}$

e) ¿Cuál es la operación que permite calcular la diferencia entre la marca olímpica y la de Atenas 2004 en la categoría femenil?

______

A continuación se muestra una manera de calcular la diferencia: $7\frac{2}{5} - 7.07$. Complétenla:

$7\frac{2}{5} - 7.07 = 7\frac{2}{5} - 7\frac{7}{\square} = 7\frac{40}{\square} - 7\frac{7}{\square} = \frac{\square}{\square}$

f) La marca juvenil varonil de salto de longitud no aparece en esta tabla, pero es medio metro menor que la obtenida en Atenas 2004. ¿Cuál es la marca juvenil?

______

g) ¿Cuánto le faltó a Dwight Phillips para romper el récord olímpico? ______

______

h) ¿Cuánto le faltó a Tatiana Lebedeva para romper el récord olímpico? ______

______

i) ¿Quién estuvo más cerca de romper el récord olímpico: Dwight Phillips o Tatiana Lebedeva? ______

112

Posibles procedimientos. Para responder a estas preguntas los alumnos necesitan hacer operaciones entre números decimales y fracciones. Podrían optar por escribir las fracciones como números decimales o viceversa.

f) La marca de Atenas 2004 es de 8.59 y la juvenil es $\frac{1}{2}$ m menos:

$8.59 - 0.5 = 8.09$, o también

$8\frac{59}{100} - \frac{50}{100} = 8\frac{9}{100}$.

g) El récord olímpico es $8\frac{9}{10}$ m y Phillips saltó 8.59 m:

$8.9 - 8.59 = 0.31$, o también

$8\frac{90}{100} - 8\frac{59}{100} = \frac{31}{100}$.

h) El récord olímpico es de $7\frac{2}{5}$ y el de Lebedeva es 7.07 m:

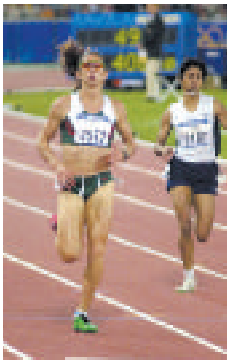
$7.4 - 7.07 = 0.33$, o también

$7\frac{2}{5} - 7\frac{7}{100} = 7\frac{40}{100} - 7\frac{7}{100} = \frac{33}{100}$.

i) Phillips, porque $\frac{31}{100} < \frac{33}{100}$.

III. Los siguientes resultados son los que obtuvo Ana Gabriela Guevara en los Juegos Olímpicos de Atenas 2004 al correr los 400 metros planos.

1ª Ronda	$50\frac{93}{100}$ segundos
Semifinal	$50\frac{3}{25}$ segundos
Final	49.56 segundos



a) ¿Qué diferencia hay entre el tiempo de la primera ronda y el de la final? ____________

b) Si el primer lugar registró $49\frac{41}{100}$ segundos, ¿qué diferencia hay entre el tiempo de Ana en la final y el del primer lugar?

____

>>> A lo que llegamos

Las operaciones de suma y resta de números mixtos se pueden hacer de dos formas:

- **La suma (o resta) de números mixtos se pueden separar en dos sumas (o restas): la de las partes enteras y la de las partes fraccionarias. Después estos dos resultados se deben sumar para obtener el resultado final.**
  Por ejemplo:

$$8\tfrac{9}{10} + 2\tfrac{2}{5} = \underbrace{8 + 2}_{\text{Suma enteros}} + \underbrace{\tfrac{9}{10} + \tfrac{2}{5}}_{\text{Suma fracciones}} = 10 + \tfrac{9}{10} + \tfrac{4}{10} = 10 + \tfrac{13}{10} = \underbrace{10 + 1\tfrac{3}{10}}_{\text{Suma enteros + Suma fracciones}} = 11\tfrac{3}{10}.$$

- **Otra forma de sumar o restar números mixtos consiste en convertirlos a fracciones impropias. Luego, las fracciones impropias se transforman en fracciones equivalentes con denominador común para poder efectuar la operación de suma o resta:**

Por ejemplo: $$8\tfrac{9}{10} + 2\tfrac{2}{5} = \underbrace{\tfrac{89}{10} + \tfrac{12}{5}}_{\text{Suma de fracciones impropias}} = \underbrace{\tfrac{89}{10} + \tfrac{24}{10}}_{\text{Suma de fracciones equivalentes}} = \tfrac{113}{10} = 11\tfrac{3}{10}.$$

Posibles procedimientos.

a) Se pueden escribir todas las cantidades como números decimales y luego hacer restas para compararlas.

$50\frac{93}{100} = 50.93$,

se efectúa la resta:

$50.93 - 49.56 = 1.37$

También se pueden escribir como fracciones.

$49.56 = 49\frac{56}{100}$, se hace la resta:

$50\frac{93}{100} - 49\frac{56}{100} = \frac{137}{100}$ o $1\frac{37}{100}$.

b) $49.56 - 49\frac{41}{100}$;

con decimales

$49.56 - 49.41 = 0.15$;

con fracciones:

$49\frac{56}{100} - 49\frac{41}{100} = \frac{15}{100}$.

5

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que copien esta información en una cartulina o papel grande y que la peguen en el salón.

Respuestas y posibles procedimientos.

a) El primero, porque $9\frac{1}{3} > 8\frac{4}{5}$.

b) Restamos $9\frac{1}{3} - 8\frac{4}{5} = \frac{28}{3} - \frac{44}{5} = \frac{140}{15} - \frac{132}{15} = \frac{8}{15}$ de metro por segundo. Si se intenta hacer la resta entre los enteros por un lado y las fracciones por otro, puede haber confusión. De la resta de enteros el resultado es 1, pero al restar las fracciones se obtendría $\frac{1}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{7}{15}$.
Esos $\frac{7}{15}$ habría que restárselos al entero (que es el resultado de 9 − 8), obteniendo $1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

Respuestas y posibles procedimientos.

a) Se suma $6\frac{1}{2} + 8\frac{7}{10} = \frac{13}{2} + \frac{87}{10} = \frac{65}{10} + \frac{87}{10} = \frac{152}{10}$. Se reduce a $\frac{76}{5}$ y se pasa a número mixto: $15\frac{1}{5}$. También puede sumarse por separado 8 + 6 y $\frac{1}{2} + \frac{7}{10}$.
Al final se suman los dos resultados.

b) Restamos
$16\frac{1}{4} - 15\frac{1}{5} = \frac{65}{4} - \frac{76}{5} = \frac{325}{20} - \frac{304}{20} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$. Otra forma es observar que a $15\frac{1}{5}$ le faltan $\frac{4}{5}$ para ser 16; agregamos $\frac{1}{4}$ más y se suma $\frac{4}{5} + \frac{1}{4}$.

Respuestas.

a) $7 + \frac{4}{28} + \frac{21}{28} = 7 + \frac{25}{28} = 7\frac{25}{28}$;

b) $\frac{23}{6} - \frac{5}{3} = \frac{23}{6} - \frac{10}{6} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$;

c) $\frac{25}{20} + \frac{202}{100} = \frac{125}{100} + \frac{202}{100} = \frac{327}{100} = 3\frac{27}{100}$.

>>> Lo que aprendimos

1. Un corredor va a una velocidad de $9\frac{1}{3}$ metros por segundo. Otro a $8\frac{4}{5}$ metros por segundo.

   a) ¿Quién de los dos corre más rápido? ______

   b) ¿Por cuántos metros por segundo? ______

2. En el tanque de gasolina de una motocicleta hay $6\frac{1}{2}$ litros. Se agregaron $8\frac{7}{10}$ litros.

   a) ¿Cuánta gasolina hay ahora en el tanque? ______

   b) Si en el tanque caben $16\frac{1}{4}$ litros, ¿cuánto más se puede agregar? ______

3. Completa las siguientes operaciones.

   a) $5\frac{1}{7} + 2\frac{3}{4} = 5 + 2 + \frac{1}{7} + \frac{3}{4} = \square + \frac{4}{\square} + \frac{\square}{28} = 7 + \frac{25}{\square} = \square$

   b) $3\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3} = \frac{23}{\square} - \frac{5}{3} = \frac{\square}{6} - \frac{10}{\square} = \frac{13}{6} = 2\frac{\square}{6}$

   c) $1\frac{5}{20} + 2.02 = \frac{25}{\square} + \frac{\square}{100} = \frac{\square}{100} + \frac{202}{\square} = \frac{327}{\square} = 3\frac{27}{\square}$

SESIÓN 3

LOS PRECIOS DE LA CAFETERÍA

>>> Para empezar

Hay diversas situaciones en las que se requiere realizar operaciones de adición y sustracción de decimales, como la compra y venta de artículos.

>>> Consideremos lo siguiente

La carta de alimentos que ofrece una cafetería es la siguiente:

Sopas		Guisados		Bebidas	
Sopa de pasta	\$ 9.50	Milanesa	\$32.50	Agua de sabor	\$ 8.75
Consomé de pollo	\$15.50	Pollo frito	\$25.80	Agua embotellada	\$12
Crema de champiñones	\$ 20	Filete de pescado	\$30.50	Refresco	\$12.25
		Pechuga asada	\$ 27.25	Jugo de naranja	\$14.50
		Enchiladas	\$ 25	Café	\$10.50

Propósito de la sesión. Resolver problemas de suma y resta de números decimales.
Organización del grupo. La sesión se trabaja en parejas, excepto el apartado *Lo que aprendimos*, que es individual.

Dos personas ordenaron sopa, guisado y bebida para cada quien. La primera persona ordenó como guisado unas enchiladas y de bebida un café; la otra persona pidió como sopa un consomé de pollo. Cuando terminaron de comer pidieron la cuenta y pagaron con un billete de $100. La caja registradora marcó $3.50 de cambio. Si todos los alimentos que pidieron eran diferentes:

a) ¿Qué sopa ordenó la primera persona? ________

¿El costo de la sopa fue mayor o menor a $15? ________

b) ¿Qué guisado y bebida ordenó la segunda persona? ________

c) Si hubieran pedido cuentas separadas, ¿cuánto tendría que pagar cada persona?

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En su cuaderno, encuentren el costo de las siguientes comidas:

a) Jugo, sopa de pasta y filete de pescado.

b) Refresco, crema de champiñones y milanesa.

c) Agua de sabor, sopa de pollo y pechuga asada.

d) ¿Cuánto debe pagar una persona si sus alimentos son los más caros de la carta?

e) Y si se piden los alimentos más baratos, ¿cuánto se debe pagar?

II. Una persona ordena los siguientes alimentos: sopa de pasta $9.50, filete de pescado $30.50 y refresco $12.25.

a) Sin realizar operaciones, marquen la respuesta que dé la mejor estimación de lo que tendrá que pagar y escriban por qué.

Entre $30 y $60 Más de $50 Menos de $100 Más de $100

____

b) Para saber cuánto tenía que pagar realizó la siguiente operación:

```
     9.50
+   30.50
    12.25
   ------
    52.25
```

Pero en la caja le cobraron $137.75, ¿quién está equivocado? ________

¿Cuál es el error? ________

c) Escriban en su cuaderno la forma correcta de calcular el costo de lo que consumió esta persona.

115

Respuestas. Para poder responder hay que fijarse en los datos que ya conocemos.

- Sabemos que pagaron $96.50.
- La primera persona ordenó enchiladas y café ($35.50).
- La segunda persona ordenó consomé de pollo ($15.50).
- Lo que sabemos que ordenaron las dos persona suma $51. Entonces nos falta encontrar sopa, guisado y bebida por $45.50 (además de que no se puede repetir lo que ya tenemos).
- La sopa de la segunda persona no puede ser crema de champiñones porque sumando su costo ($20) al pollo frito (que es el más barato después de las enchiladas) se pasa de los $45.50, así que es una sopa de pasta ($9.50).
- Nos hace falta juntar $36 entre guisado y bebida. La única opción es con pechuga asada y agua de sabor.

Primera persona: sopa de pasta, enchiladas y café ($45).

Segunda persona: consomé de pollo, pechuga asada y agua de sabor ($51.50).

Sugerencia didáctica. Saber hacer cálculos resulta muy útil en la escuela y fuera de ella, por lo que se recomienda practicarlo frecuentemente. Cuando proponga un problema a sus alumnos puede preguntarles, antes de que lo resuelvan, cuál creen que será el resultado o entre qué números suponen que se encontrará.

Respuesta. El error fue colocar el 9 (de 9.50) en la misma columna que el 3 (de 30.50) y el 1 (de 12.25). El 9 debería estar en la columna de las unidades y no en la de las decenas.

Sugerencia didáctica. Los errores en las sumas y restas, cuando las cantidades tienen punto decimal, son comunes. Se deben principalmente a la errónea colocación del punto al alinear las cantidades para sumarlas o restarlas, lo que da lugar a que, por ejemplo, se coloquen unidades en la columna de las decenas. El error es todavía más frecuente cuando las cantidades que se van a sumar o restar tienen distinto número de cifras decimales.

Lean con cuidado la información que aparece en la siguiente página, y proponga a sus alumnos sumas con cantidades decimales que tengan distinto número de cifras para que practiquen.

Sugerencia didáctica: Las respuestas a los incisos a) y b) pueden ser distintas pues hay varias posibilidades correctas para cada uno de los casos. Mientras las parejas resuelven, invítelas a buscar si hay otra respuesta diferente a la que ya encontraron.

III. A continuación se da el costo de dos comidas. Averigüen qué pudo haberse pedido en cada caso. Consideren que el costo total corresponde a una sopa, un guisado y una bebida.

a) Costo total $53.75 ____________________

b) Costo total $49.80 ____________________

c) Para encontrar los costos de los alimentos que pudieron haberse pedido, un alumno decide restar a 53.75 el precio de un agua de sabor, que es de $8.75, ¿cómo debe acomodar las cifras de estas cantidades para poder realizar correctamente la operación?

____

____

d) Efectúen, en su cuaderno, las operaciones que necesitan realizar en cada inciso.

Para realizar la adición con números decimales en forma vertical, se procede igual que la adición con enteros, sólo que se requiere cuidar que todos los sumandos estén alineados a partir del punto decimal para identificar cada posición. Se suman décimos con décimos, centésimos con centésimos, y así sucesivamente.

Ejemplo:

Punto decimal

Unidades Décimos

Decenas Centésimos

Agua de sabor		8 . 7 5
Consomé de pollo	+	1 5 . 5 0
Enchiladas		2 5 . 0 0
		4 9 . 2 5

Cuando un sumando tiene menos cifras decimales que otro, se pueden colocar ceros en esas posiciones para alinearlas. Por ejemplo, 25 es igual a 25.00

IV. Formen dos parejas.

Una pareja elige una sopa, un guisado y una bebida y se lo dicen a la otra pareja de alumnos.

La otra pareja tiene un minuto para encontrar los alimentos que eligieron sus compañeros (sopa, guisado y bebida). Gana un punto si lo logra. Si no encuentra los alimentos, gana la primera pareja. Ahora la segunda pareja elige una sopa, un guisado y una bebida. Deben realizar cuatro rondas.

>>> Lo que aprendimos

Completa la nota de consumo de la cafetería que se encuentra a la derecha.

a) ¿Qué guisado se ordenó? ____________

b) Si el cambio fue de $15.00, ¿con qué billetes se pagó?

____

NOTA DE CONSUMO

Pedido No. 1850

Cliente:

Concepto		Precio
Consomé de pollo	$	
	$	27.25
	$	
TOTAL	$	55.00
Pago	$	
Cambio	$	15.00

Para restar números decimales se requiere cuidar la colocación de las cifras. Si no hay la misma cantidad de cifras decimales se agregan ceros para igualarla. Posteriormente se restan y se "baja" el punto decimal.

Ejemplo:

Pago con:	**100.00**
Costo total:	**– 64.75**
	35.25

>>> Para saber más

Sobre las marcas atléticas consulta:
http://www.el-mundo.es/jjoo/2004/resultados/2206.html
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

117

Sugerencia didáctica. Diga a los alumnos que en su respuesta incluyan la operación u operaciones que permitan verificar su solución. Esto puede ser útil para practicarlas y para darse cuenta de posibles errores.

Integrar al portafolios. Para contestar estas dos preguntas los alumnos deben hacer operaciones con decimales. Si les cuesta trabajo regresen al apartado *Manos a la obra* de esta sesión.

Respuestas.

a) Ordenó consomé de pollo, ($15.50), pechuga de pollo, ($27.50) y refresco ($12.50).

b) Pagó $70, porque 70 – 55 = 15.

Sugerencia didáctica. Practiquen la resolución de restas con números decimales en las que haya que agregar ceros para igualar la cantidad de cifras. Por ejemplo 9.1 – 2.458 o 33.07 – 20.8.

Propósito de la sesión. Resolver problemas que implican a la fracción como operador multiplicativo.

Organización del grupo. Se recomienda trabajar en parejas durante toda la sesión, y de manera individual el apartado *Lo que aprendimos*.

Propósito de la actividad. Que los alumnos resuelvan un problema que implica la multiplicación por una fracción, recurriendo a un procedimiento que puede resultarles familiar: por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de 24 puede resolverse dividiendo 24 entre 4 y multiplicando por 3. Se espera que los alumnos generen diferentes procedimientos de resolución que les permitan identificar qué sucede con la multiplicación de una fracción por un entero.

Posibles procedimientos. Los alumnos pueden usar varias formas para calcular la cantidad que se debe pagar para cada caso, incluso es posible que recurran al cálculo mental en varias de las situaciones.

SECUENCIA 10

Multiplicación y división de fracciones

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen la multiplicación y división con números fraccionarios en distintos contextos.

SESIÓN 1

DE COMPRAS EN EL MERCADO

>>> Para empezar

Seguramente, en algunas ocasiones, te ha tocado ir de compras al mercado y tal vez has comprado mercancías como frutas, verduras, carne, tortillas, etcétera.

>>> Consideremos lo siguiente

Una persona compró en el mercado las siguientes mercancías para su despensa.

Mercancías	Cantidad de kilogramos	Precios por kilogramo
Cebollas	3	$6
Jitomates	$2\frac{1}{2}$	$9
Carne	$\frac{1}{4}$	$64
Fresas	$\frac{3}{4}$	$24

a) ¿Por cuál de las cuatro mercancías pagó más? _______________

b) ¿Cuánto pagó en total? _______________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Consideren los precios de las mercancías dados en la tabla para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto cuesta el kilogramo (kg) de cebolla? _______________

b) Si compran tres veces esa cantidad de cebollas, es decir 3 kg, ¿cuánto deben pagar?

____

118

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema
Significado y uso de las operaciones.
Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos no trabajaron la multiplicación y división de fracciones, por lo que éste constituye un nuevo conocimiento. El tipo de situaciones que se les plantea en esta secuencia se ubican en el contexto de la proporcionalidad; es decir, se trata de situaciones en las que los alumnos deben establecer una relación proporcional entre dos magnitudes y decidir cuál de estos términos se va a calcular. La resolución de esas situaciones implica la multiplicación o división de fracciones.

Propósitos de la secuencia
Resolver problemas que impliquen la multiplicación y división con números fraccionarios en distintos contextos.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*De compras en el mercado.* Resolver problemas que implican a la fracción como operador multiplicativo.	Video *¿Dónde se utilizan las fracciones?* Interactivo
2	*Superficies y fracciones.* Multiplicar números fraccionarios a partir del cálculo del área de rectángulos cuyos lados son medidas fraccionarias. Conocer el algoritmo de la multiplicación de fracciones.	Interactivo
3	*¿Cómo serían las marcas atleticas en el espacio?* Interpretar que significa multiplicar una fracción por un entero, una fracción por otra y analizar el producto cuando éste es mayor o menor que las fracciones que se multiplican.	
4	*Hay tela de donde cortar.* Resolver problemas que impliquen la división de fracciones. Interpretar y dar significado a dividir un entero entre una fracción, un número mixto y una fracción. Relacionar la división de fracciones con la multiplicación de un entero o fracción por el recíproco del otro factor (fracción).	Video *El sistema solar y la fuerza de gravedad* Interactivo
5	*¿Cuántas botellas de jugo se necesitan?* Resolver problemas que implican una división de fracciones y analizar el resultado, es decir, identificar cuándo es mayor o menor que los números que se están operando.	

c) ¿Cuánto cuesta el kg de jitomate? ______

d) Si compran dos kg de jitomate, ¿cuánto deben pagar? ______

e) ¿Y si compran medio kg de jitomate? ______

Para saber cuánto pagó esa persona por el jitomate debe calcularse cuánto es 2 veces 9 pesos más la mitad de 9 pesos, es decir:

$$\underbrace{9 + 9}_{\text{2 veces 9}} + \underbrace{4.50}_{\text{la mitad de 9}}$$

2 veces 9 + la mitad de 9.

f) ¿Cuánto deben pagar por $2\frac{1}{2}$ kg de jitomates? ______

g) ¿Cuánto pagarían por $3\frac{1}{2}$ kg de cebolla? ______

Para saber cuánto cuestan 3 kg de cebollas, multiplicas 3 × 6. De la misma manera, para calcular el costo de $2\frac{1}{2}$ kg de jitomates habrá de multiplicar $2\frac{1}{2} \times 9$.

h) Un kg de carne cuesta $64. ¿Cuánto deben pagar por $\frac{1}{4}$ de kilogramo de carne?

______

i) ¿Cuánto cuesta $\frac{1}{4}$ de kg de fresas? ______ ¿Y cuánto pagas por $\frac{3}{4}$ de kg? ______

j) Si por $\frac{1}{4}$ de kg de fresas pagan 6 pesos, ¿cuánto dinero pagarían por $\frac{3}{4}$ de kg de fresas?

______

II. Anoten en la siguiente tabla la cantidad de dinero que pagó esa persona por cada mercancía que compró.

Mercancías	Cantidad de kilogramos	Cantidad de dinero a pagar
Cebollas	3	
Jitomates	$2\frac{1}{2}$	
Carne	$\frac{1}{4}$	
Fresas	$\frac{3}{4}$	

119

Propósito de la actividad. Los procedimientos que se presentan para algunas de las mercancías (como en el caso de los jitomates), tienen la finalidad de que los alumnos identifiquen otra forma de interpretar la relación entre el número fraccionario y el número entero: $2\frac{1}{2} \times 9$ es igual a dos veces 9, más la mitad de 9. Otra forma de interpretarlo es dos veces y media el número 9.

Propósito de la actividad: Identificar que la situación implica calcular "cuántas veces" una cantidad cabe en otra. Así, si $\frac{3}{4}$ de kilo es 3 veces más $\frac{1}{4}$ de kilo, el costo de los $\frac{3}{4}$ también será 3 veces que el que corresponde a $\frac{1}{4}$.

Sugerencia didáctica. Otra forma de resolver es la que se muestra en el caso de las fresas. Para ese procedimiento es importante que a los alumnos les quede clara la expresión "por $\frac{1}{4}$ de fresas se pagan 6 pesos": si un kilo cuesta $24, entonces un cuarto de kilo costará la cuarta parte de $24; esto se expresa con la fracción $\frac{24}{4}$ (es decir, $6). Siguiendo este procedimiento, el costo que corresponde a $\frac{3}{4}$ de kilo de fresa, es: $\frac{24}{4} + \frac{24}{4} + \frac{24}{4} = \frac{72}{4} = 18$, que equivale a $6 + 6 + 6 = 18$, o $\frac{24}{4} \times 3$, que también puede ser 6×3.

Sugerencia didáctica. Pida a las parejas que comparen sus resultados con los que obtuvieron en el apartado *Consideremos lo siguiente.*

Sugerencia didáctica. Mientras los alumnos resuelven, trate de identificar los procedimientos que emplean. En el momento de la confrontación dé prioridad a aquellos procedimientos que recurren a la multiplicación de manera más clara; en caso de no presentarse ninguno, elija aquellos que permitan su generación, por ejemplo, 16 + 16 + 16 puede plantearse como 16 × 3.

2

Sugerencia didáctica. Algo que usted puede resaltar de la tabla, es que la expresión $\frac{1}{4}$ de 6, equivale a multiplicar $\frac{1}{4} \times 6$, como se expresa en la penúltima columna. Comente que hay varias formas de resolver esa multiplicación y que ellos emplearon algunas al resolver el apartado *Consideremos lo siguiente*.

Para recordar. Las fracciones pueden tener distintos significados de acuerdo con las situaciones en las que se ponen en juego. En este caso, la fracción aparece multiplicando a otro número; es un operador multiplicativo.

En la escuela primaria los alumnos asociaron la multiplicación con la obtención de un producto que es más grande que cualquiera de los factores. Ahora verán que cuando uno de los factores es un número fraccionario, el producto es menor, a excepción de cuando el operador multiplicativo es una fracción impropia ($\frac{5}{2} \times 6$, por ejemplo).

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos por qué sólo en el último caso de la tabla el producto es mayor que el número entero ($6). Una forma de explicarlo es la siguiente: al multiplicar una fracción propia por cualquier número, el producto es menor que ese número porque se toma sólo una parte de él; si se multiplica una fracción impropia por cualquier otro número, el producto es mayor que este número, porque se toma más de una vez.

a) ¿Por cuál de las cuatro mercancías pagó más dinero? ____________

b) Sumen la cantidad de dinero que pagó esa persona por las cuatro mercancías, ¿cuánto pagó en total? ____________

Comparen sus respuestas y comenten:

Si en vez de comprar $\frac{1}{4}$ de kg de carne, la persona compra $\frac{3}{4}$ de kg, ¿cuánto debe pagar?

>>> A lo que llegamos

Observen que el cálculo de la cantidad a pagar por una mercancía se puede interpretar de la siguiente manera:

Mercancía y precio	Cantidad de kilogramos que se compraron	Se calcula encontrando	Esto puede escribirse como	Cantidad de dinero a pagar
Cebollas $6 el kg	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ de 6 pesos	$\frac{1}{4} \times 6$	$1.5
	$\frac{3}{4}$	3 veces $\frac{1}{4}$ de 6 pesos	$\frac{3}{4} \times 6$	$4.5
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ de 6 pesos	$\frac{1}{3} \times 6$	$2
	$\frac{2}{3}$	2 veces $\frac{1}{3}$ de 6 pesos	$\frac{2}{3} \times 6$	$4
	$\frac{5}{2}$	5 veces $\frac{1}{2}$ de 6 pesos	$\frac{5}{2} \times 6$	$15

>>> Lo que aprendimos

1. En una escuela, 240 alumnos presentaron un examen.

a) Si de estos 240 alumnos sólo aprobaron las $\frac{3}{5}$ partes, ¿cuántos lo aprobaron?

____

b) Si $\frac{2}{6}$ de los alumnos que aprobaron son mujeres, ¿cuántas mujeres aprobaron?

____

Posibles procedimientos.

a) Hay al menos dos formas en que los alumnos podrían resolver:

1. Utilizar la estrategia de la tabla anterior:
2. Multiplicar 240 × 3 y luego dividir el producto entre 5.

En ambos casos se obtiene el mismo resultado.

Si no se presentara ninguno de los procedimientos anteriores, usted puede mostrarlos al grupo.

b) Aprobaron 48 mujeres: $\frac{2}{6}$ de 144 (total de aprobados) es igual a $\frac{2}{6} \times 144 = 48$.

c) Puede obtenerse primero la cantidad de alumnos que están en primer grado: $\frac{5}{12} \times 240 = 100$. De esos 100 alumnos, $\frac{4}{5}$ aprobaron el examen.

Multiplicamos $\frac{4}{5} \times 100 = 80$.

La parte del total que esos alumnos representan se obtiene multiplicando $\frac{5}{12} \times \frac{4}{5} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

También podemos comparar 80 con 240; es la tercera parte.

c) Del total de alumnos que presentaron el examen, $\frac{5}{12}$ están en primer grado, y de éstos, $\frac{4}{5}$ lo aprobaron. ¿Cuántos alumnos de primer grado lo aprobaron? ______

2. Considera el precio por kg de cada una de las mercancías que aparecen en la tabla y la cantidad de dinero que se pagó.

Mercancías	Precio por kilogramo	Cantidad de dinero que se pagó
Cebollas	\$6	\$20
Jitomates	\$9	\$6
Carne	\$64	\$24
Fresas	\$24	\$51

Calcula la cantidad de kg que se compraron de:

a) cebollas ______

b) jitomates ______

c) carne ______

d) fresas ______

SUPERFICIES Y FRACCIONES

SESIÓN 2

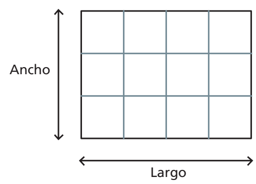
>>> Para empezar

El área es la medida en unidades cuadradas de una superficie. El área de un rectángulo se obtiene multiplicando el ancho por el largo.

Calcula el área de una lámina rectangular que mide 3 m de ancho y 4 m de largo:

______

Una manera de representar esta situación es la siguiente:



______

Las dimensiones de un rectángulo también pueden darse en fracciones.

Propósito del problema. Que los alumnos enfrenten situaciones que implican recurrir a la división como operación inversa de la multiplicación; se pretende que a partir de las estrategias que utilizaron para multiplicar una fracción por un entero, encuentren la fracción (el operador multiplicativo) que permite obtener la cantidad de dinero que se pagó.

Respuestas. En todos los casos se divide el dinero que se pagó entre la cantidad de kilos.

Cebollas: $3\frac{1}{3}$ kg.

Fresas: $2\frac{1}{8}$ kg.

Jitomates: $\frac{2}{3}$ kg.

Carne: $\frac{3}{8}$ kg.

Posibles procedimientos. Probablemente varios alumnos quieran resolver utilizando el algoritmo de la división con números decimales, pero les será difícil poder interpretar los resultados (algunos de los cocientes son números decimales periódicos, como $20 \div 6 = 3.333$). Invítelos a trabajar utilizando las fracciones. Los siguientes son ejemplos de algunos procedimientos:

- Con fracciones equivalentes:
  Cebollas: $20 \div 6 = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ kg.
- Por aproximaciones:
  $\$6 + \$6 + \$6 = \$18$.
  (Van 3 kilos y aún sobran \$2.)
  $\$2 = \frac{1}{3}$ de \$6.

Entonces con \$20 se compran $3\frac{1}{3}$ kg de cebollas.

Si nota que los alumnos tienen muchas dificultades para resolver, usted puede explicar y sugerir que utilicen alguno de los procedimientos anteriores.

Propósitos de la sesión. Multiplicar números fraccionarios a partir del cálculo del área de rectángulos cuyas medidas de los lados están expresadas en fraciones.

Conocer el algoritmo de la multiplicación de fracciones.

Organización del grupo. Se recomienda trabajar en parejas durante toda la sesión, intercalando con momentos de discusión grupal.

Propósito de la actividad. A partir de la resolución de problemas con los que los alumnos ya están familiarizados (cálculo de áreas), se espera que identifiquen el algoritmo de la multiplicación de fracciones utilizando distintos recursos.

Sugerencia didáctica. Usted puede iniciar preguntando a sus alumnos cómo se calcula el área de un rectángulo; posteriormente pueden leer y comentar la información que aquí se les presenta. Es importante que cuenten y verifiquen en el dibujo el número de unidades cuadradas que conforman el área del rectángulo.

Posibles dificultades. Seguramente los alumnos identificarán que el problema se resuelve multiplicando el largo por el ancho de cada uno de los rectángulos, pero es muy probable que la mayoría no sepa cómo resolver una multiplicación con números fraccionarios. Por ello es necesario que los anime a buscar una forma de calcular el área. No se preocupe si no terminan o si lo hacen de manera incorrecta, lo importante en este momento es que se enfrenten al problema de cómo resolver una multiplicación con números fraccionarios.

Posibles procedimientos. A partir del ejemplo anterior, tal vez algunos alumnos intenten una resolución gráfica; sin embargo, tendrían que "reconstruir" el entero (como se muestra en el apartado *Manos a la obra*).

El algoritmo de la multiplicación de fracciones no se estudia en la escuela primaria, pero algunos alumnos podrían conocerlo o tener alguna referencia.

Posibles errores.

- Sumar las fracciones.
- Intentar multiplicar las fracciones usando procedimientos equivocados.

Respuestas.

Vidrio 1: $\frac{1}{8}$ m².

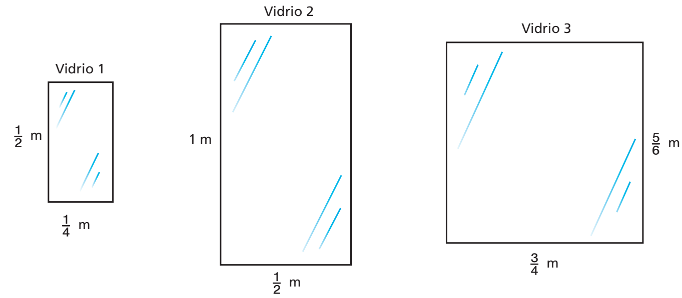
Vidrio 2: $\frac{1}{2}$ m².

Vidrio 3: $\frac{15}{24}$ m² o $\frac{5}{8}$ m².

SECUENCIA 10

>>> Consideremos lo siguiente

Una persona necesita comprar tres vidrios con las siguientes medidas:

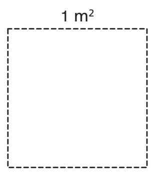


Para determinar el costo de un vidrio se necesita conocer su área. Busquen una forma de calcular el área de cada vidrio y aplíquenla.

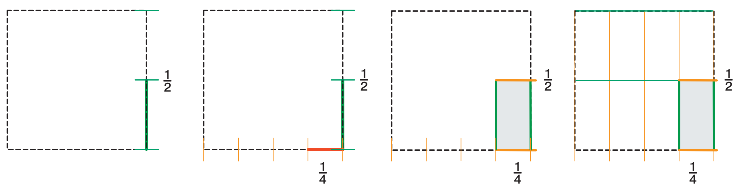
Comenten al grupo cómo calcularon el área de cada vidrio y cuál fue el área que obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Consideren que la siguiente figura cuadrada representa 1 m² de vidrio.



En la siguiente secuencia de figuras se presenta una forma de obtener el área del vidrio 1.



122

1

Sugerencia didáctica. Dé un tiempo para que las parejas analicen la secuencia de figuras que representa el cálculo del área del vidrio 1 y para que respondan las preguntas. Posteriormente invite a una o dos parejas para que, de manera breve, comenten al grupo sus respuestas y cómo interpretan la secuencia de dibujos. Después pida a los alumnos que utilicen el mismo recurso (el modelo de áreas) para encontrar el área de las demás superficies rectangulares.

En la primera figura se ha representado la medida del largo del vidrio, y en la segunda la del ancho. En la tercera figura se ha coloreado la superficie que corresponde al vidrio 1. Para saber qué parte de toda la figura es esa región coloreada, se ha dividido todo el cuadrado a partir de las marcas que se hicieron en sus lados.

a) ¿En cuántas partes iguales quedó dividido el metro cuadrado? __________

b) ¿Cuántas de esas partes representan la superficie del vidrio 1? __________

c) ¿Cuál es el área del vidrio 1? __________

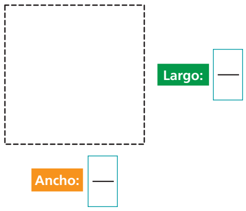
- De nuevo usen una figura de 1 m^2, pero ahora para representar el vidrio 2.

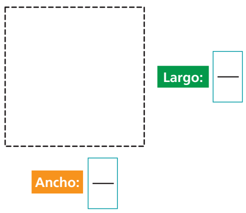
a) ¿En cuántas partes iguales quedó dividido esta vez el metro cuadrado? __________

b) ¿Cuántas de esas partes representan la superficie del vidrio 2? __________

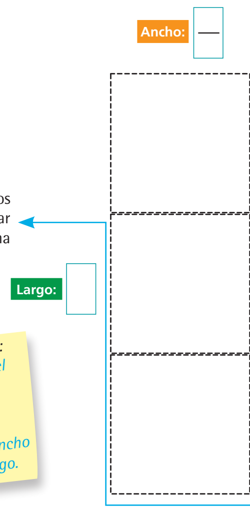
c) ¿Cuál es el área del vidrio 2? __________

d) Si el vidrio mide $\frac{5}{6}$ de metro de largo y $\frac{3}{4}$ de metro de ancho, ¿cuál es su área? __________





II. Cuando se necesita representar una medida mayor a 1 m, se unen tantos cuadros de 1 m^2 como se requieran. Por ejemplo, si se quiere representar un vidrio que mide 3 m de largo y $\frac{2}{3}$ de m de ancho, se requiere una figura como la de la derecha:



a) ¿Cuál es su área? __________

Utilicen la figura para encontrarla.

b) En sus cuadernos representen el área de los vidrios cuyas medidas sean:

- Largo: $\frac{4}{5}$ m. Ancho: $\frac{3}{4}$ m.
- Largo: 6 m. Ancho: $\frac{2}{3}$ m.

c) ¿Cuál es el área de cada vidrio?

Recuerden que:
Para calcular el área de un rectángulo se multiplica la medida del ancho por la del largo.

123

Propósito del interactivo. Utilizar el modelo de áreas para representar la multiplicación de fracciones.

Sugerencia didáctica: Indique a las parejas que, una vez que hayan concluido, regresen al problema inicial para que revisen las respuestas que en ese momento dieron, y para que corrijan en caso de que detecten errores.

Propósito de la actividad. En esta situación se muestra la manera en que se utiliza el modelo de áreas cuando se está representando una medida mayor a un entero.

Sugerencia didáctica. Reproduzca en el pizarrón el dibujo de los 3 m^2, pida a los alumnos que lean y comenten de qué se trata el problema. Invite a algunos alumnos a que pasen al pizarrón a calcular el área que se solicita. Una vez que todo el grupo esté de acuerdo con el resultado, pídales que resuelvan en sus cuadernos los otros dos problemas. Si el tiempo no es suficiente, puede dejarlos de tarea.

Respuestas.

a) $\frac{6}{3}$ o 2 m^2.

b) Primer vidrio: $\frac{12}{20}$ o $\frac{3}{5}$.
Segundo vidrio: $\frac{12}{3}$ o 4 m^2.

Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, comente con los alumnos cómo se resuelve la multiplicación que aquí se muestra.

Sugerencia didáctica. Mientras los alumnos completan la tabla, reprodúzcala en el pizarrón para que, una vez que la mayor parte de las parejas hayan terminado, pasen algunas de ellas al pizarrón a escribir y comparar sus resultados.

Sugerencia didáctica. El inciso b) puede ser resuelto en grupo. Es importante que los alumnos argumenten por qué consideran que uno u otro procedimiento es correcto. Para verificar sus respuestas, sugiérales que lean la información que aparece en el recuadro *A lo que llegamos.*

Para calcular el área de un vidrio de 3 m de largo por 2 m de ancho se multiplica 3 × 2. El área de este vidrio es de 6 m².

De la misma manera, para calcular el área de un vidrio de $\frac{1}{2}$ m de largo por $\frac{1}{4}$ de m, hay que multiplicar $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$. El área de este vidrio es de $\frac{1}{8}$ de m².

III. A partir de los resultados anteriores completen la siguiente tabla. Observen el ejemplo.

Medidas del vidrio (m)	Área del vidrio que obtuvieron con el modelo (m^2)	Área del vidrio = largo × ancho (m^2)
Largo: $\frac{1}{2}$ ancho: $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
Largo: 1 ancho: $\frac{1}{2}$		$1 \times \frac{1}{2} =$
Largo: 3 ancho: $\frac{2}{3}$		$3 \times \frac{2}{3} =$
Largo: $\frac{5}{6}$ ancho: $\frac{3}{4}$		$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} =$
Largo: 6 ancho: $\frac{2}{3}$		$6 \times \frac{2}{3} =$

a) Comenten cómo obtienen el producto de dos fracciones a partir de los términos de las fracciones que se multiplican.

b) ¿Cuál de los siguientes dos procedimientos para multiplicar fracciones es correcto y cuál es incorrecto?

	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$3 \times \frac{2}{3}$
Procedimiento 1	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$	$3 \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
Procedimiento 2	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{1 \times 2} =$	$3 \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

124

>>> A lo que llegamos

Para multiplicar dos fracciones se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Por ejemplo: $\frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3\times1}{5\times6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

>>> Lo que aprendimos

1. Si el precio del metro cuadrado de vidrio es de $200.00, ¿cuánto cuesta cada vidrio?

Completen la siguiente tabla anotando el área de cada vidrio y obteniendo su precio. Observen los ejemplos:

Sugerencia didáctica: Recomiende a sus alumnos que, en lo posible, simplifiquen las fracciones para que los cálculos sean más sencillos.

Medidas del vidrio		Área del vidrio (m^2)	Precio del vidrio ($)
Largo (m)	Ancho (m)		
1	1	1	200 × 1 = **200**
2	1	2	200 × 2 = **400**
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$200 \times \frac{1}{8} = \frac{200 \times 1}{8} = \frac{200}{8} = \mathbf{25}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$	$200 \times \frac{5}{8} = \frac{1000}{8} = 125$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$200 \times \frac{1}{2} = 100$
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{3} = 2$	$200 \times 2 = 400$
6	$\frac{2}{3}$	$\frac{12}{3} = 4$	$200 \times 4 = 800$

Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, recuerde a los alumnos que el área de un cuadrado se obtiene multiplicando lado por lado.
Respuestas. El lienzo más grande es el D y el más pequeño es el A.

Propósito del interactivo: Utilizar el modelo de áreas para representar la multiplicación de fracciones.

Respuestas.

a) Sembró $\frac{3}{5}$ partes de la parcela. Se multiplica $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

b) El corral ocupa $\frac{1}{3}$ parte de la parcela: Se araron $\frac{3}{4}$ de la parcela, por lo tanto $\frac{1}{4}$ de la parcela está sin arar. Se multiplica $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

c) Menos de 1 km^2.

d) Como el terreno es cuadrado, se multiplica $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ de km^2.

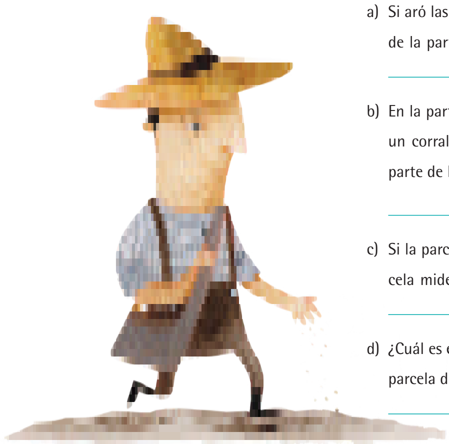
2. Se tienen lienzos cuadrados de tela con las medidas que se indican en la tabla. Calculen el área de cada lienzo y contesten las preguntas.

Lienzos	Medida del lado (m)	Área (m^2)
A	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
D	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$ ó $2\frac{1}{4}$

a) ¿Cuál es el lienzo más grande? ________

b) ¿Cuál es el lienzo más pequeño? ________

3. Don José tiene una parcela de forma cuadrada.



a) Si aró las $\frac{3}{4}$ partes de su parcela y sembró $\frac{4}{5}$ partes de la parte arada, ¿qué parte de la parcela sembró?

b) En la parte de la parcela que está sin arar construyó un corral que ocupa la tercera parte de ésta. ¿Qué parte de la parcela ocupa el corral?

c) Si la parcela mide de largo $\frac{2}{3}$ de kilómetro. ¿La parcela mide más o menos de un kilómetro cuadrado?

d) ¿Cuál es el área en kilómetros cuadrados de la parcela de don José?

126

MATEMÁTICAS I

¿CÓMO SERÍAN LAS MARCAS ATLÉTICAS EN EL ESPACIO?

SESIÓN 3

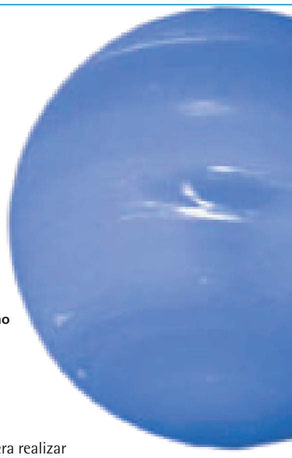
>>> Para empezar

El sistema solar y la fuerza de gravedad

Los planetas y los satélites atraen a los objetos con distinta intensidad.

Por ejemplo, la fuerza de gravedad en la Tierra es 6 veces mayor que la de la Luna. Esto significa que en la Luna una persona saltaría 6 veces más alto de lo que salta en la Tierra.

Si en la Tierra un competidor de salto de altura salta 2 m, ¿cuánto saltaría en la Luna? ____________

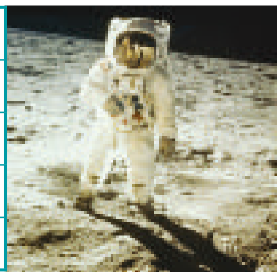
Luna  Tierra  Neptuno 

>>> Consideremos lo siguiente

En Neptuno la fuerza de gravedad es más grande que en la Tierra. Si se pudiera realizar el salto de altura en Neptuno, la altura que se alcanzaría sería $\frac{5}{6}$ de la que se alcanzaría en la Tierra.

Completen la siguiente tabla para encontrar las medidas de diferentes saltos.

Medida del salto en la Tierra (m)	Medida del salto en Neptuno (m)
3	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{4}{5}$	
$\frac{3}{2}$	



a) ¿En dónde alcanzan mayor altura los saltos, en la Tierra o en Neptuno?

____

b) ¿Qué operación tendría que hacerse para saber cuánto es $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{2}$?

____

Comparen sus respuestas.

127

Propósito de la sesión. Interpretar qué significa multiplicar una fracción por un entero, una fracción por otra fracción y analizar el producto cuando éste es mayor o menor a las fracciones que se multiplican.

Organización del grupo. Se sugiere que las actividades se resuelvan en parejas. El apartado *Lo que aprendimos* se resuelve individualmente.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos identifiquen que este problema se resuelve mediante una multiplicación: $\frac{5}{6}$ multiplica a cada una de las medidas de la primera columna. En el caso del primer renglón (3 m), los alumnos pueden resolver al menos de tres formas distintas:

$\frac{5}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{15}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}$.

$(5 \times 3) \div 6 = 15 \div 6 = 2.5$.

$(3 \div 6) \times 5 = 0.5 \times 5 = 2.5$.

Respuesta. El salto en Neptuno es de $\frac{5}{6}$ del de la Tierra, que es un número menor que 1, por lo tanto los saltos en Neptuno son menores que en la Tierra. Esto puede observarse en la misma tabla al comparar la medida de los saltos en Neptuno con la medida de los saltos en la Tierra.

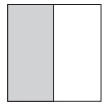
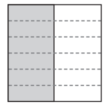
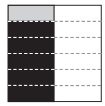
Propósito del video. Ejemplificar cómo representar una fracción y la multiplicación de fracciones por medio del ejemplo de la variación de la gravedad en el sistema solar.

Propósito de la actividad. Aun cuando varios de los alumnos podrían dominar ya el algoritmo de la multiplicación de fracciones, al presentarles distintos procedimientos de solución se pretende, por un lado, que los alumnos sean capaces de justificar los resultados obtenidos con procedimientos distintos a los algoritmos; y por el otro, se da la oportunidad de que aquellos alumnos que aún se apoyan en procedimientos gráficos, puedan vincularlos con el algoritmo.
Sugerencia didáctica. Si alguna pareja seleccionó el procedimiento del equipo 3, pídales que expliquen cuáles fueron las razones.

SECUENCIA 10

>>> Manos a la obra

I. En un grupo, algunos equipos resolvieron la operación $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{2}$ de las siguientes maneras.

Equipo 1	Equipo 2
$\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{12}$ 5 veces $\frac{1}{12}$ son $\frac{5}{12}$	En una figura representó $\frac{1}{2}$  Luego, dividió el medio en sextos  Y tomó 5  Observó que el resultado es $\frac{5}{12}$
Equipo 3	**Equipo 4**
Sumó $\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{8}{6}$	Multiplicó $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{12}$

a) ¿Usaron ustedes alguno de estos procedimientos? ______________________,
¿Cuál? ____

128

b) ¿Cuáles equipos siguieron un procedimiento correcto?

____

____

c) Traten de explicar el procedimiento del equipo 1 ____________________

____

II. Completen la siguiente tabla

Medida del salto en la Tierra (m)	Cálculo de la medida del salto en Neptuno	Medida del salto en Neptuno (m)
3	$\frac{5}{6} \times 3$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$	
$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$	
$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6} \times \frac{3}{2}$	

Sugerencia didáctica. Puede solicitar a algunos alumnos que pasen al pizarrón a resolver una de las multiplicaciones. Se espera que ya puedan aplicar el algoritmo para multiplicar dos fracciones.
Una vez que se haya completado la tabla, pídales que la comparen con los resultados que registraron en la tabla anterior, y que corrijan en caso de haber error.

III. En Marte la fuerza de gravedad es menor que en la Tierra, por lo que atrae a los objetos con menos fuerza. En ese planeta los saltos serían $2\frac{1}{2}$ veces más altos que en la Tierra.

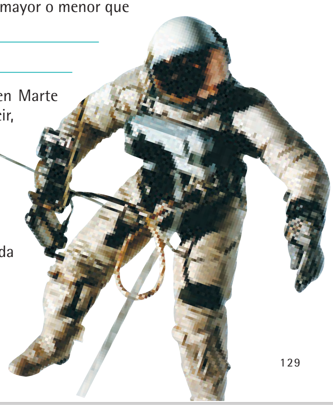
a) Si un salto en la Tierra midió 3 m, ¿en Marte ese salto será mayor o menor que en la Tierra? ____________ ¿Por qué? ____________

____

b) Un procedimiento para calcular cuánto mediría el salto en Marte consiste en calcular 2 veces 3 m más media vez 3 m, es decir,

$$\underbrace{3+3}_{\text{2 veces 3}} + \underbrace{1\tfrac{1}{2}}_{+\ \frac{1}{2}\text{ vez 3}} = 7\tfrac{1}{2}$$

- Usando este procedimiento, en su cuaderno, calculen la medida del salto en Marte si la medida del salto en la Tierra es: $\frac{1}{2}$ m.



129

Respuesta. Una forma de resolverlo, es la siguiente:

2 veces $\frac{1}{2}$ m es 1 m.

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ m es $\frac{1}{4}$ m.

El salto es de $1\frac{1}{4}$ m o de $\frac{5}{4}$ m ($2\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ m). Recuerde que $2\frac{1}{2}$ es igual a $\frac{5}{2}$.

Sugerencia didáctica. Aclare a los alumnos que 3 enteros pueden expresarse como $\frac{3}{1}$; es una manera equivalente de expresar a los enteros como una fracción.

Respuestas.

a) Es menor porque $\frac{5}{12}$ es menos de una vez el salto en la Tierra.

b) Es mayor porque $\frac{7}{5}$ es más de una vez el salto en la Tierra.

2

Sugerencia didáctica. Invite a los alumnos a verificar la información tratando de identificar, en las tablas anteriores, multiplicaciones en las que el producto resulte mayor o menor que el número por el que se multiplica la fracción.

IV. Considerando lo anterior, completen la tabla.

Medida del salto en la Tierra (m)	Cálculo de la medida del salto en Marte	Medida del salto en Marte (m)
3	$2\frac{1}{2} \times 3 = \frac{5}{2} \times \frac{3}{1}$	
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{5}$		
$\frac{3}{2}$		

Contesten las siguientes preguntas:

a) Si se sabe que en un planeta el salto es $\frac{5}{12}$ del salto en la Tierra, ¿en ese planeta el salto será mayor o menor que en la Tierra? ______________ ¿Por qué? ______

____

b) Y si se sabe que en un planeta el salto es $\frac{7}{5}$ del salto en la Tierra, ¿en ese planeta el salto será mayor o menor que en la Tierra? ______________ ¿Por qué?

____

>>> A lo que llegamos

Cuando se multiplica cualquier número por una fracción menor que 1, el producto es menor que ese número, porque se toma sólo una parte de él:

$\frac{5}{6} \times 9 = \frac{5}{6} \times \frac{9}{1} = \frac{45}{6} = 7\frac{3}{6} = 7\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{2}$ es menor que 9;

$\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$; $\frac{5}{12}$ es menor que $\frac{1}{2}$;

Y cuando se multiplica cualquier número por una fracción mayor que 1, el producto es mayor que ese número, porque se toma más de una vez:

$\frac{5}{2} \times 4 = \frac{5}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{20}{2} = 10$; 10 es mayor que 4;

$\frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$; $\frac{5}{4}$ es mayor que $\frac{1}{2}$.

>>> Lo que aprendimos

En tu cuaderno, efectúa las siguientes multiplicaciones y explica por qué el resultado es mayor o menor que el número que se escribe en negritas.

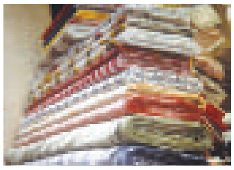
a) $\frac{3}{2} \times \mathbf{\frac{5}{6}} =$ c) $\frac{9}{7} \times \mathbf{\frac{8}{5}} =$ e) $\frac{4}{3} \times \mathbf{5} =$ g) $\frac{2}{7} \times \mathbf{\frac{1}{3}} =$

b) $\frac{2}{3} \times \mathbf{\frac{5}{6}} =$ d) $\frac{2}{3} \times \mathbf{5} =$ f) $\frac{4}{5} \times \mathbf{\frac{5}{4}} =$ h) $\frac{7}{2} \times \mathbf{\frac{1}{3}} =$

HAY TELA DE DONDE CORTAR

SESIÓN 4

>>> Para empezar



En un taller de costura se realizan cálculos con el fin de conocer cuánta tela es necesaria para confeccionar una o varias prendas.

Si tienen un rollo de tela de 18 m de largo y quieren cortar lienzos de 3 m de largo, ¿cuántos lienzos pueden obtener?

____

>>> Consideremos lo siguiente

En un taller de costura tienen un rollo de tela de 3 m, y necesitan cortar lienzos de $\frac{3}{4}$ de m cada uno. ¿Cuántos lienzos se obtienen? ________________

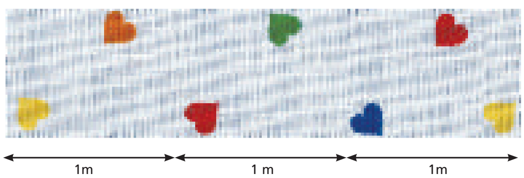
Y si el rollo tuviera $3\frac{1}{2}$ m y necesitaran cortar lienzos de un $\frac{1}{4}$ de m cada uno, ¿cuántos lienzos se obtendrían? ________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. La siguiente figura representa el rollo de tela, que es de 3 m.

a) Marquen la medida del largo de los lienzos ($\frac{3}{4}$ de m) tantas veces como se pueda a lo largo de la tela.



b) ¿Cuántos lienzos obtuvieron? ________________

131

Propósito del interactivo. Utilizar el modelo de áreas para representar la multiplicación de fracciones.

Propósito de la actividad. Son dos intenciones: que practiquen el procedimiento para multiplicar dos fracciones y que comparen el resultado con respecto a un operador multiplicativo fraccionario.

Sugerencia didáctica. Antes de que los alumnos efectúen las operaciones puede solicitarles que hagan un cálculo sobre el resultado: "¿Será mayor o menor que el número por el que se multiplica la fracción?". Posteriormente realizan la operación para verificar el resultado que calcularon.

Integrar al portafolios. Si identifica que los alumnos responden erróneamente, pida a algunos de ellos que resuelvan en el pizarrón y aproveche el momento para aclarar el algoritmo. También puede repasar junto con ellos el apartado *A lo que llegamos* de la sesión 2 y el de esta misma sesión.

Respuestas. El resultado es mayor en los incisos a), c) y e) porque el primer factor es mayor que uno.
El resultado es menor en b), d), f), g) y h), porque el primer factor es menor que uno.

Propósito de la sesión. Resolver problemas que impliquen la división de fracciones.
Interpretar y dar significado a dividir un entero entre una fracción, un número mixto (fracción impropia) entre una fracción.
Relacionar la división de fracciones con la multiplicación de un entero o fracción por el recíproco del otro factor (fracción).

Organización del grupo. Se sugiere trabajar en parejas durante toda la sesión.

Posibles procedimientos. Los problemas que aquí se presentan implican responder a las preguntas: "¿cuántas veces cabe $\frac{3}{4}$ en 1m?" y ¿cuántas veces cabe $\frac{1}{4}$ en $3\frac{1}{2}$?" Ambas preguntas se resuelven mediante una división de fracciones, pero es poco probable que los alumnos identifiquen esa operación en este momento.

Una forma en la que pueden resolver el problema inicial es dibujar un segmento de 3 unidades, dividir cada unidad en cuartos (12 cuartos en total) y hacer marcas cada $\frac{3}{4}$; obteniendo 4 segmentos de esa medida.

Para el segundo problema pueden convertir $3\frac{1}{2}$ en cuartos, obteniendo $\frac{14}{4}$; por lo tanto, se obtienen 14 lienzos de $\frac{1}{4}$ m cada uno.

Propósito de la actividad. Identificarán que entre más pequeña sea la fracción, obtendrán un número mayor de lienzos, pero el tamaño de ellos será menor.

Respuesta. En la mayoría de los casos la división es exacta (no hay residuo), a excepción de la segunda columna ("sobra" un metro, lo que podría desconcertar a los alumnos). Habrá que insistir en que la medida de los lienzos debe ser la indicada.

Respuesta. Puesto que la tela mide $3\frac{1}{4}$ m, una forma de resolver es convertir a fracción impropia para obtener $\frac{7}{2}$, y luego dividir la figura en $7\frac{1}{2}$. Posteriormente cada medio puede dividirse en cuartos. En total se obtiene 14 partes de $\frac{1}{4}$ m cada una.

Propósito de la actividad. Se espera que mediante el análisis de esta tabla los alumnos identifiquen que el problema que resolvieron mediante distintos recursos implica una división de fracciones.

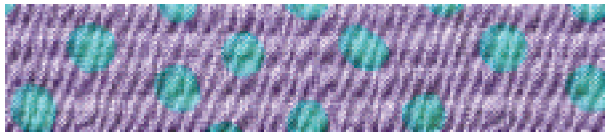
c) Completen la siguiente tabla. Pueden apoyarse en representaciones gráficas como las anteriores.

Cantidad de tela disponible	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m
Medida del largo de los lienzos	3 m	2 m	1 m	$\frac{1}{4}$ de m	$\frac{3}{4}$ de m	$\frac{1}{2}$ de m	$\frac{1}{6}$ de m
Número de lienzos que se obtienen							

II. Si el rollo de tela fuera de $3\frac{1}{2}$ m y cortaran lienzos de $\frac{1}{4}$ de m:

a) ¿Cuántos lienzos obtendrían? ______

b) Representen esta situación en la siguiente figura.



III. En cada una de estas situaciones se puede realizar una división. Indíquenla en las tablas y contesten las siguientes preguntas:

Cantidad de tela a cortar	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m
Medida del largo de los lienzos	3 m	1 m	$\frac{1}{2}$ m	$\frac{3}{4}$ m	$\frac{1}{3}$ m
Número de lienzos que se obtienen	$3 \div 3 = \square$	$3 \div \square = 3$	$\square \div \frac{1}{2} = 6$	$3 \div \frac{3}{4} = \square$	$3 \div \frac{1}{3} = \square$

Cantidad de tela a cortar	$3\frac{1}{2}$ m	$3\frac{1}{2}$ m	$3\frac{1}{2}$ m	$3\frac{1}{2}$ m
Medida del largo de los lienzos	$3\frac{1}{2}$ m	$\frac{1}{2}$ m	$\square$ m	1 m
Número de lienzos que se obtienen	$3\frac{1}{2} \div \square = 1$	$3\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \square$	$3\frac{1}{2} \div \square = 14$	$\square \div \square = \square$

a) Si el rollo de tela mide 3 m y cortan lienzos de $\frac{1}{3}$ de m, ¿cuántos lienzos obtienen? Escriban la división que le corresponde a esta situación:

b) De acuerdo con los datos de las tablas, ¿qué situación representa la división: $3\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 7$?

c) Y si el rollo de tela mide $3\frac{1}{2}$ m y cortan lienzos de $\frac{1}{6}$ de m, ¿cuántos lienzos obtienen? Escriban la división que le corresponde a esta situación:

d) Si tienen 6 lienzos de $\frac{1}{2}$ m y los unen, ¿cuántos m de tela en total tienen?

Recuerden que:
Un número mixto se puede expresar como fracción impropia. Por ejemplo: $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

- Completen la tabla.

Resultados de las divisiones tomando los datos de la tabla anterior	Resultados de las multiplicaciones de acuerdo con lo que estudiaron en la sesión 1
$3 \div 3 =$	$3 \times \frac{1}{3} =$
$3 \div \frac{1}{2} =$	$3 \times \frac{2}{1} =$
$3 \div \frac{1}{4} =$	$3 \times \frac{4}{1} =$
$3 \div \frac{3}{4} =$	$3 \times \frac{4}{3} =$
$3\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} =$	$3\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} =$
$3\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} =$	$3\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} =$

133

Propósito de la actividad. Que le den significado a dividir un entero o cualquier número mixto entre una fracción; que identifiquen qué sucede con el resultado. La pregunta del inciso d) permite a los alumnos recordar que *dividir es la operación inversa de multiplicar*.

Respuestas.

a) Se obtienen 9 lienzos de $\frac{1}{3}$ m de largo. La división es 3 entre $\frac{1}{3}$

b) Tenemos $3\frac{1}{2}$ m de tela y lienzos de $\frac{1}{2}$ m. En total se obtienen 7 lienzos de $\frac{1}{2}$ m de largo.

c) En un lienzo de 1 m de largo se obtienen seis lienzos de $\frac{1}{6}$ m de largo cada uno. Por lo que en 3 m se obtienen 18 lienzos de $\frac{1}{6}$ m, y en un lienzo de $\frac{1}{2}$ m se obtienen 3 lienzos de $\frac{1}{6}$ m. En total, en un lienzo de $3\frac{1}{2}$ m se obtienen 21 lienzos de $\frac{1}{6}$ m. La división es $3\frac{1}{2} \div \frac{1}{6}$, o $\frac{7}{2} \div \frac{1}{6}$.

d) 3 metros de tela. Cada dos lienzos ocupan 1 m de tela.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos establezcan relaciones entre la multiplicación y la división de fracciones (las cuales son operaciones inversas). Particularmente, deben identificar que al dividir un número (dividendo) entre una fracción (divisor), el resultado (cociente) es igual al que se obtiene al multiplicar el número (dividendo) por el recíproco de la fracción (divisor).

Propósito de la actividad. Aprender que una forma de obtener el resultado de una división de fracciones es mediante la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

Respuesta. El resultado es 1. Se obtiene $\frac{4}{4} = 1$.

2

Sugerencia didáctica. Como una forma de reflexionar sobre la información que se presenta en el recuadro, retome alguno de los problemas que resolvieron al inicio con otros procedimientos, y pídales que apliquen el algoritmo, para verificar si obtienen el mismo resultado.

>>> A lo que llegamos

La fracción recíproca de una fracción es otra fracción que se obtiene al invertir sus términos. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} \text{ su recíproco es } \frac{3}{2}.$$

- Contesten las siguientes preguntas:

a) Verifiquen que los resultados que se dan en cada renglón de la tabla anterior sean iguales. ____________________

b) ¿Qué sucede si multiplican una fracción por su fracción recíproca? ¿Cuál es el resultado de multiplicar $\frac{1}{4} \times \frac{4}{1}$? ____________________

____

____

>>> A lo que llegamos

Dividir un entero entre una fracción es equivalente a multiplicar el entero por el recíproco de la fracción. Por ejemplo:

$$3 \div \frac{3}{4} = 3 \times \frac{4}{3} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{3 \times 4}{1 \times 3} = \frac{12}{3} = 4;$$

y

$$3 \div \frac{1}{2} = 3 \times \frac{2}{1} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{3 \times 2}{1 \times 1} = \frac{6}{1} = 6;$$

Dividir cualquier fracción (dividendo) entre otra (divisor) es equivalente a multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor.
Por ejemplo:

$$3\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{7}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{7 \times 4}{2 \times 1} = \frac{28}{2} = 14.$$

¿CUÁNTAS BOTELLAS DE JUGO SE NECESITAN?

SESIÓN 5

>>> Para empezar

En una planta de refrescos y jugos se tienen distintas presentaciones de un mismo producto. Un tanque de jugo de manzana tiene 270 ℓ, con los que se llenarán 108 botellas, sin que sobre jugo.

¿De qué capacidad deben ser las botellas?

¿Qué operación realizaron para encontrar la respuesta?

>>> Consideremos lo siguiente

Se va a repartir $5\frac{1}{4}$ ℓ de jugo de manzana entre 14 botellas. Se quiere que en cada botella haya la misma cantidad de líquido y que no sobre. ¿Qué cantidad de líquido quedará en cada botella?

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En un equipo, cada alumno planteó las siguientes operaciones para resolver el problema.

José	María	Teresa	Julio
$5\frac{1}{4} \div 14$	$14 \div 5\frac{1}{4}$	$\frac{21}{4} \times \frac{1}{14}$	$5\frac{1}{4} \times 14$

a) ¿Con cuáles de estas operaciones se puede resolver el problema?

b) En su cuaderno, efectúen los cálculos y comparen sus resultados.

c) Identifiquen el dividendo, el divisor y el cociente en este problema.

II. En su cuaderno, realicen las siguientes divisiones de fracciones.

- $2 \div \frac{1}{5}$
- $3\frac{2}{5} \div 2\frac{1}{2}$
- $\frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$
- $1\frac{1}{3} \div 2$
- $\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$

Recuerden que:

Los elementos de una división son: divisor, dividendo y cociente.

Por ejemplo:

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2.$

Dividendo divisor cociente

135

Propósito de la sesión. Resolver problemas que implican una división de fracciones y analizar el resultado, es decir, identificar cuándo es mayor o menor a los números que se están operando.

Organización del grupo. Se sugiere que la sesión se trabaje en parejas.

Posibles procedimientos. El problema inicial se resuelve mediante la división $5\frac{1}{4} \div 14$, y los alumnos pueden resolver esa división de distintas formas (una de ellas es el algoritmo que consiste en multiplicar a la fracción por su recíproco).

Una forma de resolverlo es la siguiente: 5 litros y un cuarto de jugo son 21 cuartos de litro, pero al repartir en 14 botellas no todas tendrían la misma cantidad de jugo. Si los cuartos se transforman en octavos, serían 42 octavos de litro, que al repartirse entre 14 botellas, cada botella tendría $\frac{3}{8}$ de litro.

Otra forma es aplicando el algoritmo:

$5\frac{1}{4} \div 14 = \frac{21}{4} \div \frac{14}{1} = \frac{21}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}.$

Propósito de la actividad. Al finalizar esta actividad, y como consecuencia de lo que estudiaron en la sesión anterior, se espera que los alumnos no tengan dificultades para reconocer qué operación efectuar o cuáles son operaciones equivalentes (la de "José" y la de "Teresa").

Sugerencia didáctica. Al analizar las distintas formas de plantear la división se pretende que los alumnos identifiquen errores que posiblemente ellos mismos han cometido, por lo que es importante que usted organice un intercambio grupal de respuestas y comentarios al término de esta actividad.

Sugerencia didáctica. Esta actividad permite que los alumnos analicen y establezcan relaciones entre los datos del problema. Usted puede recuperar algunos de los problemas que anteriormente resolvieron los alumnos y solicitarles que hagan el mismo análisis.

Sugerencia didáctica. Recomiende a sus alumnos que primero conviertan los números mixtos a fracciones impropias, y que en lo posible simplifiquen fracciones para que los cálculos sean más sencillos.

Integrar al portafolios. Elija algunos de estos problemas (pueden ser los tres primeros, por ejemplo) para que los alumnos los resuelvan en una hoja que puedan entregarle. Pídales que no borren las operaciones o los dibujos que hagan, pues eso le servirá a usted para identificar sus procedimientos y sus posibles errores. Si identifica que aún tienen dificultades, repase junto con ellos el apartado *A lo que llegamos* de la sesión 4 y pida a algunos alumnos (o hágalo usted) que muestren en el pizarrón cómo se resuelven correctamente esos problemas.

Respuestas.

a) $2\frac{1}{2}$ ℓ entre 4 personas = $\frac{5}{8}$ de litro. Esto es $2\frac{1}{2} \div 4 = \frac{5}{2} \div 4$, es decir $\frac{5}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.

b) 40 calorías en un refresco equivale a $1\frac{2}{3}$ veces las calorías que contiene un jugo de manzana. Es decir, si se conocen las calorías del jugo de manzana, se multiplican por $1\frac{2}{3}$ y se obtienen las 40 calorías del refresco de manzana; entonces se necesita dividir 40 calorías entre $1\frac{2}{3}$ para obtener las calorías del jugo de manzana. $40 \div 1\frac{2}{3} = 40 \div \frac{5}{3}$ equivale a $40 \times \frac{3}{5} = \frac{120}{5} = 24$. Esto significa que un jugo de manzana tiene 24 calorías.
Una posible dificultad es que los alumnos no logren identificar que este problema se resuelve con una división de fracciones, pues la palabra "veces" generalmente se asocia a la multiplicación. Si lo considera necesario, puede pedirles que comenten al grupo cómo podrían resolverlo.

c) Recorre $27\frac{1}{2}$ km en 2 horas, entonces la velocidad es $13\frac{3}{4}$ km por hora.

d) En $5\frac{8}{5}$ minutos. Si da $3\frac{3}{4}$ litros por minuto, entonces hay que dividir 32 entre $3\frac{3}{4}$. Esto es 32 entre $\frac{15}{4}$ = $32 \times \frac{4}{15} = \frac{128}{15} = 8\frac{8}{15}$.

e) 144 son $\frac{3}{5}$. Entonces $\frac{1}{5}$ son 48 estudiantes. En total son 240 estudiantes. También se divide 144 entre $\frac{3}{5}$.

SECUENCIA 10

Consideren los resultados de las divisiones anteriores para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿En qué divisiones obtuvieron un cociente entero?

b) ¿En qué divisiones el resultado fue menor que el dividendo?

c) ¿Y en cuáles fue mayor que el dividendo?

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

- **Cuando el resultado es un número entero, como 1, 2, 3, o cualquier otro, se puede decir que ese número representa el número de veces que cabe el divisor en el dividendo.**
- **Observen que el resultado de la división es menor que el dividendo si el divisor es mayor que uno.**
- **Observen que el resultado de la división es mayor que el dividendo si el divisor es menor que uno.**

III. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Cuatro personas comparten en partes iguales un refresco familiar de $2\frac{1}{2}$ ℓ. ¿Qué cantidad de refresco le toca a cada quién?

b) La cantidad de calorías que proporciona un refresco de manzana es $1\frac{2}{3}$ veces mayor que la que da el jugo de manzana. Si un vaso de refresco tiene 40 calorías. ¿Cuántas calorías tiene un vaso de jugo?

c) Una lancha recorre $27\frac{1}{2}$ km en 2 horas. ¿Cuál es su velocidad por hora?

136

d) Una llave de agua da $3\frac{3}{4}$ ℓ de agua por minuto. ¿En cuántos minutos da 32 ℓ?

e) En una escuela $\frac{3}{5}$ de sus estudiantes aprobaron el examen. Si lo aprobaron 144 alumnos, ¿cuántos alumnos lo presentaron?

f) Completa la siguiente tabla, calculando cuántos moños de $\frac{1}{4}$ de metro de listón se obtienen en cada caso.

Respuesta. Se dividen los metros entre la cantidad de listón para hacer un moño.

Metros de listón que tiene una pieza	Cantidad de listón que se requiere para hacer un moño	Número de moños que se pueden hacer
2	$\frac{1}{4}$ m	8
$5\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ m	21
$7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ m	30

>>> Para saber más

Sobre los planetas y la fuerza de gravedad consulta:
http://www.universum.unam.mx/
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007]
Universum, Museo de las Ciencias
Ruta: SALAS → UNIVERSO (seleccionar la imagen que tiene dos planetas) → Sistema Solar → Equipos de la sección Sistema Solar (dar clic en el tema que se quiera consultar).

Propósito de la sesión. Dar sentido al significado de multiplicar por un número con punto decimal; en particular, reconocer que al multiplicar por un número menor que la unidad el producto es menor que los factores. Conocer distintas formas de resolver multiplicaciones de números decimales.
Organización del grupo. El trabajo es en parejas, salvo en la última actividad y en los intercambios grupales.

Sugerencia didáctica. Recuerde junto con los alumnos la noción de escala, la manera en que se interpreta y cómo se encuentran las medidas reales.

Propósito de la actividad. Se espera que gradualmente los alumnos establezcan que aumentar una medida "tres veces y media" implica multiplicar esa medida por 3.5. Por eso, en este momento NO debe permitir que usen calculadora, pues difícilmente se percatarían de ello. Si lo considera necesario, auxílielos en la realización de los trazos, ya que por el momento éstos no son el objeto de estudio.

Posibles procedimientos. Entre los diversos procedimientos que se espera utilicen los alumnos está la suma, ya sea mentalmente o por escrito; por ejemplo, tres veces y media el 6.

$6 + 6 + 6 + 3 = 21$

También es probable que quienes ya saben que 3.5×6 es lo mismo que 6×3.5, decidan sumar 6 veces el 3.5

$3.5 + 3.5 + 3.5 + 3.5 + 3.5 + 3.5 = 21.$

Dado que en la primaria los alumnos aprendieron a multiplicar decimales, habrá quienes hagan uso del algoritmo convencional.

$$\begin{array}{r} 3.5 \\ \times \quad 6 \\ \hline 21.0 \end{array}$$

Se espera que, conforme vayan resolviendo las actividades, los alumnos noten que la multiplicación es la más eficaz.

SECUENCIA 11

Multiplicación de números decimales

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos.

SESIÓN 1

TRES VECES Y MEDIA

>>> Para empezar

En un dibujo a escala todas las medidas deben ser proporcionales a las reales.

El auto que aparece en esta foto está a escala del auto real. El factor de escala es 100.

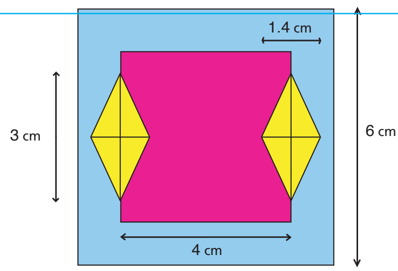
¿Cuánto mide en la foto el largo del auto? ____________________ , ¿cuánto mide el largo del mismo auto en la realidad? ____________________

Recuerda que:
Si el factor de escala es 100 todas las medidas son 100 veces más grandes

4.5 cm

>>> Consideremos lo siguiente

Observen el siguiente dibujo y hagan otro a escala que sea $3\frac{1}{2}$ veces más grande que el original. La tabla puede servirles, complétenla sin usar calculadora.



Medidas en el dibujo original	Medidas en la ampliación a escala
6 cm	21 cm
4 cm	14 cm
3 cm	10.5 cm
1.4 cm	4.9 cm

138

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las operaciones.
Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos utilizaron la multiplicación de números decimales al resolver problemas de proporcionalidad directa, particularmente al utilizar el valor unitario y al calcular áreas de rectángulos. En ese contexto reflexionaron sobre el significado de esa operación y de su resultado. En el primer grado de la escuela secundaria los alumnos fortalecerán esos significados y los aplicarán a otros contextos.

Propósitos de la secuencia
Resolver problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*Tres veces y media* Dar sentido al significado de multiplicar por un número con punto decimal; en particular, reconocer que al multiplicar por un número menor que la unidad el producto es menor que los factores. Conocer distintas formas de resolver multiplicaciones de números decimales.	Video *Más de tres, pero menos de cuatro* Interactivo
2	*El punto es el asunto* Conocer y practicar la técnica para multiplicar números decimales.	Interactivo
3	*¿En dónde se usa la multiplicación de decimales?* Resolver problemas diversos que implican multiplicar números decimales.	

Comenten ante su grupo cómo calcularon las medidas de la copia a escala. En particular platiquen cómo calcularon la medida real de la diagonal menor del rombo, que en el dibujo mide 1.4 cm; entre todos elijan cuál de los procedimientos mostrados consideran que es el más eficaz y digan por qué.

>>> Manos a la obra

I. Calcular las medidas para que sean $3\frac{1}{2}$ veces de la original es lo mismo que multiplicar por 3.5. Completen la tabla usando los resultados que obtuvieron en el problema inicial.

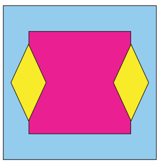
Multiplicación	Producto (resultado de la multiplicación)
3.5×6	
3.5×4	
3.5×3	
3.5×1.4	

- Completen estos dos procedimientos para calcular 3.5×1.4:

a) Al sumar tres veces y media el 1.4, queda ______

b) Al multiplicar $3\frac{1}{2}$ por $1\frac{4}{10}$, queda ______

II. Calculen las medidas del lado de 4 cm y el de 6 cm con los factores de escala que aparecen en la tabla.



Recuerda que:
Los números decimales pueden expresarse como una fracción común:
$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Factor de escala	Medida del lado de 4 cm	Medida del lado de 6 cm
2	8 cm	12 cm
5		
0.5		
1.5		
2.5		
0.25		
0.1		
0.01		

3

Sugerencia didáctica. En la confrontación NO es importante que digan cómo trazaron la figura, sino cómo hicieron los cálculos para obtener las medidas de la copia a escala.

Propósito de la actividad. El propósito es afianzar la idea de que calcular tres veces y media un número es igual a multiplicarlo por 3.5.

Respuestas.

a) Tres veces es 4.2, más media vez, que es 0.7, da 4.9.

b) Es multiplicar
$\frac{7}{2} \times \frac{14}{10} = \frac{7}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{49}{10} = 4.9$.

Propósito de la actividad. Con la actividad II se pretende que los alumnos exploren y reflexionen acerca de lo que sucede cuando se multiplica por un número menor que la unidad. En el caso de los números naturales el producto siempre es mayor o igual que cualquiera de los factores ($4 \times 5 = 20$, $22 \times 1 = 22$), por ello es muy común que los alumnos piensen que con los decimales pasa lo mismo. Cuando una cantidad se multiplica por un número menor que 1 el producto es menor que esa cantidad.

Saber lo que sucede cuando se hacen multiplicaciones con números decimales contribuye a que los alumnos desarrollen su sentido numérico (por ejemplo, para hacer cálculos y verificar resultados).

Respuestas.

d) Para esta pregunta puede haber muchas respuestas correctas. Un factor de escala que sea cualquier número menor que 1 dará por resultado una copia menor que la original.

e) 5.5, porque el 4 cabe cinco veces y media en 22 (5 veces 4 es 20, media vez 4 es 2). O también puede calcularse si se divide 22 entre 4 = 5.5.

f) 0.75, se divide 3 entre 4. Puede pensarse que dividir 3 entre 4 es igual a $\frac{3}{4}$ o 0.75.

Propósito de la actividad. Es muy importante que los alumnos aprendan a decidir cuál es la mejor manera de resolver una operación. Por ejemplo, para resolver 200 × 0.25 es más fácil calcular la cuarta parte de 200 que hacer la multiplicación. Con esta actividad (III) se pretende que los alumnos concluyan que no siempre es necesario hacer una multiplicación para saber el resultado y que muchas veces es más rápido y sencillo resolverla de otra manera. Enfatice esta idea con los alumnos en el momento de la confrontación.

a) ¿Con qué factores de escala la copia será mayor que el dibujo original? __________

b) ¿Con cuáles de estos factores de escala la copia será de menor tamaño que el dibujo original? __________

c) ¿Qué tienen en común los factores de escala que producen una copia menor que el original? __________

d) Anoten cuatro factores de escala con punto decimal que sean diferentes a los de la tabla y que generen una copia menor que el original __________

e) ¿Qué factor de escala debe usarse para hacer una copia en la que el lado de 4 cm mida 22 cm? __________

f) ¿Qué factor de escala debe usarse para hacer una copia en la que el lado de 4 cm mida 3 cm? __________

Comenten con otras parejas sus resultados hasta este punto; si no coinciden analicen por qué.

III. Para calcular la medida del lado de 4 cm, cuando el factor de escala es 0.5, se puede efectuar la siguiente multiplicación; resuélvanla:

$0.5 \times 4 =$ __________

- El resultado de esta operación equivale a dividir 4 entre un número; ¿entre cuál número? __________
- Algunas multiplicaciones de números con punto decimal pueden calcularse de otra manera. Completen la siguiente tabla.

Multiplicar por:	Es lo mismo que multiplicar por la fracción:	Y es lo mismo que:
0.5	$\frac{1}{2}$	dividir entre 2
0.25	$\frac{25}{100}$ ó $\frac{1}{4}$	dividir entre 4
0.1	$\frac{1}{10}$	dividir entre 10
0.01	$\frac{1}{100}$	dividir entre 100
0.125	$\frac{125}{100}$ ó $\frac{1}{8}$	dividir entre 8
0.75	$\frac{75}{100}$ ó $\frac{3}{4}$	dividir entre $\frac{4}{3}$

Integrar al portafolios. Si tienen dificultades hagan más multiplicaciones por números menores que 1 y analicen los resultados.

Respuestas. El último caso (el de 0. 75) es más difícil que los anteriores porque hay varias respuestas que involucran más operaciones, no sólo dividir:

- Obtener $\frac{3}{4}$ de la cantidad.
- Multiplicar por $\frac{3}{4}$.
- Dividir entre $\frac{4}{3}$.
- Multiplicar por 3 y dividir entre 4

Es probable que no lleguen a ninguna; en la confrontación de resultados recuerde junto con ellos lo que estudiaron en la secuencia 10 (Multiplicación y división de fracciones).

Escriban dos maneras diferentes de calcular 0.75 × 4:

IV. Resuelve **mentalmente** las siguientes multiplicaciones:

0.5 × 40 =	0.25 × 200 =
1.5 × 80 =	2.5 × 8 =
10 × 2.5 =	4 × 3.5 =
4.5 × 0.5 =	800 × 0.125 =

V. Platica a tus compañeros cómo resolviste mentalmente las multiplicaciones 10 × 2.5 y 1.5 × 80. Elijan una de estas dos operaciones, anoten en el pizarrón los diferentes procedimientos y luego compárenlos, ¿cuál creen que es el más rápido para hacer la operación?

>>> A lo que llegamos

- **Multiplicar un número por 3.5 significa tomar 3 veces y media el valor del número; multiplicar por 4.1 significa tomar 4 veces el número más una décima del mismo número.**
- **Algunas multiplicaciones de números con punto decimal pueden resolverse más rápidamente de otra manera, por ejemplo, multiplicar 600 por 0.25 equivale a dividir 600 entre 4 y da como resultado 150.**
- **Al multiplicar un número por un factor menor que la unidad el resultado, será menor que el número; por ejemplo, 0.35 × 8 da como resultado un número menor que 8.**

Más de tres, pero menos de cuatro

Como han estudiado, los números decimales son útiles en muchas situaciones de la vida real, como el uso de las escalas.

141

Posibles procedimientos. Varias son la maneras de calcular 0.75 × 4:

- El algoritmo convencional (los que ya lo sepan).
- Multiplicar $\frac{3}{4}$ por 4 (secuencia 10).
- Calcular las tres cuartas partes de 4 (la fracción como operador).
- Calcular 4 veces 0.75.
- Utilizar la calculadora.

Sugerencia didáctica. Los alumnos deben desarrollar su capacidad para decir cuál es la manera más conveniente de resolver una operación: utilizando el algoritmo convencional, la calculadora o el cálculo mental. Invítelos continuamente a comentar en qué situaciones elegirían una u otra forma de resolución.

Sugerencia didáctica. La práctica del cálculo mental debe estar presente continuamente en las clases de matemáticas, ya que permite descubrir muchas relaciones entre los números desarrollando el sentido numérico y el de las operaciones.
Invite a los alumnos a que, efectivamente, resuelvan con cálculo mental estas operaciones y en el momento de la confrontación comenten los procedimientos que usaron.

Propósito del video. Conocer, a través de ejemplos, la función de los números decimales y qué expresan, así como los usos de la multiplicación de decimales.

2

Sugerencia didáctica. Lea y comente junto con los alumnos esta información; puede pedirles que lo transcriban en su cuaderno y que ejemplifiquen cada afirmación con una operación distinta a la enunciada, después pueden comentar los ejemplos que hayan escrito para enriquecer el apunte de todos.

Propósito de la sesión. Conocer y practicar la técnica para multiplicar decimales.

Organización del grupo. A excepción de la última actividad de la sesión todas las demás pueden trabajarse en parejas.

Sugerencia didáctica. El modelo de áreas para resolver una multiplicación de fracciones se retoma para la multiplicación de números con punto decimal. Comente con los alumnos este modelo y cerciórese de que lo han comprendido antes de pasar al apartado *Consideremos lo siguiente*.

Respuestas. Para el primer caso se toma el último renglón y las tres primeras columnas. La intersección son 3 cuadros de los doce en total ($\frac{3}{12}$). En el segundo caso se toman los dos últimos renglones y dos de las columnas. La intersección son 4 de los doce ($\frac{4}{12}$).

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos den sentido al resultado de la multiplicación representando en el cuadrado un rectángulo que tenga por lados 0.48 y 0.6. Se espera que interpreten el área del rectángulo (0.288) como 288 milésimos del cuadrado. Podrían escribirlo como 2 880 diezmilésimas, $\frac{2880}{10000}$ o 0.2880. Es probable que algunos sepan que estos números son equivalentes a 0.288, si nadie en el grupo llega a este resultado, durante la confrontación usted puede recordárselos.

Respuestas. Es un cuadrado de 100 × 100, en total hay 10 000 cuadritos, así que cada cuadrito es $\frac{1}{10000}$. Cada renglón o columna de cuadritos es igual a $\frac{1}{10000} \times 100 = \frac{1}{100}$. Para hacer la multiplicación se toman 48 renglones de un lado ($\frac{48}{100}$), y del otro se toman 60 columnas ($\frac{60}{100}$). La intersección es de 2 880 cuadritos, es decir, $\frac{2880}{10000}$ o 0.288.

SECUENCIA 11

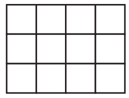
SESIÓN 2

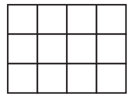
EL PUNTO ES EL ASUNTO

>>> Para empezar

En la secuencia 10 aprendiste a representar la multiplicación de fracciones por medio de áreas de rectángulos.

Calcula y representa el resultado de estas multiplicaciones.

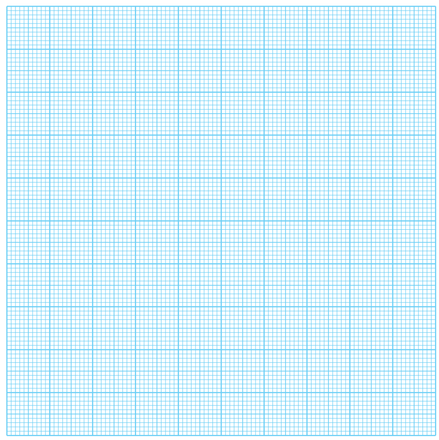
$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} =$ 

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} =$ 

En esta sesión utilizarás el mismo procedimiento para multiplicar números con punto decimal.

>>> Consideremos lo siguiente

Utilicen el siguiente cuadrado para calcular el resultado de la multiplicación 0.48 × 0.6 considerando que la medida del lado del cuadro es la unidad.



Expliquen a sus compañeros cómo hallaron la respuesta de 0.48 × 0.6 utilizando el cuadrado anterior. En su explicación digan cómo hicieron para ubicar el número 0.48 en un lado del cuadrado y cómo para ubicar el 0.6. Expliquen también qué número decimal es el resultado y cómo se interpreta.

142

Posibles dificultades. Si los alumnos no pueden resolver la actividad:

1) Indague si la entendieron.
2) Si la entendieron pero no saben qué hacer, puede darles algunas ideas, por ejemplo,
   - ¿Cómo se lee el número 0.6?
   - ¿Cómo se escribe 0.6 usando una fracción común?
   - ¿Cómo se representan $\frac{6}{10}$ en uno de los lados del cuadrado?

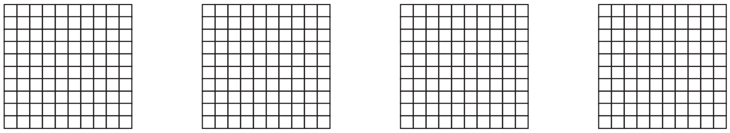
Y hacer preguntas similares para 0.48.

Sugerencia didáctica. Durante la confrontación enfatice que:

- Al multiplicar décimos por centésimos se obtuvieron milésimos.
- Un factor tiene dos decimales, el otro uno y en el producto tres.

>>> Manos a la obra

I. Representen y calculen el resultado de las multiplicaciones indicadas, consideren que la medida del lado de cada cuadrado es una unidad.



0.3 × 0.9 = ______ 0.4 × 0.4 = ______ 0.8 × 0.9 = ______ 0.7 × 0.6 = ______

a) ¿En cuántas partes está dividido cada cuadrado unidad? ____________

b) ¿Qué fracción del cuadrado unidad es cada una de esas partes? ____________

c) Al multiplicar décimos por décimos, ¿qué se obtiene en el resultado? Subrayen la respuesta correcta.

Décimos **Centésimos** **Milésimos** **Diezmilésimos**

II. Resuelvan las siguientes operaciones.

$\frac{4}{100} \times \frac{3}{10} =$ $\frac{8}{1000} \times \frac{4}{10} =$ $\frac{9}{10} \times \frac{6}{10} =$ $\frac{6}{10} \times \frac{9}{100} =$

$\frac{12}{100} \times \frac{6}{10} =$ $\frac{125}{1000} \times \frac{2}{10} =$ $\frac{8}{10} \times \frac{12}{10} =$ $\frac{25}{100} \times \frac{9}{100} =$

III. Utilicen los resultados anteriores para completar las siguientes multiplicaciones, pero ahora escriban el resultado utilizando números con punto decimal.

0.04 × 0.3 = ____________ 0.008 × 0.4 = ____________

0.9 × 0.6 = ____________ 0.6 × 0.09 = ____________

0.12 × 0.6 = ____________ 0.125 × 0.2 = ____________

0.8 × 1.2 = ____________ 0.25 × 0.09 = ____________

143

Propósito de la actividad. Todas las actividades del apartado *Manos a la obra* están encaminadas a construir un algoritmo para multiplicar decimales. En la actividad I se pretende que el alumno deduzca que multiplicar décimos por décimos da centésimos y que lo visualice gráficamente en los recuadros.

Respuestas. Cada cuadrado es de 10 × 10 y en total hay 100 cuadritos, así que cada cuadrito es $\frac{1}{100}$. Para resolver el primer ejercicio, por ejemplo, se toman 3 reglones (30 cuadritos = $\frac{30}{100}$), y 9 columnas (90 cuadritos = $\frac{90}{100}$). El resultado son 27 cuadritos, es decir, $\frac{27}{100}$ o 0.27.

Sugerencia didáctica. En la secuencia 10 se estudió la multiplicación de fracciones, así que se espera que los alumnos puedan resolver esta actividad. Para lograr el vínculo con la actividad III, aclare a los alumnos que no es necesario simplificar el resultado.

Para recordar. Una fracción con denominador 10, 100, 1 000 puede expresarse también con un número con punto decimal:

$\frac{1}{10}$ se lee un décimo y puede escribirse como 0.1.

$\frac{4}{100}$ se lee cuatro centésimos y puede escribirse 0.04.

$\frac{125}{1000}$ se lee ciento veinticinco milésimos y puede escribirse 0.125.

Cuando las cifras no alcanzan para poner el punto en el lugar adecuado entonces se completa con ceros. Por ejemplo, para cuatro centésimos se requieren dos lugares y el 4 sólo tiene una cifra, por ello se escribe un cero entre el punto y el cuatro: 0.04.

Sugerencia didáctica. Escriba en el pizarrón algunos de los números de las multiplicaciones y pida a los alumnos que los lean. También puede pedirles que los escriban en forma de fracción.

Por ejemplo:

0.04

"cuatro centésimos"

$\frac{4}{100}$

Si nota que muchos alumnos tienen dificultades, es conveniente hacer algunos ejercicios como éste de manera grupal.

Posibles dificultades. Si nota que a los alumnos les cuesta trabajo llenar la tabla, invítelos a analizar las multiplicaciones que acaban de hacer. **Respuestas.** Para los millonésimos hay varias soluciones, por ejemplo, décimos por cienmilésimos y milésimos por milésimos.

2

Sugerencia didáctica. Es muy común que los alumnos sepan más de lo que pueden expresar, sobre todo si es por escrito. No se preocupe si escriben algo que no es completo o correcto, con la práctica podrán, poco a poco, desarrollar esta habilidad.
Invite a varios alumnos a que lean lo que anotaron y comenten qué reglas son correctas y cuál es la que se entiende mejor.

IV. Analicen los resultados anteriores y completen la tabla.

Al multiplicar:	Se obtiene:
décimos por décimos	centésimos
	milésimos
centésimos por centésimos	
milésimos por centésimos	
	millonésimos

V. Coloquen correctamente el punto decimal en el resultado.

$$\begin{array}{r} 4.5 \\ \times\ 2.1 \\ \hline 45 \\ 90\ \ \\ \hline 945 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.23 \\ \times\ 4.7 \\ \hline 861 \\ 492\ \ \\ \hline 5781 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4.56 \\ \times\ 0.98 \\ \hline 3648 \\ 4104\ \ \\ \hline 44688 \end{array}$$

Analicen las operaciones y escriban una regla para la multiplicación de números con punto decimal.

____

____

____

____

VI. Resuelvan la multiplicación del problema inicial (0.48 × 0.6) con la regla que escribieron y comprueben si llegaron al mismo resultado que cuando la resolvieron con el cuadrado.

144

VIII. Realiza en tu cuaderno las siguientes multiplicaciones.

123. 45 × 4.8   3.23 × 1.3   6.78 × 0.129   8.9 × 4.6

>>> A lo que llegamos

Para resolver multiplicaciones de números con punto decimal se procede igual que en las multiplicaciones de números enteros, sólo que al final se coloca el punto donde corresponde, recordando que décimos por décimos dan como resultado centésimos, centésimos por décimos resultan milésimos, etcétera.

$$\begin{array}{r l}
4.56 & \leftarrow \text{Primer factor (centésimos, 2 decimales)} \\
\times\ 3.7 & \leftarrow \text{Segundo factor (décimos, 1 decimal)} \\
\hline
3\,1\,9\,2 & \\
1\,3\,6\,8 & \\
\hline
1\,6.8\,7\,2 & \leftarrow \text{Resultado (milésimos, 2 + 1 = 3 decimales)}
\end{array}$$

Una manera sencilla de saber dónde colocar el punto decimal es sumando el número de cifras que hay a la derecha del punto decimal en el primer factor y en el segundo factor, y en el resultado poner esa cantidad de cifras decimales.

Por ejemplo, en la multiplicación anterior hay 3 cifras después del punto (2 en el primer factor y 1 en el segundo factor), por ello en el resultado se dejan 3 cifras después del punto.

Cuando hagan falta lugares para poner el punto en el lugar adecuado se completa la cantidad con ceros. Por ejemplo:

$$0.08 \times 0.4 = 0.032$$

145

Sugerencia didáctica. El manejo de técnicas es otro de los propósitos de la enseñanza de las matemáticas, por ello se incluyen ejercicios para que el alumno practique la técnica aprendida. Si lo cree necesario puede poner más operaciones para que los alumnos las resuelvan en su cuaderno. Si quiere enriquecer la actividad se sugiere que elija una operación e invite a los alumnos a que inventen un problema que se resuelva con ella. Es un ejercicio interesante que apela a la creatividad del alumno y contribuye a su comprensión de la operación en juego.

2

Sugerencia didáctica. Repase con los alumnos esta información y de ser necesario resuelvan más multiplicaciones (los alumnos pueden proponerlas).
Enfatice la regla de completar con ceros cuando sea necesario.

Propósito de la sesión. Resolver problemas diversos que implican multiplicar números con punto decimal.
Organización del grupo. La sesión puede trabajarse en equipos.

Respuestas y posibles procedimientos.
Algunas formas de resolver los incisos, son:

a) 1.14. Se puede obtener al multiplicar 0.38 × 3 o al sumar 3 veces 0.38.

b) Al dividir 60.6 entre 3 se obtiene que 10 g de cereal tienen 20.2 mg de vitamina C; luego se multiplica por 10 para obtener 100 g, resultando 202 mg.

c) El 25% es la cuarta parte, entonces 0.51 mg es la cuarta parte de la vitamina B12 que necesitamos diariamente. Para obtener el total se multiplica 0.51 × 4 = 2.04 µg. Una porción de cereal con un vaso de leche aporta 75 + 151.50 = 226.50 µg. Como se ingiere en el desayuno y en la cena, se multiplica por 2.

Sugerencia didáctica. Si nota que en algunos equipos sólo algunos trabajan y los demás siguen instrucciones, invite a estos últimos a que participen haciéndoles preguntas como: ¿Estás de acuerdo con él?, ¿tú qué opinas?, ¿tú cómo lo resolverías? Otra buena estrategia para promover la participación de todos los integrantes de un equipo es indicar que en la confrontación de resultados pasará al frente un integrante elegido al azar y que éste debe ser capaz de explicar lo que hicieron en el equipo, por lo que es necesario que se cercioren de que todos los integrantes han entendido y están de acuerdo con la manera en que se solucionó el problema.

SESIÓN 3

¿EN DÓNDE SE USA LA MULTIPLICACIÓN DE DECIMALES?

>>> Lo que aprendimos

1. La información de vitaminas de un cereal para niños indica:

La expresión µg se lee "microgramos" y es la milésima parte de un miligramo.

VITAMINAS	CANTIDAD EN UNA PORCIÓN DE 30 g
Vitamina A	151.50 µg
Vitamina C	60.6 mg
Vitamina B1	0.38 mg
Vitamina B2	0.43 mg
Niacina	5.05 mg
Vitamina B6	0.51 mg
Vitamina B12	0.51 µg

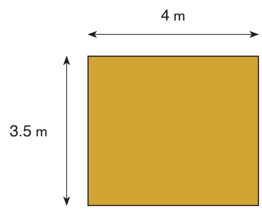
a) ¿Qué cantidad de vitamina B1 se consume con 3 porciones de 30 g de ese cereal? ______

b) ¿Qué cantidad de vitamina C se consume con 100 g de ese cereal? ______

c) Una porción de ese cereal aporta el 25% de la vitamina B12 que se debe consumir diariamente, ¿qué cantidad de vitamina B12 se debe consumir en un día? ______

d) Medio vaso de leche aporta 75 µg de vitamina A. Si una persona desayuna y cena una porción de cereal con medio vaso de leche, ¿qué cantidad de vitamina A le aportan estos alimentos? ______

2. Luisa quiere cubrir el piso de su recámara con losetas. Las dimensiones del piso son 4 m de largo por 3.5 m de ancho.



a) ¿Cuántos metros cuadrados necesita comprar de loseta? ______

b) El metro cuadrado de la loseta que va a comprar le cuesta $135.50, ¿cuánto gastará en loseta? ______

c) Va a necesitar 7 bultos de pegamento para loseta, cada bulto cuesta $59.90, ¿cuánto gastará en el pegamento? ______

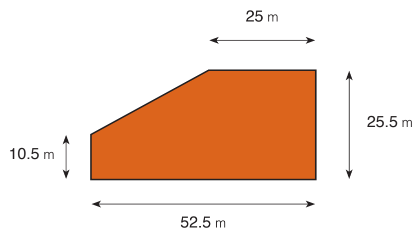
146

Integrar al portafolios. Analice las respuestas de los alumnos y si nota que tienen dificultades resuelvan juntos el apartado *Manos a la obra* del I al III de la sesión 2.

d) La mano de obra del albañil le va a costar $70 por metro cuadrado, ¿cuánto le pagará al albañil? ______

e) ¿Cuánto gastará Luisa en total? ______

3. Don Fer va a vender un terreno que tiene la siguiente forma y dimensiones:



Si va a vender a $150 el metro cuadrado, ¿cuál es el costo del terreno? ______

4. Contesten:

a) ¿Qué número con punto decimal multiplicado por 8 da 4? ______

b) ¿Qué número con punto decimal multiplicado por 12 da 9? ______

c) ¿Por cuál número con punto decimal hay que multiplicar 100 para obtener 25? ______

Comenten en grupo sus procedimientos y resultados a estos problemas.

>>> Para saber más

Sobre los números decimales en la vida cotidiana consulta:
http://www.sectormatematica.cl/basica/decvida.htm
[Fecha de consulta: 16 de junio 2006].
Da clic en *"Multiplicando con decimales"* y *"Multiplicando decimales menores que 1"*.

147

Posibles procedimientos. Primero hay que calcular el área total del terreno. Una manera de hacerlo es completando el rectángulo. La esquina que falta tiene la forma de un triángulo rectángulo de 15 × 27.5, entonces el área del rectángulo es de 52.5 × 25.5= 1 338.75 m². Entonces, se quita el área de la esquina que es de 15 × 27.5 ÷ 2 = 206.25 m², y se restan 1 338.75 – 206.25 = 1 132.5 m². Ésta es el área del terreno. Se multiplica ahora 1 132.5 × 150 (costo por metro cuadrado) y se obtiene $169,875 que es el costo del terreno.

También puede dividirse en tres figuras, trazando dos líneas desde las esquinas del lado recortado. Se obtienen dos rectángulos y un triángulo rectángulo.

Aunque la actividad implica la división de números con punto decimal que los alumnos estudiarán en el bloque III, lo más probable es que sus conocimientos previos les permitan resolverlo, pero también puede sugerirles que usen la calculadora.

Respuestas.

a) 0.5.

b) 0.75.

c) 0.25.

Propósito de la sesión. Reconocer a la mediatriz de un segmento como la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento, como el eje de simetría del segmento y como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Organización del grupo. El problema inicial se resuelve en equipos y el apartado *Manos a la obra* de manera individual.

Materiales. Juego de geometría (para las tres sesiones de toda la secuencia).

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos se familiaricen con la representación gráfica y con la ubicación de algunos puntos. Las respuestas pueden obtenerse únicamente mediante la observación, aunque es probable que algunos alumnos midan para ser más precisos.

Posibles procedimientos. La mayoría encontrará el punto medio del segmento que determinan las casas de Ara y Bety, con la idea de que Carlos vive a la mitad del camino entre ambas casas; para ello, es muy probable que utilicen la regla. Es difícil que consideren otros puntos que también se encuentran a la misma distancia de ambas casas; probablemente ubicarán esos otros puntos por aproximación, midiendo con su regla.

SECUENCIA 12

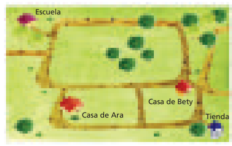
Mediatriz y bisectriz

En esta secuencia aprenderás a utilizar las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo para resolver diversos problemas geométricos.

SESIÓN 1

A LA MISMA DISTANCIA

>>> Para empezar



Éste es un croquis de una parte del pequeño pueblo donde vive Ara.

¿Quién vive más cerca de la tienda? ____________

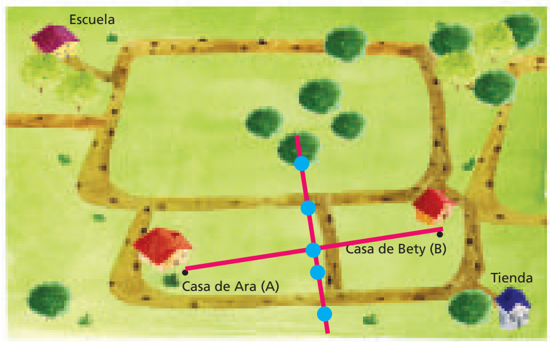
____________ , ¿y de la escuela?

____

>>> Consideremos lo siguiente

Carlos vive a la misma distancia de la casa de Ara (A) que de la de Bety (B).

Marquen con puntos 5 lugares diferentes donde puede estar la casa de Carlos.



Platiquen con otros equipos: ¿Qué hicieron para localizar puntos que estuvieran a la misma distancia de la casa de Ara y de la de Bety?, anoten en el pizarrón las distintas maneras en que se resolvió el problema y vean sus semejanzas y diferencias.

148

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Significado y uso de las operaciones.
Antecedentes
Para trabajar con esta secuencia los alumnos requieren del apoyo de algunos conceptos geométricos, por ejemplo: recta, semirrecta y segmento. Es conveniente que en los momentos en los que se haga uso de esos conceptos se dé un tiempo breve para repasarlos o recordarlos. Asimismo, se requieren ciertos procedimientos que los alumnos utilizaron en la secuencia 5: medición de ángulos, trazo de perpendiculares y medición de la distancia de un punto a una recta.

Propósitos de la secuencia
Que los alumnos utilicen las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo para resolver diversos problemas geométricos

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*A la misma distancia* Reconocer a la mediatriz de un segmento como la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento, como el eje de simetría del segmento y como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.	Interactivo
2	*Un problema geométrico* Reconocer a la bisectriz de un ángulo como la semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos iguales, como el eje de simetría del ángulo y como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.	Interactivo Video *Mitades de ángulos*
3	*Apliquemos nuestros conocimientos de mediatrices y bisectrices* Aplicar las propiedades de la mediatriz y la bisectriz en la resolución de diversos problemas.	

>>> Manos a la obra

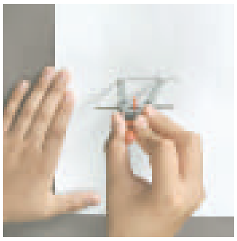
I. Considera que los siguientes puntos representan la casa de Ara (A) y la casa de Bety (B)

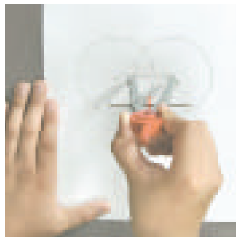
- En un grupo, un equipo encontró un punto que está a la misma distancia de A y de B con el siguiente procedimiento:

Paso 1. Se abre el compás a una medida mayor que la mitad de la distancia entre A y B

Paso 2. Se apoya el compás en A y se traza un círculo con la medida elegida en 1.

Paso 3. Luego se apoya el compás en B y se traza un círculo con el mismo radio del círculo anterior y que lo corte. Los puntos de corte están a la misma distancia de A y B.





Ese equipo dice que los puntos donde se cortan las circunferencias equidistan de A y de B.

a) ¿Es correcto su procedimiento? ____________ ¿Por qué? ____________

b) Utiliza este método para hallar tres puntos que equidisten de A y de B.

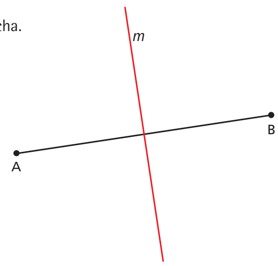
c) Traza una recta que pase por los tres puntos que localizaste. Nombra *m* a la recta.

II. Al trazar la recta obtuviste un dibujo como el de la derecha.

a) Observa que esta recta resulta de unir algunos puntos que equidistan de A y de B. ¿Los demás puntos de la recta también equidistan de A y de B?

b) En este dibujo localiza 3 puntos diferentes en la recta *m*.

c) Nombra R, S y T a los puntos que localizaste. Completa la tabla de la siguiente página.



49

Propósito de las actividades. En este apartado se presenta un procedimiento sistemático para obtener puntos que están a la misma distancia de A y de B; la presentación de este procedimiento va acompañada de preguntas para que los alumnos reflexionen sobre él. Durante la confrontación de respuestas invite a los alumnos a que argumenten por qué el procedimiento descrito es o no correcto.

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos vayan incorporando a su vocabulario algunos términos geométricos: "equidistan", "extremos", "mediatriz", "recta" y "segmento". Aproveche distintos momentos de la clase para recordar o aclarar el significado de cada término.

Posibles respuestas. El procedimiento sí es correcto, pero para los alumnos puede resultar difícil argumentar por qué. Algunas posibles respuestas son: "Porque los radios son iguales". "Porque están a la misma distancia". "Porque A y B son los centros de las circunferencias". Anime a los alumnos a expresar sus argumentos.

Respuestas. Las distancias indicadas en ambas columnas deben ser iguales.

Propósito de la actividad. La preguntas g) y h) tienen como propósito que los alumnos se den cuenta de la relación que guardan entre sí varios conceptos matemáticos; en este caso identificarán que la mediatriz de un segmento es la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento y, además, es su eje de simetría.
Sugerencia didáctica. Anímelos a que argumenten la idea anterior. Es probable que sus respuestas al inciso h) sean muy limitadas: "Por que sí", "porque se ve", "porque es el eje de simetría". Motívelos para que incluyan más argumentos que involucren lo estudiado en las lecciones de simetría, por ejemplo: "Porque la recta es como un espejo en el que la mitad del segmento se refleja del otro lado"; "porque al doblar por la recta el punto A y el B coinciden"; o bien, "porque el punto A y B equidistan del eje y el segmento que los une es perpendicular a él".

Distancia de **R** a **A**		Distancia de **R** a **B**	
Distancia de **S** a **A**		Distancia de **S** a **B**	
Distancia de **T** a **A**		Distancia de **T** a **B**	

d) ¿Son iguales o diferentes? ______

Comparen y comenten sus respuestas hasta este punto. Lean con atención la siguiente información y encuentren y comenten las respuestas a los incisos desde e) hasta h).

El conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento forman una recta que recibe el nombre de mediatriz del segmento.
Si un punto equidista de los extremos del segmento, entonces pertenece a la mediatriz del segmento.

e) ¿La mediatriz de un segmento pasa por el punto medio del segmento? ______

f) ¿Cuánto mide el ángulo que forman la mediatriz y el segmento? ______

g) ¿La mediatriz de un segmento es el eje de simetría del segmento? ______

h) ¿Por qué? ______

III. Para trazar la mediatriz de un segmento se traza la perpendicular en el punto medio del segmento.

Paso 1. Dado el segmento $\overline{PQ}$, se localiza el punto medio (usa tu regla para medir).

Paso 2. Se colocan las escuadras como se muestra, primero se debe colocar la escuadra azul.

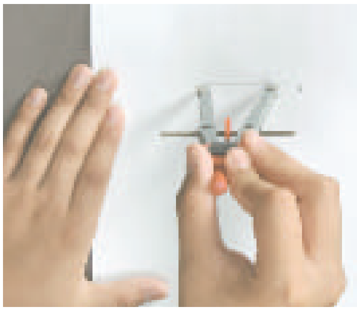
Paso 3. Se gira la escuadra azul sin mover la verde y se traza la perpendicular por el punto medio.

150

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos desarrollen la habilidad de interpretar instrucciones escritas para hacer trazos geométricos, pero esa habilidad se desarrolla gradualmente. Anímelos a interpretar la información y evite sustituir su esfuerzo por las explicaciones que usted podría dar. El tiempo invertido en el esfuerzo de los alumnos podrá recuperarse cuando se enfrenten nuevamente a una situación similar.

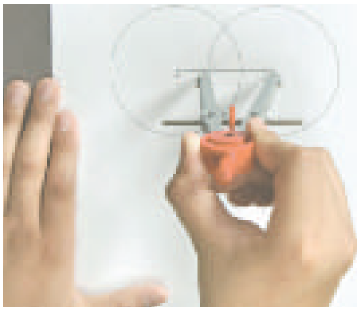
Otra manera de trazar la mediatriz de un segmento es la siguiente:

Paso 1. Se apoya el compás sobre un extremo del segmento y se abre a una distancia mayor que la mitad del segmento.

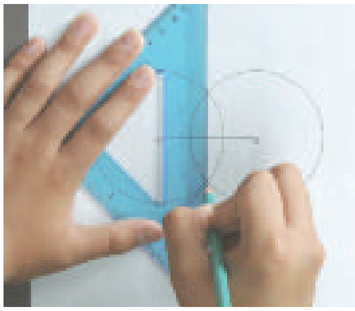


Paso 2. Se traza un círculo.

Paso 3. Se apoya el compás en el otro extremo del segmento y se traza otro círculo con el mismo radio que el anterior.



Paso 4. Se unen los puntos de corte de los círculos y se obtiene la mediatriz.



IV. Traza dos segmentos en tu cuaderno; a cada uno trázale su mediatriz.

V. Regresa al problema inicial (el de las casas de Ara y Bety) y haz lo siguiente:

a) Traza el segmento que va de la casa de Ara a la de Bety.

b) Traza la mediatriz de ese segmento.

c) Si habías localizado bien los cinco puntos en los que podría estar la casa de Carlos, todos estarán sobre la mediatriz.

151

Propósito de la actividad. El "Manejo de técnicas" es una de las habilidades que los alumnos deben desarrollar, para ello son necesarias actividades de ejercitación como ésta. Permita que los alumnos elijan entre los dos procedimientos que se les muestran para trazar la mediatriz.

Propósito de la actividad. Es importante que realicen esta actividad para comprobar su respuesta al problema inicial, pues es una manera de validar los procedimientos que hayan empleado.

5

Sugerencia didáctica. Comisione a una pareja de alumnos para que elabore un cartel con la información que aquí se presenta. Ese cartel se pegará en el salón para que los alumnos puedan consultarlo cuando sea necesario.
Lea y comente con el grupo esta información. Enfatice el hecho de que un mismo concepto matemático está relacionado con otros de diversas maneras. Posteriormente puede pedirles que copien la información en sus cuadernos.

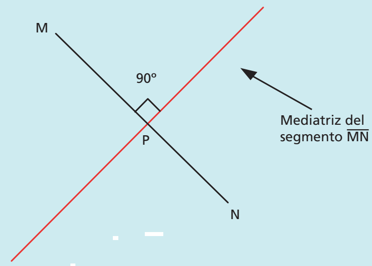
Propósito del interactivo. Explorar las propiedades de la mediatriz.

Propósito de la sesión. Reconocer a la bisectriz de un ángulo como la semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos iguales, como el eje de simetría del ángulo y como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.
Organización del grupo. El problema inicial se resuelve en parejas y el apartado *Manos a la obra* de manera individual.

SECUENCIA 12

>>> A lo que llegamos

La **mediatriz** de un segmento es:
1. El conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento.
2. La perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.
3. El eje de simetría del segmento.



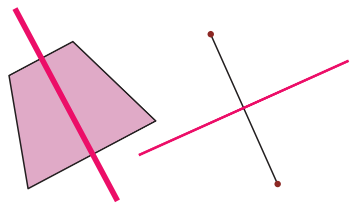
$\overline{MP} = \overline{PN}$, P es el punto medio del segmento $\overline{MN}$.

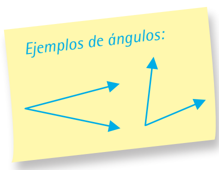
SESIÓN 2

UN PROBLEMA GEOMÉTRICO

>>> Para empezar

Tú ya has trabajado con ejes de simetría de figuras y de segmentos.
Traza el eje de simetría del siguiente trapecio y el del segmento:





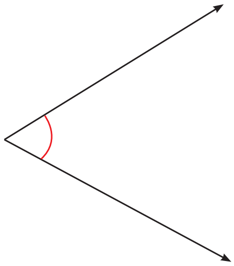
¿Crees que los ángulos también tienen eje de simetría?

152

Propósito de la actividad. Recordar a los alumnos el trazo de ejes de simetría, lo que permitirá iniciar el estudio de la bisectriz como eje de simetría de un ángulo.
Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, revise junto con los alumnos la sesión 2 de la secuencia 5, para recordar el trazo de ejes de simetría.

>>> Consideremos lo siguiente

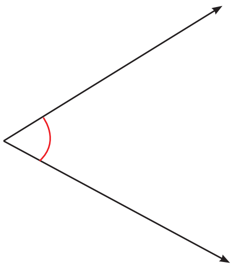
¿De qué manera podrían trazar lo más exactamente posible el eje de simetría del siguiente ángulo? Elaboren un plan y tracen el eje de simetría utilizando sus instrumentos geométricos.



Platiquen a su grupo la estrategia que utilizaron para trazar el eje de simetría del ángulo, busquen la manera de validar los procedimientos: ¿cómo pueden estar seguros de que en realidad trazaron el eje de simetría?

>>> Manos a la obra

I. El siguiente ángulo es igual al anterior.



Recuerda que:
Para medir un ángulo se usa el transportador.

a) ¿Cuánto mide el ángulo? ______

b) Divide con una semirrecta el ángulo marcado con el arco rojo en dos ángulos de la misma medida; la semirrecta debe iniciar en el vértice del ángulo. Nómbrala *b*.

c) ¿Cuánto mide cada uno de los dos ángulos resultantes? ______

d) ¿La semirrecta *b* es eje de simetría del ángulo inicial? ______

¿Por qué? ______

153

Posibles procedimientos. La indicación de que deben usar sus instrumentos geométricos para trazar el eje de simetría impide que recurran al doblado de la hoja por la mitad o que se orienten simplemente por la percepción visual; no obstante, pueden recurrir a otros procedimientos: medir la distancia que hay entre dos puntos (uno de cada lado del ángulo, procurando que estén a la misma distancia del vértice) y ubicar el punto medio de esa distancia; o bien, uniendo con un segmento las dos puntas de flecha (formando un triángulo), medir ese segmento y ubicar el punto medio. El eje partiría del vértice y cortaría el segmento por su punto medio. Otros podrían utilizar el transportador para medir el ángulo y partirlo por la mitad.

Sugerencia didáctica. Motive a los alumnos para que platiquen sus procedimientos y para que ellos mismos los validen. En la actividad V del apartado *Manos a la obra* hallarán una manera de saber si trazaron correctamente el eje de simetría.

Sugerencia didáctica. En la medida que los alumnos avancen en el estudio de la geometría tendrán que incorporar nuevos términos y, sobre todo, hallar relaciones y diferencias con otros términos que ya estudiaron. En este momento es importante comentar con los alumnos la diferencia entre recta, semirrecta y segmento. Puede hacerlo cuando los alumnos estén resolviendo esta parte o al momento de la confrontación de las respuestas.

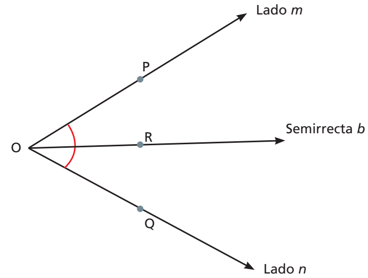
Posibles respuestas. Para la pregunta d), es probable que los alumnos no den argumentos matemáticos; invítelos a que recuerden lo estudiado en la secuencia 5 sobre simetría y que verifiquen con ello si la semirrecta *b* es o no eje de simetría. Algunos argumentos posibles son: "Cada punto tiene a su simétrico del otro lado". "La semirrecta funciona como espejo". "Divide al ángulo en dos ángulos de tal manera que cada uno es simétrico del otro".

Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que la distancia de un punto a una recta se mide por la perpendicular; de ser necesario, muestre en el pizarrón cómo se traza, utilizando los instrumentos geométricos.

Respuesta. Las distancias indicadas en ambas columnas de la tabla deben ser las mismas.

II. Si hiciste bien los trazos anteriores debes haber obtenido una figura como la siguiente:

Recuerda:
recta
semirrecta
segmento



La semirrecta que pasa por el vértice del ángulo POQ y determina el ángulo POR igual al ángulo ROQ recibe el nombre de bisectriz.

- Localiza 5 puntos diferentes en la bisectriz.
- Nombra A, B, C, D y E a los puntos que localizaste.
- Mide la distancia de cada punto a los lados del ángulo.

Distancia de **A** al lado *m*		Distancia de **A** al lado *n*	
Distancia de **B** al lado *m*		Distancia de **B** al lado *n*	
Distancia de **C** al lado *m*		Distancia de **C** al lado *n*	
Distancia de **D** al lado *m*		Distancia de **D** al lado *n*	
Distancia de **E** al lado *m*		Distancia de **E** al lado *n*	

Recuerda que:
La distancia de un punto a una recta se mide por la perpendicular del punto a la recta.

- Analiza los resultados de cada renglón de la tabla.

a) ¿Cómo son las distancias de los puntos de la bisectriz a los lados del ángulo?

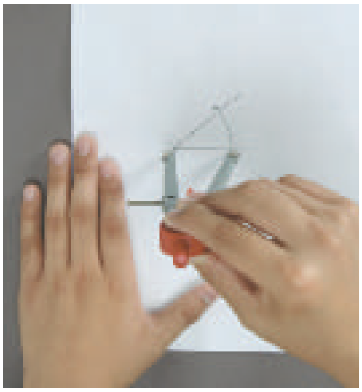
b) ¿Pasará lo mismo con otros puntos de la bisectriz?, escoge otros dos puntos y comprueba si equidistan de los lados del ángulo.

154

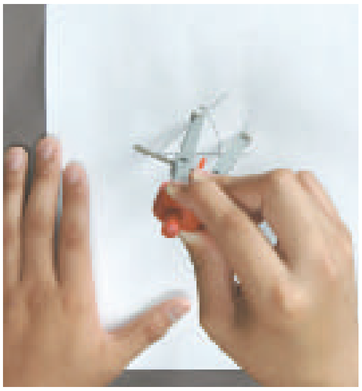
Propósito de la actividad. Los alumnos aún no están en posibilidades de hacer demostraciones para garantizar que esta propiedad se cumple en todos los casos; en este nivel es suficiente que prueben con varios puntos que ellos mismos elijan para llegar a la conclusión de que lo más probable es que esta propiedad se cumpla para todos los puntos de la bisectriz.

III. En la actividad I trazaste la bisectriz de un ángulo al dividir en dos partes iguales el ángulo. Ahora lee con atención este otro procedimiento para trazar la bisectriz de un ángulo.

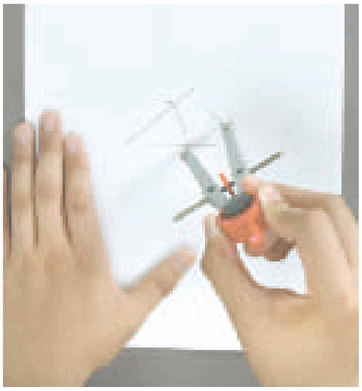
Paso 1. Se apoya el compás en el vértice del ángulo y se traza un arco que corte a los dos lados del ángulo. Llama M y N a los puntos de corte.



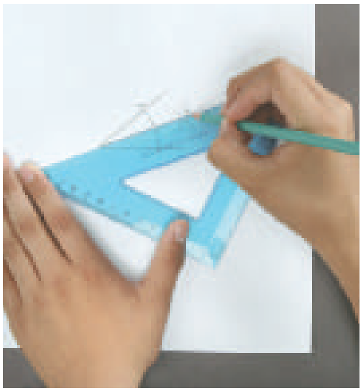
Paso 2. Se apoya el compás en M y se traza un arco suficientemente grande.



Paso 3. Se apoya el compás en N y con la misma abertura se traza otro arco que corte el anterior. Llamamos P al punto de corte.



Paso 4. Se une el vértice del ángulo con P y se obtiene la bisectriz del ángulo.



155

2

Sugerencia didáctica. Permita que sean los alumnos quienes traten de interpretar las instrucciones escritas, posteriormente usted puede comentar al grupo esta secuencia de pasos para trazar una bisectriz.

Propósito del interactivo. Observar paso a paso el procedimiento para trazar la bisectriz.

Sugerencia didáctica. Recuerde que es importante que los alumnos desarrollen la habilidad de manejar técnicas. Si no da tiempo de llevar a cabo la actividad IV en la clase, puede dejarla como tarea.

Sugerencia didáctica. Motive a los alumno a que realmente comprueben si resolvieron correctamente el problema inicial, siguiendo el procedimiento que aquí se indica.

5

Sugerencia didáctica. Comisione a una pareja de alumnos para que elabore un cartel con esta información. Lea y comente con el grupo esta información, puede ir verificando, junto con los alumnos, cada una de las definiciones de bisectriz. Puede pedirles que copien la información en sus cuadernos.

Propósito del interactivo. Explorar las propiedades de la bisectriz.

IV. Traza dos ángulos en tu cuaderno. A cada ángulo trázale su bisectriz.

V. Regresa al problema inicial del trazo del eje de simetría del ángulo y haz lo siguiente:

a) Con el procedimiento descrito en la actividad III traza la bisectriz del ángulo del problema inicial.

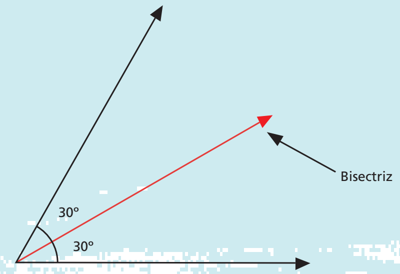
b) Si trazaste bien el eje de simetría, éste y la bisectriz deben coincidir en todos sus puntos.

Recapitulen en grupo lo que han estudiado hasta este momento y lean con atención la siguiente información.

>>> A lo que llegamos

La **bisectriz** de un ángulo es:

1. La semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y determina dos ángulos iguales.
2. El eje de simetría del ángulo.
3. El conjunto de puntos que equidistan de los lados del ángulo.



Mitades de ángulos

Ahora ya conoces dos palabras muy importantes en matemáticas: mediatriz y bisectriz. No sólo sabes lo que son sino que también sabes trazarlas utilizando tus instrumentos geométricos.

156

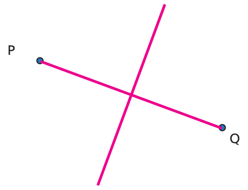
Propósito del video. Mostrar el trazo de la mediatriz y la bisectriz y plantear problemas diversos que las involucren.

APLIQUEMOS NUESTROS CONOCIMIENTOS DE MEDIATRICES Y BISECTRICES

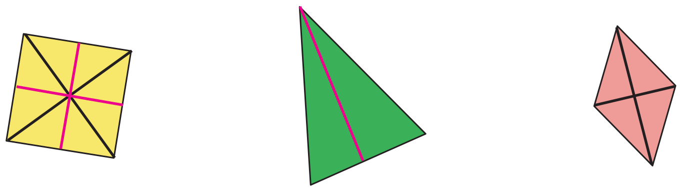
SESIÓN 3

>>> Lo que aprendimos

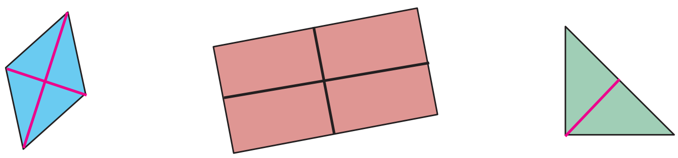
1. Traza el eje de simetría para que el punto P sea simétrico al punto Q.



2. Traza los ejes de simetría de cada figura. Marca con rojo los que, además de ser ejes de simetría, también sean mediatrices de algún lado de la figura.



3. Traza el o los ejes de simetría de cada figura. Remarca con rojo el que, además de ser eje de simetría, también es bisectriz de algún ángulo de la figura.



157

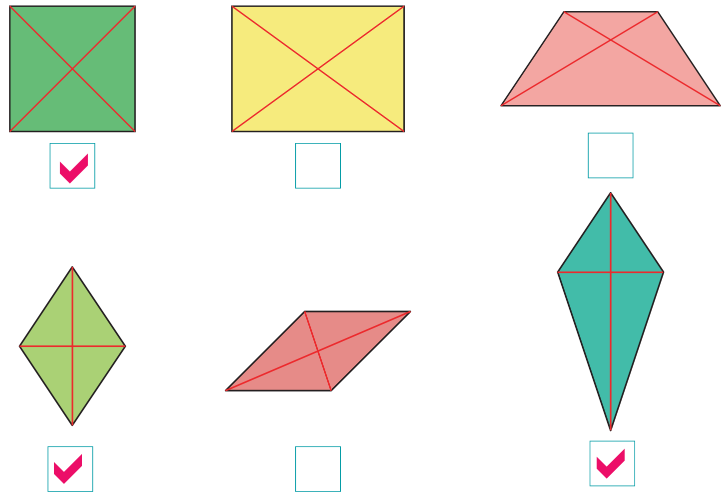
Propósito de la sesión. Aplicar las propiedades de la mediatriz y la bisectriz en la resolución de diversos problemas.

Organización del grupo. Se sugiere que toda las actividades se trabajen de manera individual y que al final se comparen las respuestas y procedimientos con todo el grupo. Puede dejar algunas de las actividades de tarea (particularmente la 6 y la 7) para que los alumnos tengan más tiempo de explorar una posible solución.

Propósito de las actividades. Las actividades 2 y 3 pretenden que los alumnos establezcan relaciones entre los conceptos de mediatriz y bisectriz por medio del concepto de eje de simetría.

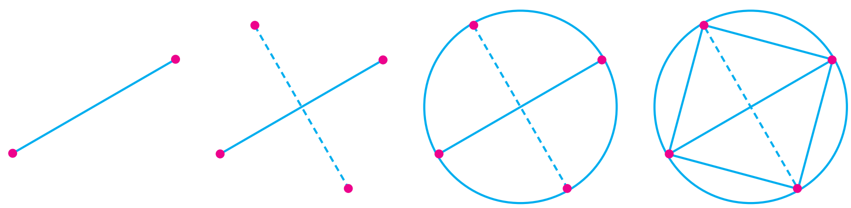
Sugerencia didáctica. Aun cuando los alumnos estudiaron las diagonales en la escuela primaria, es posible que no lo recuerden; si lo considera necesario recuerde a los alumnos lo que es una diagonal.

4. En los siguientes cuadriláteros se han trazado con rojo las diagonales. Marca con una palomita aquellos cuadriláteros en los que al menos una diagonal es mediatriz de la otra diagonal.



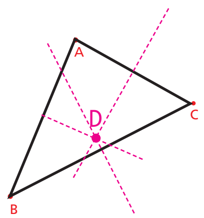
Respuesta. La clave para la resolución del problema es el trazo de la mediatriz: se traza un segmento y, posteriormente, la mediatriz del segmento. Después, con centro en el punto donde se cortan las mediatrices y tomando como radio la distancia de ese centro a un extremo del segmento, se traza una circunferencia; en la circunferencia quedan marcados los cuatro vértices del cuadrado, al unirlos se forma el cuadrado. Los dibujos de la derecha ilustran ese procedimiento.

5. Traza un segmento. Después traza un cuadrado de manera que el segmento sea una de sus diagonales.

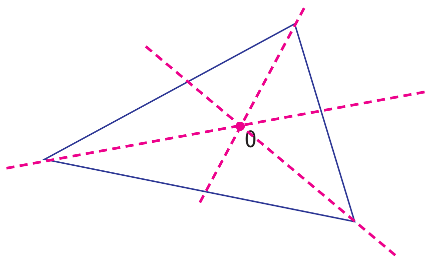


6. Los puntos A, B y C representan la ubicación de tres poblados diferentes. Se desea construir un centro de salud que esté a la misma distancia de los tres poblados. Localiza un punto D que represente el centro de salud.

Pista: recuerda que cualquier punto de la mediatriz de un segmento está a la misma distancia de los dos extremos del segmento.



7. Encuentra un punto que esté a la misma distancia de los tres lados del siguiente triángulo.



Hagan una puesta en común grupal y comparen los procedimientos y resultados de estos problemas; argumenten sus respuestas.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Construcciones básicas" y "Paralelas con doblado de papel" en *Una ventana a las formas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Integrar al portafolios. La herramienta que permite resolver este problema es el trazo de las mediatrices de cada uno de los segmentos que unen a los puntos A, B y C. El punto en el que se unen las tres mediatrices es en donde va el centro de salud. La dificultad está en que los alumnos identifiquen que la equidistancia de los puntos que conforman la mediatriz es precisamente la característica que les permite resolver el problema.
Si observa que los alumnos no consideran esa característica como parte de la solución del problema, repase con ellos las actividades número II del apartado *Manos a la obra* de la sesión 1. En caso de que sí identifiquen cómo se resuelve el problema, pero tengan dificultades para trazar las mediatrices, repase las actividades número III del apartado *Manos a la obra* de la sesión 1.

Integrar al portafolios. Es un problema con un grado de dificultad similar al anterior, pero ahora con la bisectriz. Hay que trazar la bisectriz de cada uno de los ángulos del triángulo. El punto buscado es justamente donde se cortan las bisectrices.
Si los alumnos no identifican que la equidistancia de los puntos que conforman la bisectriz es la característica que permite resolver el problema, repase las actividades número III del apartado *Manos a la obra* de la sesión 2. Si la dificultad está en el trazo de las bisectrices, repase las actividades número III del apartado *Manos a la obra* de la sesión 2.

Propósito de la sesión. Construir polígonos regulares inscritos en una circunferencia a partir de la medida de su ángulo central.
Organización del grupo. Se recomienda trabajar en parejas, y de manera individual la actividad VII del apartado *Manos a la obra*.
Materiales. Juego de geometría, un pedazo de cartulina o de cualquier papel, tijeras y colores.

Propósito de la actividad. Hacer un breve repaso sobre las características que definen a un polígono regular; este repaso debe ser breve y conciso, por lo que probablemente será necesario que usted intervenga para aclarar o corregir algunas ideas de los alumnos.

Propósito del video. Identificar a los polígonos regulares y utilizar sus propiedades para resolver problemas diversos.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos traten de trazar el octágono haciendo uso de sus propios procedimientos, no importa si éstos no son sistemáticos o formales. Sin embargo, la restricción de que la figura debe ser mayor que la del libro es para evitar que algunos alumnos la calquen y, de alguna manera, forzarlos a que traten de buscar otras estrategias.
Posibles procedimientos. Una estrategia es dibujar un círculo y dividirlo con líneas en 8 partes más o menos iguales. Los puntos donde las líneas corten la circunferencia son los vértices.
Otra opción es dibujar el octágono "al tanteo", sin tener mucho éxito porque hacerlo de este modo no es fácil.
Puede ser que algunos midan los ángulos y los lados y traten de reproducirlo con estos datos, aunque la medida de los lados debe ser mayor a la del dibujo. No importa si en este momento no logran resultados óptimos.

SECUENCIA 13

Polígonos regulares

En esta secuencia aprenderás a construir polígonos regulares a partir de distintas informaciones.

SESIÓN 1

TARJETAS DE FELICITACIÓN

>>> Para empezar

Dar y recibir tarjetas es una experiencia agradable, y si están hechas por uno mismo es aún mejor. Observa que en estos diseños hay figuras geométricas.

¿Cuál de las tarjetas está hecha en un polígono regular?

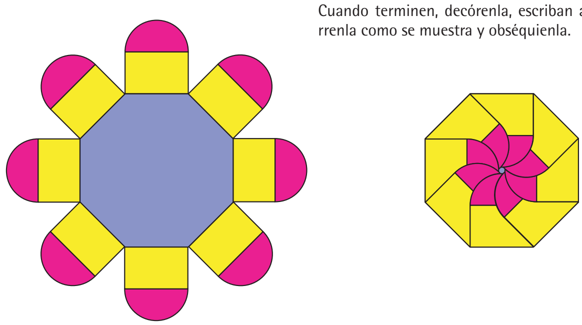
Felicidades

Los polígonos regulares se usan en muchos de los objetos que usamos en la vida cotidiana, tales como tarjetas de felicitación, mosaicos, cajas, edificios, etcétera.

Recuerda que:
Los polígonos regulares son los que tienen todos sus lados y sus ángulos iguales.

>>> Consideremos lo siguiente

Hagan un plan para que cada quién trace la figura de la izquierda para una tarjeta. Pueden hacerla de cualquier tamaño siempre y cuando sea mayor que la del libro. Cuando terminen, decórenla, escriban algo en ella, ciérrenla como se muestra y obséquienla.



160

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Antecedentes
Para trabajar con esta secuencia los alumnos deberán apoyarse en ciertos conceptos y procedimientos que han trabajado ya sea en la escuela primaria o en las secuencias 5 y 12: polígono regular, eje de simetría, ángulo, bisectriz, mediatriz, diagonal, y medición y trazo de ángulos.

Propósitos de la secuencia
Que los alumnos construyan polígonos regulares a partir de distintas informaciones.

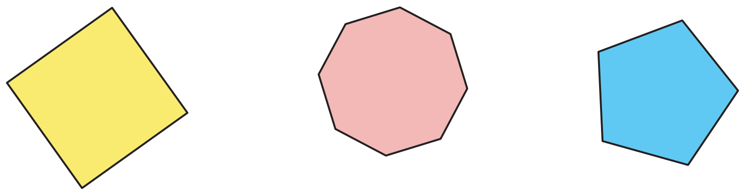
Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*Tarjetas de felicitación* Construir polígonos regulares inscritos en una circunferencia a partir de la medida de su ángulo central.	Interactivo Video *Felicidades*
2	*Mosaicos* Construir polígonos regulares a partir de la medida de su lado y su ángulo interior.	Interactivo
3	*Más sobre polígonos regulares* Construir polígonos regulares a partir de informaciones como: ejes de simetría, ángulos centrales, ángulos interiores, etcétera.	

Platiquen con sus compañeros el procedimiento que siguieron para trazar su tarjeta, en particular mencionen:

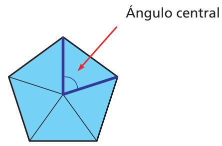
- Qué fue lo que hicieron para que el octágono fuera regular, es decir para que tuviera todos sus lados y sus ángulos iguales.

>>> Manos a la obra

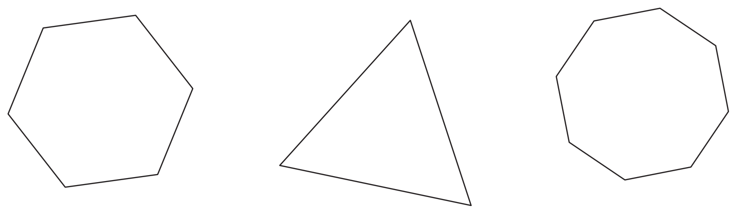
I. Al trazar dos ejes de simetría en un polígono regular, el punto donde se cortan es el centro del polígono. Hallen el centro de los siguientes polígonos regulares.



II. Los ángulos centrales de un polígono son los que tienen su vértice en el centro del polígono y sus lados pasan por dos vértices consecutivos del polígono. En el pentágono de la derecha se han marcado sus ángulos centrales.

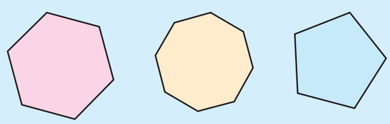


Tracen los ángulos centrales de los siguientes polígonos regulares.

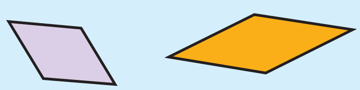


Recuerde que.

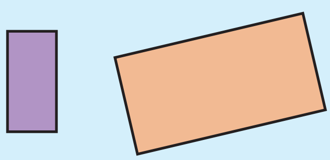
Un polígono es una superficie limitada por lados rectos. Un polígono regular es aquel que tiene todos sus ángulos iguales y todos sus lados iguales.



Los siguientes rombos no son polígonos regulares, tienen sus lados iguales pero sus ángulos no.



Los siguientes rectángulos tampoco son polígonos regulares, tienen sus ángulos iguales pero sus lados no.



Sugerencia didáctica. Durante la confrontación enfatice los trazos que cada equipo intentó. Lo importante en este momento es que analicen la figura, que traten de encontrar relaciones entre lados y ángulos y que desarrollen destreza en el uso de sus instrumentos geométricos.

Propósito de las actividades. A lo largo de este apartado se presenta uno de los procedimientos para construir polígonos regulares: a partir del ángulo central. Por ello se hace primero una breve presentación de la noción de ángulo central y después se va desarrollando el procedimiento para la construcción de polígonos regulares.

Sugerencia didáctica. Cerciórese de que cada pareja haya comprendido cuál es el ángulo central y que lo midan de manera correcta. Mientras observa el trabajo de los alumnos puede plantearles algunas preguntas que los hagan reflexionar:

1. ¿En un mismo polígono regular todos los ángulos centrales miden lo mismo? (La respuesta es sí.)
2. En polígonos regulares con el mismo número de lados pero de diferente tamaño ¿los ángulos centrales medirán lo mismo? (La respuesta es sí.)

Propósito de las actividades III y IV. Explorar que la medida del ángulo central, multiplicada por el número de lados de un polígono regular, siempre da 360°. Esto implica que:

- Conocido el número de lados de un polígono regular puede calcularse la medida del ángulo central.
- Conocida la medida del ángulo central de cierto polígono regular puede calcularse el número de lados del polígono.

Respuestas.

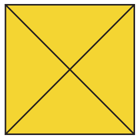
a) 360°.

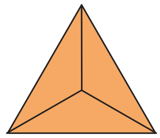
b) Es 36° porque el número de lados por la medida del ángulo central debe ser 360°, entonces $10 \times 36° = 360°$.

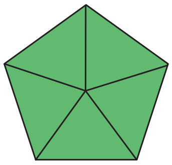
c) Tiene 9 lados, porque $9 \times 40° = 360°$.

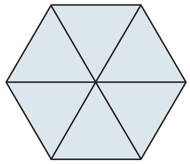
d) Es el cuadrado: tiene 4 lados, $4 \times 90° = 360°$.

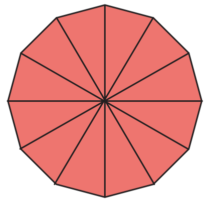
III. En los siguientes polígonos regulares se han marcado sus ángulos centrales. Midan y anoten la medida correspondiente en cada uno.


Cuadrado


Triángulo equilátero


Pentágono


Hexágono


Dodecágono

IV. Con los datos que hallaron completen la siguiente tabla:

Nombre del polígono	Número de lados	Número de ángulos centrales	Medida de cada ángulo central	Resultado de multiplicar el número de lados por la medida del ángulo central
Cuadrado	4	4	90°	4 × 90° = 360°

V. Contesten:

a) ¿Cuál es el resultado de multiplicar el número de lados de un polígono regular por la medida de su ángulo central? __________

b) El número de lados de un polígono regular es 10, ¿cuál es la medida de su ángulo central? __________

c) La medida del ángulo central de un polígono regular es 40°, ¿cuántos lados tiene ese polígono? __________

d) ¿Qué polígono regular tiene un ángulo central de 90°? __________

Comenten con su grupo las respuestas a las preguntas de la actividad V. Si no coinciden analicen por qué.

VI. Los ángulos centrales son útiles para trazar algunos polígonos regulares. Estudien con atención los pasos para trazar un pentágono regular.

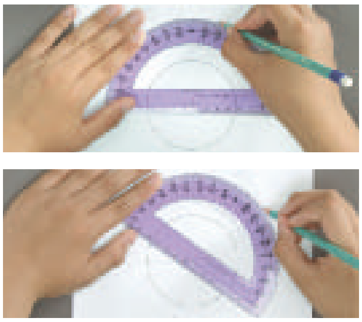
Paso 1. Se calcula la medida del ángulo central del pentágono.

$$\begin{array}{r|l} & 72 \\ \hline 5 & 360 \\ & 10 \\ & 0 \end{array}$$

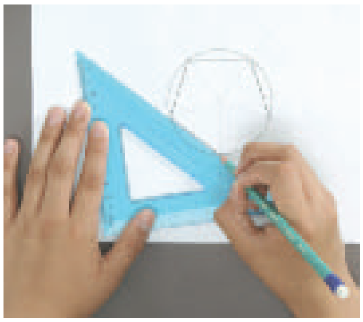
360 grados entre 5 son 72°.

Paso 2. Se traza una circunferencia.

Paso 3. Con ayuda del transportador se marcan en esa circunferencia ángulos centrales de 72º; observen que la circunferencia queda dividida en 5 partes iguales.



Paso 4. Se unen las marcas consecutivas de división de la circunferencia y ya se tiene el pentágono regular.



VII. Utilizando el procedimiento de la actividad VI, traza en tu cuaderno un triángulo equilátero, un cuadrado, un nonágono o eneágono regular (9 lados), un decágono regular (10 lados) y un dodecágono regular (12 lados).

163

Sugerencia didáctica. Durante la confrontación de resultados ponga énfasis en las ideas que anteriormente se comentaron: la medida del ángulo central multiplicada por el número de lados de un polígono regular siempre da 360º; lo cual implica que:

- Conocido el número de lados de un polígono regular puede calcularse la medida del ángulo central.
- Conocida la medida del ángulo central de cierto polígono regular puede calcularse el número de lados del polígono.

2

Sugerencia didáctica. Es importante desarrollar en los alumnos las habilidades de leer e interpretar las técnicas para hacer trazos geométricos, por lo que es conveniente que traten de reproducir en sus cuadernos lo que se les indica en las instrucciones y en las imágenes. En un segundo momento, algunos alumnos pueden mostrar al grupo en el pizarrón cómo hicieron los trazos.

Propósito de la actividad. Que los alumnos practiquen la técnica aprendida.

Sugerencia didáctica. Los alumnos pueden trazar en la clase una o dos figuras y el resto pueden hacerlas en casa como tarea. Pídales que sigan el procedimiento descrito y que consideren que la circunferencia que dibujen debe ser lo suficientemente grande en los casos de 10 y 12 lados, para que los trazos puedan hacerse con mayor facilidad.

Si decide realizar los trazos de otros polígonos regulares por medio de esta técnica, deberá tener en cuenta que únicamente funciona con polígonos cuyo número de lados es un divisor de 360. Sería conveniente solicitar que tracen, por ejemplo, un heptágono, para que los mismos alumnos se percaten de las dificultades de este método con ciertos polígonos.

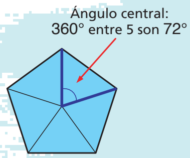
5

Sugerencia didáctica. Pida a una pareja de alumnos que elabore un cartel con esta información. Pregunte al grupo cómo podría haberse elaborado la tarjeta que hicieron al inicio de la sesión, utilizando la medida del ángulo central. Posteriormente puede solicitar a los alumnos que copien la información del recuadro en sus cuadernos. Otra forma de recuperar la información es pedirles que expliquen la técnica para trazar un polígono regular a partir del ángulo central, describiendo e ilustrando en su cuaderno cada uno de los pasos.

Propósito de la sesión. Construir polígonos regulares a partir de la medida de su lado y su ángulo interior.
Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en parejas, a excepción de la actividad V del apartado *Manos a la obra*, la cual puede resolverse individualmente.
Materiales. Juego de geometría.

Respuestas. Sólo en el mosaico A hay polígonos regulares (hexágonos).
Sugerencia didáctica. Invite a los alumnos a que argumenten sus respuestas; de ser necesario, recuérdeles las dos condiciones que determinan a un polígono regular: igualdad de la moneda de los lados e igualdad de la medida de los ángulos.

>>> A lo que llegamos



La medida del ángulo central de un polígono regular se calcula dividiendo 360° entre el número de lados del polígono.

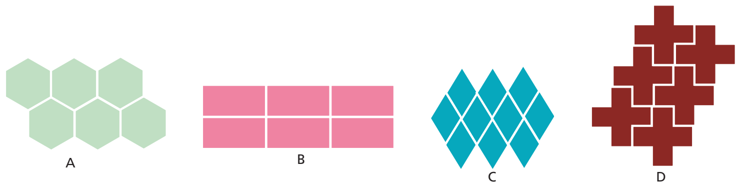
Esta medida es útil para trazar polígonos regulares a partir de una circunferencia, como se mostró en la actividad VI.

SESIÓN 2

MOSAICOS

>>> Para empezar

Las figuras geométricas están en muchos de los objetos de nuestro entorno, y para muestra basta un botón. Observa estos mosaicos y azulejos:

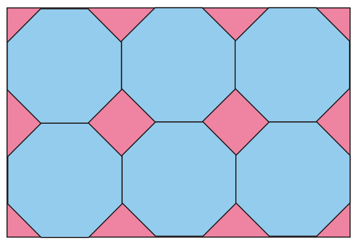


¿En cuál de los mosaicos hay polígonos regulares? ________________

¿Cuáles son esos polígonos regulares? ________________

>>> Consideremos lo siguiente

Hagan un plan para reproducir en su cuaderno el siguiente arreglo de mosaicos, sabiendo que el lado del octágono regular debe medir 3 cm, y luego trácenlo.



164

Propósito de la actividad. A diferencia del problema de la sesión anterior, en éste se pide que el octágono tenga cierta medida por lado, por lo que el procedimiento del ángulo central no es adecuado, ya que no se sabe la medida del radio de la circunferencia. A partir de esta nuevas condiciones se espera que los alumnos busquen otro procedimiento.

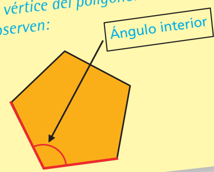
Comenten con sus compañeros el procedimiento que siguieron para trazar el mosaico, además,

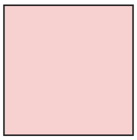
- Mencionen cómo trazaron el octágono regular.
- Anoten en el pizarrón los diferentes procedimientos que siguieron.

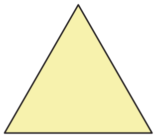
>>> Manos a la obra

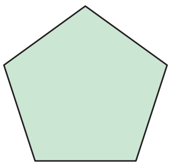
I. Midan y anoten la medida de los ángulos interiores de los siguientes polígonos regulares:

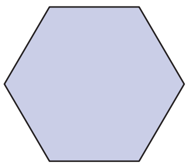
El ángulo interior de un polígono está dentro del polígono, sus lados son dos lados consecutivos del polígono y su vértice es un vértice del polígono.
Observen:

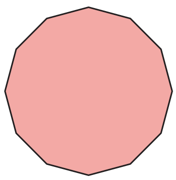



Cuadrado


Triángulo equilátero


Pentágono


Hexágono


Dodecágono

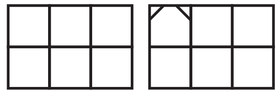
II. Con los datos que hallaron completen la tabla. Recuerden que la medida del ángulo central la determinaron en la lección anterior.

Nombre del polígono regular	Medida de cada ángulo interior	Medida de cada ángulo central	Resultado de sumar el ángulo interior y el ángulo central
Cuadrado	90°	90°	90° + 90° = 180°
Pentágono	108°	72°	

165

Posibles procedimientos.

1. Trazar una cuadrícula a partir de las esquinas de los cuadrados para formar los octágonos:



El problema será determinar la medida de los cuadrados para que los octágonos salgan con todos los lados de 3 cm, además de determinar la inclinación de las líneas que cortarán los vértices del cuadrado.

2. Dado que el lado de cada hexágono mide 1 cm, reproducir la figura haciendo una ampliación a 3 cm, lo cual puede hacerse dibujando primero el rectángulo que comprende todo el mosaico y luego midiendo para encontrar los puntos que serán los vértices de los octágonos.
3. Trazar octágonos con el procedimiento usado en la sesión 1, aunque es muy difícil determinar la medida del radio de la circunferencia que debe trazarse; no obstante, podrían encontrar dicha circunferencia por ensayo y error trazando varios círculos y dividiéndolos en 8 partes, hasta obtener un octágono de 3 cm por lado.

Se espera que algunos alumnos se den cuenta de la necesidad de medir los ángulos del octágono y que, a partir de trazar un lado de 3 cm, puedan trazar ángulos de 135° con lados de 3 cm, y formar así los octágonos pedidos. Si no terminan es importante que al menos intenten trazar un octágono.

Sugerencia didáctica. Mientras los alumnos resuelven, puede hacerles las siguientes preguntas:

1. ¿Todos los ángulos interiores de un polígono regular son iguales?
2. Si tenemos dos polígonos regulares de diferente tamaño pero de igual número de lados ¿sus ángulos interiores medirán lo mismo?

Si nota que tienen dificultades para obtener la medida exacta de algunos ángulos (como en el caso del pentágono), sugiérales que den una medida aproximada, pues más adelante tendrán oportunidad de precisar las medidas.

Para recordar. Si en un polígono regular se suma: la medida de su ángulo interior + la medida de su ángulo central, el resultado siempre es 180°.
Los ángulos que suman 180° se llaman suplementarios; por ejemplo, son parejas de ángulos suplementarios:
20° y 160°; 45° y 135°;
60° y 120°; 72° y 108°.
En un polígono regular el ángulo central es suplementario al ángulo interior.
Dado que un ángulo de 180° se llama *llano o colineal* lo anterior puede enunciarse como: el ángulo central y el ángulo interior de un polígono regular forman juntos un ángulo *colineal*.

Propósito de las actividades II y III. Que los alumnos descubran que el ángulo interior y el central de un polígono regular son suplementarios; esto les permitirá calcular algunos datos a partir de otros conocidos. En la sesión anterior los alumnos aprendieron a calcular el ángulo central conociendo el número de lados del polígono, esto implica que:

1. Pueden calcular el ángulo interior conociendo la medida del ángulo central o el número de lados. Por ejemplo, en el inciso c) sabemos que un decágono tiene 10 lados, por lo que el ángulo central mide 36° (360 ÷ 10 = 36). Entonces el ángulo interior mide 144° porque 180 – 36 = 144.
2. Pueden calcular el número de lados conociendo la medida del ángulo central o del ángulo interior. Por ejemplo, en el inciso b) sabemos que el ángulo interior mide 140°, entonces el ángulo central mide 40 porque 140 + 40 = 180; por lo tanto, la figura tiene 9 lados (9 x 40° = 360°).

2

Sugerencia didáctica. Procure que los alumnos traten de leer e interpretar las instrucciones por sí mismos. De ser necesario, una vez que los alumnos hayan seguido el procedimiento de manera individual, invite a uno o a varios alumnos a mostrar en el pizarrón el procedimiento indicado.

III. Contesten:

a) ¿Cuál es el resultado de sumar el ángulo interior y el ángulo central de un polígono regular? ______

Si dos ángulos suman 180° se dice que cada uno es el suplemento del otro. Por ejemplo, el suplemento de un ángulo de 30° es un ángulo de 150°.
Los ángulos interior y central de un polígono regular son suplementarios.

b) La medida del ángulo interior de un polígono regular es 140°, ¿cuántos lados tiene ese polígono? ______

c) ¿Cuánto mide el ángulo interior de un decágono regular? ______

¿Y el de un dodecágono regular? ______

Hagan una confrontación de las respuestas de la actividad anterior.

IV. Los ángulos interiores son útiles para trazar algunos polígonos regulares, sobre todo cuando la medida del lado del polígono está determinada. Estudien con atención los pasos para trazar un pentágono regular de 2 cm de lado.

Paso 1. Se calcula la medida del ángulo interor del pentágono.

360° entre 5 es 72°.

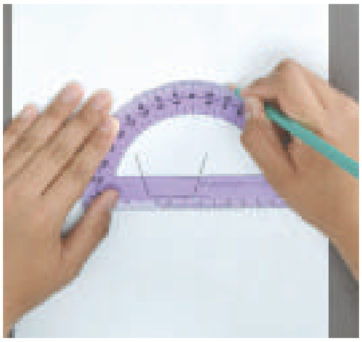
Como el ángulo interior es el suplemento del ángulo central,

180° – 72° = 108°.

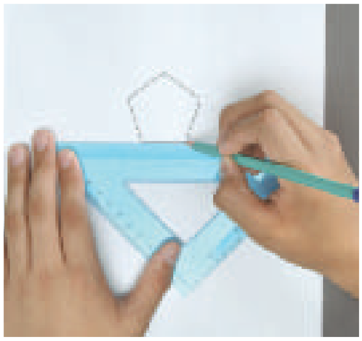
Paso 2. Se traza un ángulo de 108° cuyos lados midan 2 cm cada uno.

166

Paso 3. En cada extremo del segmento nuevamente se traza un ángulo de 108° cuyos lados midan 2 cm.



Paso 4. Se continúa así hasta completar el pentágono regular.



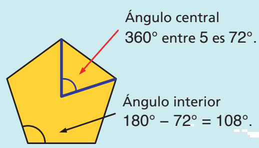
- ¿Algún equipo del grupo utilizó este procedimiento para trazar el octágono regular del mosaico?

V. Utiliza el procedimiento de la actividad IV para trazar en tu cuaderno los siguientes polígonos regulares:

Polígono regular	Medida del lado
Triángulo equilátero	6 cm
Cuadrado	8 cm
Hexágono	3 cm
Decágono	2 cm

>>> A lo que llegamos

Conociendo la medida del ángulo interior es posible trazar polígonos regulares cuyos lados tengan una medida determinada. Una manera de calcular el ángulo interior de un polígono regular es buscando el suplemento del ángulo central.



167

Propósito de la actividad. Que los alumnos practiquen el manejo de ciertas técnicas. Si lo cree necesario, usted puede sugerir otros ejercicios adicionales.

Posibles dificultades. Algunos alumnos podrían tener problemas para decidir hacia qué dirección marcar el ángulo cada vez que deben trazarlo en el extremo de un segmento. Usted podría advertir a los alumnos de esta dificultad trazando una de las figuras en el pizarrón y preguntando en cada caso hacia dónde debe trazar cada uno de los ángulos, y ocasionalmente hacerlo de manera errónea para que los mismos alumnos se percaten y comenten esa dificultad.

5

Sugerencia didáctica. Una vez que lean y comenten lo enunciado puede solicitar a los alumnos que den otros ejemplos diferentes al del pentágono.

Es importante señalar que, al igual que con los ángulos centrales, esta técnica únicamente funciona para polígonos regulares cuyo numero de lados es un divisor de 360.

Subraye con los alumnos que el dato de número de lados es esencial para el trazo: permite obtener la medida del ángulo central y, como consecuencia, la del ángulo interior.

2

Sugerencia didáctica. Otra forma de recuperar la información del recuadro es pedirles que escriban en el cuaderno las ideas fundamentales con sus propias palabras y que den otros ejemplos. Algunos de esos textos pueden leerse a todo el grupo.

Propósito de la sesión. Construir polígonos regulares a partir de informaciones como: ejes de simetría, ángulos centrales, ángulos interiores, etcétera.
Organización del grupo. Se sugiere resolver todas las actividades en equipo.
Materiales. Juego de geométría y colores.

Propósito de las actividades. Las actividades 1 a 4 pretenden que los alumnos exploren otra propiedad interesante de los polígonos regulares: el número de lados y el número de ejes de simetría es el mismo.
Por ello, en la actividad 3 los alumnos tendrán que trazar un polígono que no es regular (un rombo, un rectángulo o un triángulo isósceles, por ejemplo) y en la 4 uno que sí lo es.
Se espera que al explorar sus trazos los mismos alumnos se den cuenta de esa diferencia, pero de todos modos es importante que usted lo comente durante la comparación de resultados.
Respuesta 2. El número de lados debe coincidir con el número de ejes de simetría.
Respuesta 3. Un rombo o un rectángulo, ya que son las figuras que tienen en los ejemplos. También puede ser un triángulo isósceles, o cualquier figura con varios lados que no sea regular (si no tiene ejes de simetría, entonces tiene más lados que ejes).
Respuesta 4. Puede ser cualquier polígono regular.

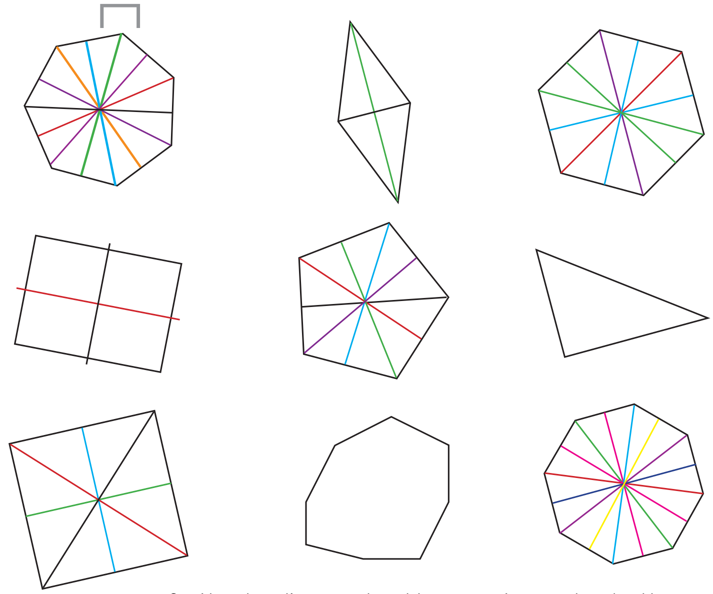
SECUENCIA 13

SESIÓN 3

MÁS SOBRE POLÍGONOS REGULARES

>>> Lo que aprendimos

1. Tracen todos los ejes de simetría de cada figura. Coloreen sólo los polígonos regulares.



2. Consideren los polígonos regulares del punto anterior y completen la tabla.

Polígono regular	Número de lados	Número de ejes de simetría

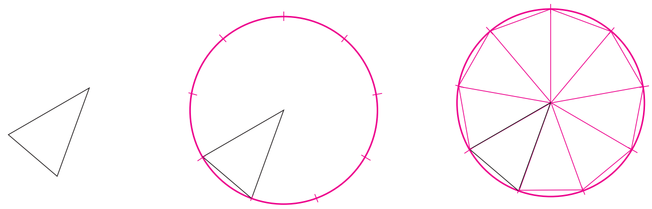
3. Tracen en su cuaderno un polígono cuyo número de lados sea diferente al número de sus ejes de simetría.

4. Tracen en su cuaderno un polígono que tenga el mismo número de lados que de ejes de simetría.

168

Sugerencia didáctica. Si el tiempo se lo permite puede seguir explorando la simetría de los polígonos regulares; en particular, puede mostrar cómo la simetría ayuda en el trazo de algunos polígonos.
Por ejemplo, en primaria los alumnos aprendieron que al trazar un cuadrado en una circunferencia y trazar sus 4 ejes prolongándolos para que corten a la circunferencia, pueden trazar un octágono; lo mismo pasa para el triángulo equilátero y el hexágono. En los ejercicios 6 y 7 los alumnos recordarán este trazo.
También pueden trazar sólo la mitad de un polígono regular y a partir del eje de simetría pueden encontrar los puntos simétricos para terminar el polígono.

5. El siguiente es uno de los triángulos isósceles que se formaron en un polígono regular al trazar sus ángulos centrales. Completen el trazo del polígono regular.



6. En cada uno de los siguientes incisos, anoten el nombre de un polígono que cumpla con la condición pedida; algunas preguntas tienen varias respuestas.

a) Tiene 3 lados y 3 ángulos de 60°. ______________________

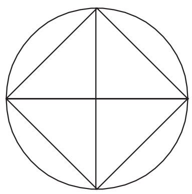
b) Todos sus ángulos interiores miden 90°. ______________________

c) Tiene 4 lados iguales. ______________________

d) Polígono regular en el que todos sus ejes de simetría son bisectrices de sus ángulos interiores. ______________________

e) Polígono regular en el que algunos de sus ejes de simetría son mediatrices de sus lados. ______________________

7. En su cuaderno reproduzcan la siguiente figura sin usar transportador, únicamente regla y compás.



8. Traza un octágono regular en la figura del ejercicio 7.

Comenten en grupo sus procedimientos y resultados a estos problemas.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Nombre de los polígonos", "La miel de los hexágonos", "Recubrimientos", "Los reflejos del caleidoscopio" y "Construcción de un caleidoscopio" en *Una ventana a las formas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

169

Incorporar al portafolios. Los alumnos podrán completar el polígono regular atendiendo a diferentes relaciones:

- Trazar una circunferencia con centro en el vértice donde se cortan los lados iguales del triángulo, tomando como radio precisamente, la medida de estos lados. En esa circunferencia trazarán el polígono al abrir el compás a la medida del lado desigual y marcando esa medida las veces que sea necesario alrededor de la circunferencia.
- Medir el ángulo central y repetirlo las veces que sea necesario, para después trazar la circunferencia.
- Medir los ángulos de la base del triángulo isósceles y a partir de esta medida calcular el ángulo interior del polígono regular y trazarlo a partir de ese dato.

El ángulo central mide 40°, los ángulos interiores miden 140°; por lo tanto se trata de un eneágono regular (9 lados).

Posibles dificultades. Si los alumnos no pueden resolver el problema o muestran ciertas dificultades en el trazo, repase con ellos los dos procedimientos que se trabajaron en esta secuencia para el trazo de polígonos regulares: a partir del ángulo central (actividades VI y V del apartado *Manos a la obra*, sesión 1) y a partir de los ángulos interiores (actividad IV del *Manos a la obra*, sesión 2).

Respuestas.

a) Triángulo equilátero.
b) No se da la condición de que los polígonos sean regulares, por lo que puede ser cuadrado o rectángulo.
c) No se da la condición de que los polígonos sean regulares, por lo que puede ser cuadrado o rombo.
d) Pentágono, triángulo equilátero, heptágono, eneágono; en general, cualquier polígono regular con un número impar de lados.
e) Cuadrado, hexágono, octágono, decágono; en general, cualquier polígono regular con un número par de lados.

Posibles procedimientos. Una forma de resolver es trazando la figura anterior para, posteriormente, trazar las dos mediatrices de los lados del cuadrado. De esta forma la circunferencia queda dividida en 8 partes iguales.

Posibles procedimientos. Una forma de resolverlo es trazar la circunferencia abriendo el compás según la medida del radio; dividir la circunferencia en cuatro partes trazando dos líneas perpendiculares que se cruzan en el centro de la circunferencia; unir los puntos en los que esas líneas cortan la circunferencia.

Propósito de la sesión. Justificar las fórmulas para calcular el área del romboide y del rombo.
Organización del grupo. Se recomienda que el problema inicial se resuelva en equipos, y el apartado *Manos a la obra* en parejas.
Materiales. Juego de geometría, hojas o papel para recortar y tijeras.

Propósito de la actividad. Debido a que las fórmulas que se trabajarán toman como referencia el área del rectángulo, esta actividad pretende que los alumnos recuerden la fórmula para calcular el área de esa figura (la han estudiado desde cuarto grado de primaria).

Posibles respuestas. Para el cuadrado: lado por lado, $a \times a$. Para el rectángulo: base por altura, x por y.

Sugerencia didáctica. No obstante que en primaria los alumnos estudiaron el área de estas figuras, es probable que no recuerden las fórmulas, pero cuentan con otras herramientas. Anímelos a que traten de resolver el problema sin decirles, en este momento, cómo hacerlo.

SECUENCIA 14

Fórmulas para calcular el área de polígonos

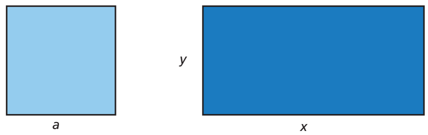
En esta secuencia continuarás con el estudio de los perímetros y las áreas al justificar las fórmulas para calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.

SESIÓN 1

ROMPECABEZAS 1

>>> Para empezar

En la secuencia 4 repasaste la manera en que se calcula el área de varias figuras, entre ellas la del cuadrado y la del rectángulo.

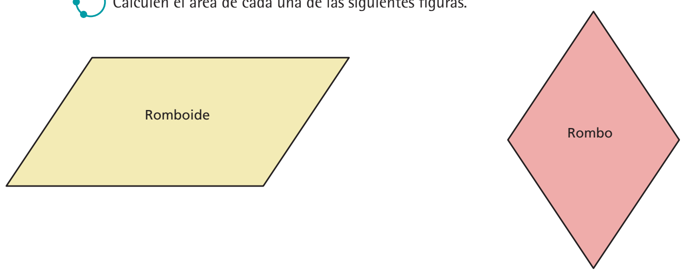


¿Cómo calculas el área del cuadrado? ____________________

¿Cómo calculas el área del rectángulo? ____________________

>>> Consideremos lo siguiente

Calculen el área de cada una de las siguientes figuras.



170

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Medida.
Antecedentes
Durante la escuela primaria los alumnos trabajaron con fórmulas para el cálculo de áreas y perímetros de algunas figuras; en este grado se pretende que aprendan a reconstruir y a justificar fórmulas empleando distintos recursos. Algunos de los conocimientos que los alumnos ya estudiaron y que sirven como apoyo para la resolución de estas situaciones, son: identificación y trazo de figuras geométricas (triángulos, rectángulos, cuadrados, rombos, romboides, trapecios y polígonos regulares) y cálculo de áreas mediante distintos procedimientos.

Propósitos de la secuencia
Justificar las fórmulas para calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*Rompecabezas 1* Justificar las fórmulas para calcular el área del romboide y del rombo.	Video *¿Dónde se utilizan las fracciones?* Interactivo
2	*Rompecabezas 2* Justificar las fórmulas para calcular el área del triángulo y del trapecio.	Interactivo
3	*Descomposición de figuras* Justificar las fórmulas para calcular el área de polígonos regulares.	Video *El sistema solar y la fuerza de gravedad* Interactivo
4	*Otras formas de justificar las fórmulas* Conocer otras formas de justificar las fórmulas estudiadas en las sesiones anteriores y justificar algunas fórmulas de perímetros.	Interactivo Video *Justificación*

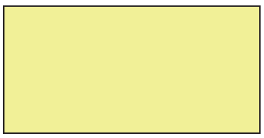
Platiquen a sus compañeros de grupo la manera en que calcularon el área. Comenten:

- ¿Qué medidas fue necesario tomar en cada figura?
- ¿Cómo utilizaron estas medidas en el cálculo del área?
- Si usaron alguna fórmula, ¿saben cómo se obtiene dicha fórmula?

>>> Manos a la obra

I. Cada uno trace en una hoja un romboide cuya base mida 6 cm y su altura 3 cm. Recórtenlo. No importa la medida de los ángulos.

a) Piensen cómo deben recortar el romboide en dos piezas para que con ellas puedan armar un rectángulo como el que se muestra. Recorten y peguen las piezas encima del rectángulo.



b) ¿Cómo son entre sí las medidas de la base del rectángulo y del romboide? ______

c) ¿Cómo son entre sí las medidas de la altura del rectángulo y del romboide? ______

d) ¿Cómo son entre sí las áreas del romboide y del rectángulo? ______

e) Completen la siguiente tabla:

Figura	Medida de la base	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Rectángulo				
Romboide				

171

Propósito de la actividad. Las figuras no tienen las medidas indicadas porque es importante que los alumnos aprendan a tomar la decisión de qué medidas deben considerar y cómo deben hacerlo (por ejemplo, cómo medir la altura de un romboide).
En el caso del romboide son necesarias las medidas de la base y de la altura; en el rombo se requieren las medidas de las diagonales. Aun si se parten las figuras en triángulos, se necesitan estas medidas, aunque es posible que algunos alumnos las tomen por partes.

Posibles procedimientos.

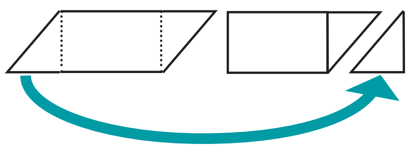
1. Descomponer cada figura en otras de las que ya conocen la fórmula. Por ejemplo, el romboide puede descomponerse en un rectángulo y dos triángulos; posteriormente se calcula el área de los triángulos y los rectángulos y se suman.
2. Reproducir las figuras en una hoja y hacerles cortes para que, a manera de rompecabezas, armen alguna figura de la que ya saben calcular el área, como el rectángulo (los alumnos han trabajado con rompecabezas desde primer grado de primaria).
3. Como en la primaria han calculado áreas cuadriculando la figura, es probable que algunos opten por este procedimiento, aunque deberán tener cuidado de que cada cuadrito sea de 1 cm².
4. Usando la fórmula correspondiente. Éste es un procedimiento que los alumnos pueden seguir si es que recuerdan dichas fórmulas y saben usarlas.

Respuesta. El romboide tiene 18 cm² y el rombo 12 cm².

Respuestas a incisos b), c), d). Las medidas de la base del rectángulo y del romboide son iguales; las medidas de la altura del rectángulo y del romboide son iguales; y las áreas del romboide y del rectángulo son iguales. Todas estas relaciones pueden constatarse al rearmar el romboide sobre el rectángulo.

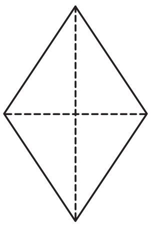
Propósito de la actividad. Que los alumnos se den cuenta de que cualquier romboide puede transformarse en un rectángulo con las mismas medidas para la base y la altura, de ahí que la fórmula para calcular el área del romboide es la misma para calcular el área del rectángulo: el producto de la base por la altura.

Respuesta. Una forma de resolverlo es trazar las alturas del romboide que pasan por los vértices contrarios formando triángulos; se recorta uno de esos triángulos y se cambia de lugar para obtener el rectángulo.



Propósito de la actividad. Que los alumnos, a través de la manipulación de la figura, se den cuenta de que el rombo puede transformarse en un rectángulo cuya base es igual a una de las diagonales, y su altura es igual a la mitad de la otra diagonal. A partir de ahí podrán justificar la fórmula para calcular el área del rombo.

Respuesta. Una forma de obtener el rectángulo a partir del rombo es la siguiente: se trazan las diagonales del rombo y se corta a través de ellas para obtener 4 triángulos iguales; con ellos se arma el rectángulo.

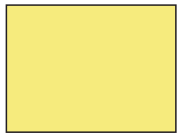


Respuestas a incisos b) y c). La base del rectángulo y la medida de la diagonal menor del rombo son iguales. El área del rombo y el área del rectángulo son iguales. Lo anterior puede constatarse al rearmar el rombo sobre el rectángulo.

Respuesta. La fórmula es diagonal menor por diagonal mayor, entre dos. O cualquiera de sus expresiones equivalentes.

II. Cada uno trace en una hoja un rombo cuyas diagonales midan 6 cm y 4 cm. Recórtenlo.

a) Piensen en una manera de recortar el rombo en triángulos para que con ellos puedan armar el siguiente rectángulo. Recorten y peguen las piezas encima del rectángulo.



b) ¿Qué relación encuentran entre la base del rectángulo y la medida de la diagonal menor del rombo? ____________________

Observen que la altura del rectángulo mide la mitad de la diagonal mayor del rombo.

c) ¿Cómo son entre sí las áreas del rombo y del rectángulo? ____________________

d) Completen las tablas.

Figura	Medida de la base	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Rectángulo				

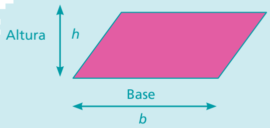
Figura	Medida de la diagonal menor	Medida de la diagonal mayor	Área	Fórmula para calcular el área
Rombo				

Comenten con su grupo los resultados que han obtenido hasta el momento, en particular escriban en el pizarrón las fórmulas que obtuvieron para calcular el área del romboide y del rombo y compárenlas. También comenten las medidas que es necesario tomar para el cálculo de las áreas de estas figuras.

172

>>> A lo que llegamos

El área de un romboide se calcula multiplicando la medida de su base por la medida de su altura.



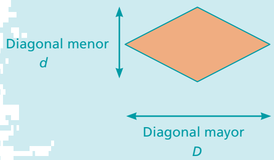
Área = base × altura

Si se denomina *b* a la base y *h* a la altura, puede escribirse:

$$A = b \times h$$

El área de un rombo se calcula multiplicando las medidas de sus diagonales y dividiendo entre 2 el resultado.

$$\text{Área} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$$



Si se denomina *D* a la diagonal mayor y *d* a la diagonal menor, puede escribirse:

$$A = \frac{D \times d}{2}$$

No sólo es importante que conozcas estas fórmulas para calcular áreas, también es necesario que sepas cómo se obtienen y de dónde provienen. Observa que estas fórmulas sirven para cualquier caso en que conozcas o puedas medir o calcular las magnitudes indicadas.

ROMPECABEZAS 2

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En la primaria aprendiste a calcular el área de los triángulos. ¿Cómo se calcula el área de un triángulo? ______________________________

¿Sabes por qué se calcula así? ____________ Si no lo sabes, en esta lección lo averiguarás.

173

5

Sugerencia didáctica. En este apartado se formalizan los hallazgos que los alumnos han experimentado durante toda la sesión. Se espera que a partir de esa experiencia puedan comprender lo enunciado.

Sugerencia didáctica. Es importante que en el transcurso de la lectura usted y los alumnos hagan comentarios respecto de cómo se obtienen estas fórmulas. Recuerde que la práctica cotidiana de la argumentación verbal ayuda a los alumnos a desarrollar gradualmente un pensamiento deductivo, lo que les permitirá además desarrollar la habilidad para justificar sus respuestas y para hacer demostraciones sencillas de sus argumentos.

Los alumnos pueden registrar en sus cuadernos no sólo las fórmulas sino también una pequeña explicación que pueden ilustrar con figuras de papel o con dibujos.

Propósito de la sesión. Justificar las fórmulas para calcular el área del triángulo y del trapecio.

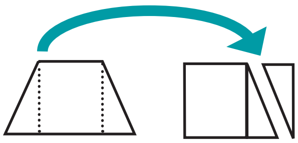
Organización del grupo. Forme equipos para que resuelvan el problema inicial; posteriormente organice parejas para trabajar el resto de la sesión.

Materiales. Juego de geometría y tijeras.

Sugerencia didáctica. Mientras los alumnos resuelven, usted puede observar el trabajo de los equipos para identificar sus procedimientos de resolución y sus dificultades. Anime a los equipos a que comenten y decidan cuáles son las medidas que deben tomar en cuenta para calcular el área de cada figura.

Posibles procedimientos.

1. Descomponer las figuras en otras conocidas. Por ejemplo, recortar las piezas y formar con ellas las figuras conocidas.



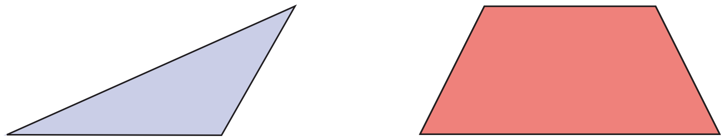
   En el caso del triángulo, es posible que algunos equipos completen la figura para obtener un triángulo rectángulo.
2. Cuadricular cada figura y contar el total de unidades cuadradas.
3. Usar las fórmulas (quienes las recuerden), aunque en el caso del triángulo algunos alumnos podrían tener dificultades para identificar la altura.

Respuesta. Área del triángulo, 7.5 cm^2, y área del trapecio, 16.5 cm^2.

Sugerencia didáctica. Lo importante de la actividad I es que los alumnos deduzcan la fórmula del triángulo, por lo que usted puede auxiliarlos en el trazo de la figura indicándoles cómo hacerlo. Incluso, si nota que varias parejas tienen problemas, los trazos pueden hacerse de manera grupal para que después cada pareja resuelva los siguientes incisos.

>>> Consideremos lo siguiente

Calculen el área de las siguientes figuras.

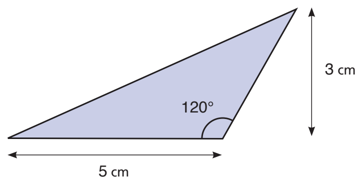


Comenten los procedimientos y resultados a los que llegaron. En particular mencionen:

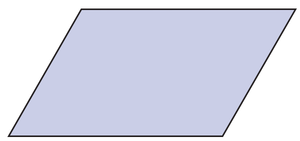
- ¿Qué medidas tomaron en cada figura?
- ¿Cómo utilizaron estas medidas para calcular el área?
- Si usaron alguna fórmula, ¿saben cómo se obtiene dicha fórmula?

>>> Manos a la obra

I. Recorten dos triángulos que midan lo que se indica en el dibujo.



a) Con los dos triángulos cubran la superficie del siguiente romboide:



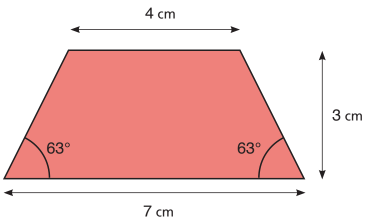
Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos deduzcan que dos triángulos iguales siempre forman un romboide (o un rectángulo) y que por lo tanto su área se calcula multiplicando base por altura y dividiendo el resultado a la mitad.

a) ¿Qué parte del área del romboide es el área del triángulo? ____________

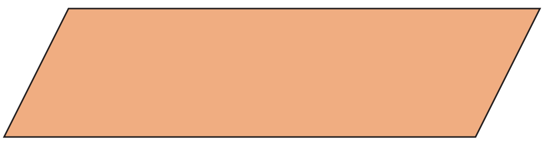
b) Completen la siguiente tabla:

Figura	Medida de la base	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Romboide azul				
Triángulo				

II. Recorten dos trapecios que tengan las medidas que se indican en la figura.



a) Acomoden los dos trapecios de manera que cubran la superficie del siguiente romboide:



b) Analicen las medidas de la base del romboide y las medidas de la base mayor y la base menor del trapecio y señalen qué relación existe entre ellas. ____________

c) ¿Qué parte del área del romboide es el área del trapecio? ____________

d) Escriban una regla o fórmula para calcular el área de un trapecio cuando se conocen las medidas de sus bases y su altura. ____________

Propósito de la actividad. Que a partir del cálculo del área del romboide los alumnos identifiquen la relación entre las dimensiones y áreas del triángulo y del romboide, de tal manera que puedan establecer, para cada una de las figuras, una fórmula que les permita calcular su área. Es posible que algunas de las fórmulas que los alumnos propongan sean incorrectas; podrán regresar a ellas y corregirlas al final de este apartado.

Respuesta. Para el romboide, $b \times h$; para el triángulo $\frac{b \times h}{2}$ (y todas las fórmulas equivalentes a cada una de las anteriores).

Sugerencia didáctica. También en este caso puede indicar al grupo cómo trazar la figura, para agilizar el desarrollo de las otras actividades.

Propósito de la actividad. Que los alumnos se den cuenta de que a partir de dos trapecios iguales siempre es posible formar un romboide (o un rectángulo) cuya base es igual a la suma de las bases del trapecio y cuya altura es igual a la altura del trapecio.

A partir de lo anterior, los alumnos podrán deducir la fórmula para calcular el área del trapecio.

Respuestas.

b) La base del romboide es la suma de la base mayor y la base menor del trapecio.

c) La mitad.

d) Base mayor más base menor por altura entre dos (y otras expresiones equivalentes).

Propósito de la actividad. Que a partir del cálculo del área del romboide los alumnos identifiquen las relaciones entre las dimensiones y áreas del romboide y del trapecio, de tal manera que puedan establecer una fórmula que les permita calcular el área del trapecio. Es posible que algunas de las fórmulas que los alumnos propongan sean incorrectas; podrán regresar a ellas y corregirlas con la información del apartado *A lo que llegamos.*

Sugerencia didáctica. Durante la confrontación de resultados ponga especial cuidado en los argumentos que los alumnos den para justificar las fórmulas de áreas. Recuerde que generalmente los alumnos saben más de lo que pueden expresar, por lo que es importante desarrollar en ellos su habilidad para argumentar y justificar sus ideas.

5

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que escriban en su cuaderno las fórmulas para obtener el área de cada una de las figuras y que redacten un texto breve en el que expliquen (justifiquen) por qué esas fórmulas permiten obtener el área. Invite a los alumnos a ilustrar en sus cuadernos, ya sea con dibujos o con el pegado de figuras, sus explicaciones.

e) Completen las siguientes tablas:

Figura	Medida de la base	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Romboide rosa				

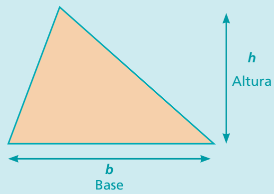
Figura	Medida de la base mayor	Medida de la base menor	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Trapecio					

Comenten con su grupo los resultados que han obtenido hasta el momento. Escriban en el pizarrón las fórmulas que encontraron para calcular el área del triángulo y del trapecio; si las fórmulas son diferentes, compárenlas e investiguen si son equivalentes.

>>> A lo que llegamos

El área de un triángulo se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

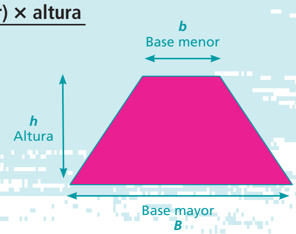


Si se denomina *b* a la base y *h* a la altura, puede escribirse:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

El área de un trapecio se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$$



Si se denomina *B* a la base mayor, *b* a la base menor y *h* a la altura, puede escribirse:

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

176

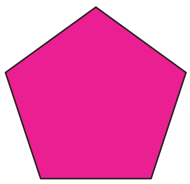
DESCOMPOSICIÓN DE FIGURAS

SESIÓN 3

>>> Para empezar

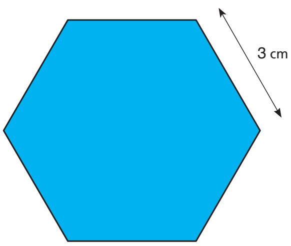
Ahora ya sabes las fórmulas para obtener el área de diversas figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, triángulo, rombo, romboide y trapecio; además, sabes de dónde provienen esas fórmulas.

¿Cómo se te ocurre que puede calcularse el área de este polígono regular?



>>> Consideremos lo siguiente

Calculen el área de un hexágono regular cuyo lado mida 3 cm.



Área = ________

Comenten a otros equipos la manera en que resolvieron el problema. En particular mencionen:

- ¿Qué medidas tuvieron que investigar para calcular el área?
- Si usaron alguna fórmula, ¿saben cómo se obtiene dicha fórmula?

177

Propósito de la sesión. Justificar las fórmulas para calcular el área de polígonos regulares.

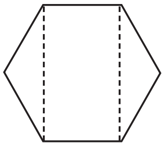
Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en equipos durante toda la sesión.

Materiales. Instrumentos geométricos.

Propósito de la actividad. Que los alumnos den ideas generales sobre cómo calcularían el área de un polígono regular (no se espera que la calculen, esto se hará en el siguiente apartado).

Posibles respuestas. Una forma consiste en descomponer la figura en cinco triángulos iguales, a partir del centro del pentágono. Otra es descomponer el pentágono en tres triángulos: uniendo el vértice superior con los dos de abajo. Quienes conozcan la fórmula, pueden sugerirla: perímetro por apotema entre dos.

Posibles procedimientos. Al igual que en las sesiones anteriores de esta secuencia, los procedimientos que los alumnos podrían utilizar son la descomposición o transformación de figuras y el cuadriculado. Por ejemplo, pueden dividir el hexágono en dos triángulos y un rectángulo:



También la figura puede descomponerse en seis triángulos iguales, a partir del centro.

Es poco probable que los alumnos utilicen una fórmula debido a que no la estudiaron en primaria; lo que sí estudiaron fue cómo transformar un polígono regular en un trapecio o en un romboide para, a partir de ahí, calcular el área.

Sugerencia didáctica. Es posible que algún equipo haya intentado obtener el área con un procedimiento similar. Si esto es así, invite a ese equipo a que comente su experiencia con el grupo.

Respuestas.

a) 3.9 cm^2.

b) Seis triángulos.

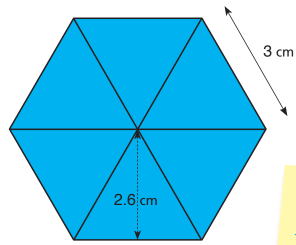
c) 423.4 cm^2.

>>> Manos a la obra

I. En un grupo, a un equipo se le ocurrió dividir el polígono regular en triángulos iguales para calcular el área de cada triángulo y luego sumarlas. Se dieron cuenta que requerían conocer la medida de la altura de uno de los triángulos y la midieron.

Observen que:

Los triángulos en los que se dividió el polígono regular están formados por un lado del polígono y los dos lados del ángulo central



Recuerden que:

El área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo el resultado entre 2.

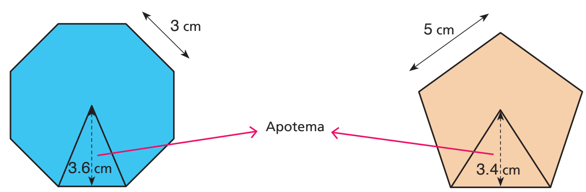
a) ¿Cuál es el área de cada uno de los triángulos en que se dividió el hexágono? ______

b) ¿En cuántos triángulos fue dividido el hexágono? ______

c) ¿Cuál es el área total del hexágono? ______

Sugerencia didáctica. Es importante que al introducir nuevo vocabulario se cerciore de que los alumnos lo han comprendido; usted puede verificarlo mientras los equipos trabajan solicitando a algunos alumnos que señalen el apotema de polígonos regulares que aparecen en otras sesiones.

II. En los polígonos regulares, la altura de los triángulos iguales en que se dividen se llama **apotema**. Completen la tabla considerando los siguientes polígonos regulares:



178

a) ¿En cuántos triángulos iguales se puede dividir el octágono regular? ______

b) ¿Y el pentágono regular? ______

c) ¿Y un decágono regular? ______

d) ¿Y un dodecágono regular? ______

e) ¿Y un polígono regular de 15 lados? ______

f) ¿Y un polígono regular de n lados? ______

Polígono	Medida de la base de un triángulo (*lado* del polígono)	Medida de la altura de un triángulo (*apotema* del polígono)	Número de triángulos	Área total del polígono
Octágono				
Pentágono				

Discutan en grupo, y con ayuda del profesor, si consideran que, con respecto a la actividad anterior, los siguientes dos procedimientos son equivalentes:

1. Calcular el área de cada triángulo y multiplicarla por el número de triángulos en que se dividió el polígono.

2. Calcular el perímetro del polígono, multiplicar el resultado por la medida del apotema y dividirlo entre 2, es decir, el área de un polígono regular es igual a:

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

Recuerden que:

El perímetro de un polígono se calcula sumando la medida de todos sus lados. Si el polígono es regular, el perímetro puede calcularse multiplicando el número de lados por la medida de cada lado.

III. Subrayen las respuestas correctas. Recuerden que la medida de la **base** del triángulo es el *lado* del polígono regular y la **altura** del triángulo es el *apotema* del polígono regular.

a) ¿Cuáles son las dos fórmulas con las que se puede calcular el área de un octágono regular?

Área = 8 × área de cada triángulo $\qquad \text{Área} = \frac{8 \times \text{lado}}{2 \times \text{apotema}} \qquad \text{Área} = 8 \times \frac{\text{lado} \times \text{apotema}}{2}$

b) ¿Cuáles son las dos fórmulas con las que se puede calcular el área de un polígono regular de 13 lados?

$\text{Área} = \frac{13}{\text{área del triángulo}} \qquad \text{Área} = \frac{13 \times \text{lado} \times \text{apotema}}{2} \qquad \text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$

179

Sugerencia didáctica. En la secuencia 4 los alumnos trabajaron procesos de generalización, por ello se espera que no tengan problemas al contestar esta pregunta; no obstante, usted puede apoyarlos en caso de que identifique dificultades.

Respuesta. n triángulos.

Sugerencia didáctica. Una vez que los alumnos hayan discutido si ambos procedimientos son equivalentes o no, usted puede pedirles que verifiquen su respuesta llevando a cabo el segundo procedimiento con el octágono o con el pentágono de la actividad anterior.

Propósito de la actividad. Son varias las finalidades, tal vez por ello es una de las partes más difíciles de la sesión:

1. Que los alumnos deduzcan algunas fórmulas para calcular el área de un polígono regular a partir de lo que contestaron en la actividad II.
2. Que se den cuenta de que hay fórmulas que son equivalentes aunque estén enunciadas de distintas maneras.
3. Que desarrollen su capacidad para analizar e interpretar fórmulas, identificando aquellas que son erróneas.

Respuestas.

a) La primera y la tercera.

b) La segunda y la tercera.

c) La primera y la segunda.

Sugerencia didáctica. Invite a los alumnos a argumentar por qué las otras fórmulas son erróneas en cada uno de los casos. Si hay respuestas distintas y los argumentos no logran convencer, invítelos a que verifiquen sus respuestas calculando el área de alguno de los polígonos de la actividad II.

Sugerencia didáctica. Recuerde que la validación de resultados es parte importante de esta propuesta para enseñar matemáticas; invite a los alumnos a que comprueben el resultado obtenido aplicando la fórmula que acaban de aprender.

Si obtuvieron el resultado correcto en el problema inicial, los alumnos podrían concluir que los resultados son los mismos porque el perímetro es ***n*** veces la medida de cada lado. Si no surge este comentario, usted puede plantearlo al grupo.

5

Sugerencia didáctica. Es conveniente que los alumnos puedan enunciar con sus propias palabras esta información; particularmente es importante que comenten cómo se construyó la fórmula enunciada. Recuerde que la justificación es tan importante como el aprendizaje de la fórmula misma.

c) ¿Cuáles son las dos fórmulas con las que se puede calcular el área de un polígono regular de ***n*** lados?

Área = n × área de cada triángulo $\quad$ Área = $\dfrac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$ $\quad$ Área = $\dfrac{\text{perímetro}}{2 \times \text{apotema}}$

IV. Regresen al hexágono regular que mide 4 cm de lado (del problema inicial). Utilicen la fórmula Área = $\dfrac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$ para calcular su área y comparen el resultado con el que obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

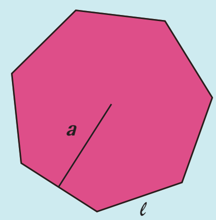
Hay varias maneras para calcular el área de un polígono regular:

1. **Si no se acuerdan de la fórmula del área, pueden dividirlo en triángulos iguales y hallarla sumando las áreas de estos triángulos.**
2. **Si aplican la fórmula: obtienen el perímetro, lo multiplican por la medida del apotema y el resultado lo dividen entre 2:**

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

Si se llama *P* al perímetro y *a* al apotema puede escribirse:

$$A = \frac{P \times a}{2}$$



***P* es el perímetro**

Habrás notado que hay distintas maneras para calcular el área de un polígono, esto ocasiona que pueda haber distintas fórmulas; no obstante, éstas son equivalentes.

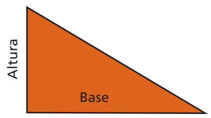
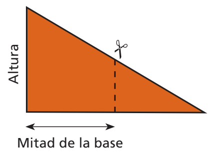
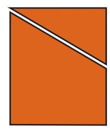
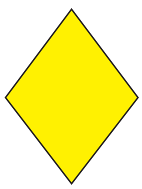
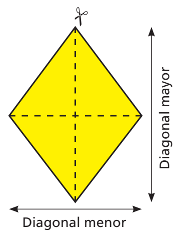
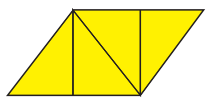
180

OTRAS FORMAS DE JUSTIFICAR LAS FÓRMULAS

SESIÓN 4

>>> Lo que aprendimos

1. En cada caso tracen y recorten la figura (puede ser de cualquier tamaño). Después hagan la transformación que se indica y a partir de esta transformación justifiquen la fórmula que se emplea para calcular el área de la figura.

Figura y fórmula para calcular su área	Recortar	Transformar esta figura
 $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$		
Justificación de la fórmula:		
 $\text{Área} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$		
Justificación de la fórmula:		

181

Propósito de la sesión. Conocer otras formas de justificar las fórmulas estudiadas en las sesiones anteriores y justificar algunas fórmulas de perímetros.

Organización del grupo. Se sugiere formar equipos para que trabajen de esa manera durante toda la sesión.

Materiales. Juego de geometría y tijeras.

Propósito de las actividades 1y 2. Se espera que, a partir de las experiencias y conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores, los alumnos realicen transformaciones de figuras que permitan justificar, de una manera distinta, las fórmulas que ya estudiaron. Asimismo, que sean capaces de elaborar argumentos que justifiquen esas fórmulas.

Sugerencia didáctica. Aun cuando haya alumnos que puedan deducir y justificar las fórmulas a partir de los dibujos, invítelos a que tracen, recorten y transformen las figuras como se indica, lo cual contribuye al desarrollo de su percepción geométrica y de su imaginación espacial; particularmente este tipo de actividades es un apoyo para aquellos estudiantes que aún necesitan un referente concreto.

Posibles respuestas. El triángulo se transformó en un rectángulo con la misma altura y con base igual a la mitad de la base del triángulo. Dado que el área del rectángulo se obtiene multiplicando base por altura, tenemos que el área del triángulo se obtiene multiplicando base por altura entre dos.

Posibles dificultades. Es muy probable que las justificaciones que den los alumnos:

1. Sean erróneas o contengan implicaciones falsas.
2. Estén mal redactas, no sigan una secuencia lógica adecuada o que sean incomprensibles.

Posible respuesta. El rombo se transformó en un romboide en el que la base es la diagonal menor y la altura es la mitad de la diagonal mayor. Por ello para obtener el área, se multiplica diagonal mayor por diagonal menor y luego se divide entre dos.

Justificar es una habilidad difícil de desarrollar, lo que no se logra en una sola sesión. Procure crear un ambiente de respeto durante la puesta en común para que los alumnos se sientan en confianza y lean sus justificaciones, aunque no sean del todo correctas. En caso de haber errores, es importante que se aproveche el momento para corregirlos. Una estrategia es que una vez que todos los equipos lean sus justificaciones, se escojan las que consideren acertadas y se mejoren de manera grupal.

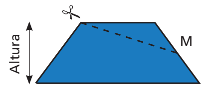
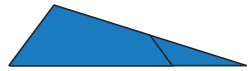
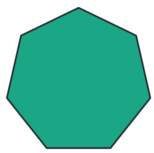
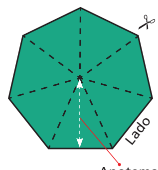
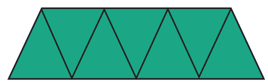
Posible respuesta. El trapecio se transformó en un triángulo con la misma altura y con base igual a la suma de las bases del trapecio. Por ello, la fórmula para calcular el área de un trapecio es base mayor más base menor, por altura, entre dos.

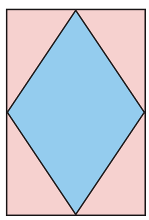
Posible respuesta. El polígono se transformó en un trapecio con altura igual a la apotema y en el que la suma de sus bases es igual al perímetro del polígono. Para calcular el área del trapecio sumamos base mayor más base menor, por la altura, entre dos; notamos que la base mayor más la base menor es el perímetro del polígono, y la altura es la apotema del polígono.

Posible respuesta. El rectángulo está formado por dos rombos iguales (uno de ellos se descompuso en triángulos). El rectángulo tiene como base la diagonal menor y como altura la diagonal mayor. Por eso, para calcular el área del rombo se multiplica la diagonal mayor por la diagonal menor; y como el área del rombo es la mitad del área del rectángulo, se divide después entre dos.

Integrar al portafolios. Si los alumnos tienen dificultades para justificar la fórmula revise junto con ellos las actividades número II del apartado *Manos a la obra* de la sesión 1.

A partir de las transformaciones del rombo en rectángulo, ayude a los alumnos a establecer relaciones entre estas dos figuras (las preguntas y las tablas de esa sección están dirigidas al establecimiento de tales relaciones).

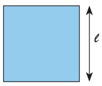
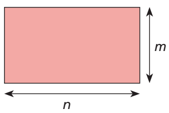
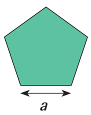
Figura y fórmula para calcular su área	Recortar	Transformar a esta figura
 Área = $\frac{\text{(base mayor × base menor) × altura}}{2}$	 Base mayor M es el punto medio	
Justificación de la fórmula:		
El polígono es regular  Área = $\frac{\text{perímetro × apotema}}{2}$	 Apotema	
Justificación de la fórmula:		



2. Analicen la siguiente figura y, a partir de ella, expliquen la fórmula para calcular el área del rombo.

182

3. En la secuencia 4 aprendieron a calcular perímetros. Las fórmulas del perímetro también pueden justificarse. Analicen la figura y la fórmula y justifiquen esta última.

Figura	Fórmula para calcular el perímetro	Justificación de la fórmula
Cuadrado 	$P = 4 \times \ell$	
Rectángulo 	$P = 2 \times n + 2 \times m$	
Pentágono regular 	$P = 5 \times a$	

Comenten y comparen sus explicaciones con las de los otros equipos.

Justificación

Las fórmulas para calcular perímetros y áreas siempre tienen una justificación; es importante que te aprendas las fórmulas pero también es bueno que conozcas cómo se obtienen.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Áreas de polígonos" en *Una ventana a las formas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Propósito de la actividad. Si bien el programa indica que los alumnos deben justificar fórmulas de áreas y perímetros, habrá notado que la mayoría de las actividades se centran en el área. La razón es que en el caso del perímetro es suficiente comprender el concepto de "perímetro" y conocer las magnitudes de la figura para justificar las fórmulas del mismo; por ello sólo se ha dedicado esta actividad para abordar ese aspecto.

Propósito del video. Observar ejemplos gráficos en los que se justifican algunas fórmulas de área o perímetro de polígonos.

Propósito de la sesión. Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales en contexto de escalas mediante el uso de la constante de proporcionalidad.
Organización del grupo. La sesión se trabaja en parejas.

SECUENCIA 15

La constante de proporcionalidad

En esta secuencia aprenderás a identificar situaciones de proporcionalidad directa en diversos contextos, y a resolverlas mediante procedimientos más eficientes.

SESIÓN 1

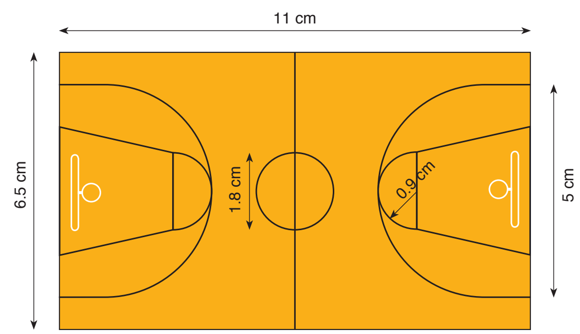
LA CANCHA DE BASQUETBOL

>>> Para empezar

Una cancha reglamentaria de basquetbol es un rectángulo con las siguientes dimensiones: de largo debe medir entre 22.5 y 28.6 metros y de ancho debe medir entre 12.8 y 15.2 metros.

>>> Consideremos lo siguiente

Veamos un dibujo a escala de una cancha de basquetbol:



La escala a la que está hecho el dibujo es 1 cm a 200 cm, es decir, 1 cm del dibujo representa 200 cm de la medida real de la cancha de basquetbol.

184

Eje
Manejo de la información.
Tema
Análisis de la información.
Antecedentes
En el bloque 1 los alumnos identificaron y resolvieron problemas de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante"; para ello utilizaron distintos procedimientos de solución, particularmente el cálculo del valor unitario. En esta secuencia los alumnos continuarán identificando y resolviendo ese tipo de situaciones y se espera que sean capaces de utilizar procedimientos expertos.

Propósitos de la secuencia
Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando procedimientos expertos.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*La cancha de básquetbol* Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales en contexto de escalas mediante el uso de la constante de proporcionalidad.	Interactivo
2	*Mapas y escalas* Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales en contexto de escalas en los que la constante de proporcionalidad es una fracción unitaria.	Video *Centro Histórico de la Ciudad de México*
3	*Rutas y transporte* Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales identificando la aplicación inversa de la constante de proporcionalidad. Utilizar los procedimientos aprendidos durante la secuencia para resolver situaciones de proporcionalidad directa en diversos contextos.	

Completen la siguiente tabla para determinar algunas de las medidas de la cancha de basquetbol:

	Medida en el dibujo (centímetros)	Medida real (centímetros)
Largo de la cancha de basquetbol	11	2 200
Ancho de la cancha de basquetbol		1 300
Diámetro del círculo central	1.8	
Longitud de la base del área de los tiros de tres puntos		1 000
Radio del semicírculo del área de tiros libres	0.9	
Altura del piso al tablero		306

Respuestas. Cada medida en el dibujo debe multiplicarse por 200 para obtener la medida real. Casa medida real debe multiplicarse por $\frac{1}{200}$ (o dividirse entre 200) para obtener la del dibujo.

>>> Manos a la obra

I. Comparen sus resultados y comenten:

a) ¿Por cuál número hay que multiplicar las medidas del dibujo para obtener las medidas reales? ______

b) ¿Cuántas veces más grande es la medida real del largo de la cancha de basquetbol que la medida que tiene en el dibujo? ______

>>> A lo que llegamos

En esta situación de escala las medidas reales de la cancha de basquetbol (en cm) se pueden obtener multiplicando por 200 las medidas del dibujo (en cm).

En este problema al número 200 se le llama **factor de escala** o **constante de proporcionalidad** y permite encontrar las medidas reales de la cancha (en cm) multiplicando las medidas del dibujo (en cm) por 200.

185

Sugerencia didáctica. Estos conceptos serán de mucha importancia en la secundaria, ya que se irán ampliando y vinculando con otros y darán paso a diversos aprendizajes (como la función lineal).
Comente con los alumnos que el factor de escala es lo mismo que la constante de proporcionalidad, pero el factor de escala:

- Se utiliza en situaciones que involucran mapas, planos, croquis y otras representaciones geográficas.
- Involucra cantidades de la misma magnitud (por ejemplo, "centímetros" a "centímetros", que son unidades de longitud; no del tipo "caramelos" a "dinero").
- Da información de cuántas veces más grande es una medida real que su representación en el dibujo.

También puede ser útil recordar el concepto de valor unitario y comentar cómo se relaciona con el factor de escala o constante de proporcionalidad. En una situación de proporcionalidad directa se relacionan dos magnitudes (como dinero y caramelos) o dos valores de una misma magnitud (como centímetros con centímetros o centímetros con metros). El valor unitario es el valor de una de las magnitudes cuando el valor de la otra es 1. Por ejemplo, si tres caramelos cuestan \$6, un caramelo cuesta \$2. El valor unitario es 2 pesos y la constante de proporcionalidad es 2 pesos por cada caramelo. Dos es el número que permite encontrar el costo de cualquier cantidad de caramelos. Por ejemplo, si queremos saber cuánto cuestan 3 caramelos basta multiplicar $3 \times 2 = 6$, así que 3 caramelos cuestan 6 pesos.

Propósito del interactivo. Resolver problemas de proporcionalidad directa.

Respuestas.

a) A cada centímetro en la medida real corresponde 0.005 cm en el dibujo. Así, 0.005 centímetros es el valor unitario que nos permite pasar de las medidas reales del tablero para obtener su medida en el dibujo.

b) Por 0.005 cm.

Posibles dificultades. Es posible que algunos alumnos digan que el valor unitario es 200 porque para obtener las medidas del dibujo, las medidas reales deben dividirse entre 200. Aunque esto es correcto, se refiere más a la operación que hay que hacer para llenar la tabla y no a lo que significa el valor unitario. El valor unitario es aquel que permite saber a cuánto equivale 1 cm de la medida real en el dibujo, y la respuesta es 0.005 cm.

SECUENCIA 15

II. Las medidas oficiales de un tablero de basquetbol son: largo 180 cm y ancho 105 cm.

Con la misma escala del dibujo completen la siguiente tabla para encontrar cuáles serían las medidas del tablero en el dibujo:

	Medida real (cm)	Medida en el dibujo (cm)
Largo del tablero	180	0.9
Ancho del tablero	106	
Largo de rectángulo inscrito en el tablero	60	
Ancho del rectángulo inscrito en el tablero	48	
Diámetro del aro o canasta	46	

a) ¿Cuál es el valor unitario que permite pasar de las medidas reales del tablero a su medida respectiva en el dibujo? ____________

b) ¿Por cuál número hay que multiplicar las medidas reales del tablero para obtener su medida en el dibujo? ____________

Recuerden que:
multiplicar por $\frac{1}{200}$ es lo mismo que dividir entre 200.

Comparen sus resultados, y con las medidas que encontraron dibujen el tablero en el siguiente espacio:

186

>>> A lo que llegamos

En este problema de escala las medidas del dibujo (en cm) se pueden obtener multiplicando por $\frac{1}{200}$ o bien dividiendo entre **200** las medidas reales (en cm). El número $\frac{1}{200}$ es la **constante de proporcionalidad** que permite pasar de las medidas reales de la cancha de basquetbol a las medidas del dibujo.

>>> Lo que aprendimos

Una cancha reglamentaria de voleibol es un rectángulo con las siguientes dimensiones: largo 18 metros y ancho 9 metros.

a) Si se hace un dibujo de la cancha de voleibol a escala 1 cm a 50 cm, ¿cuánto debe medir el largo de la cancha en el dibujo? ______

b) Completen la siguiente tabla para encontrar algunas de las medidas de una cancha reglamentaria de voleibol dibujada a escala 1 cm a 50 cm.

	Medida en el dibujo (cm)	Medida real de la cancha (cm)
Largo de la cancha de voleibol	36	1 800
Ancho de la cancha de voleibol	18	900
Altura de la red	5	250
Ancho de la red	2	100

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar de las medidas reales de la cancha a las medidas del dibujo? ______

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar de las medidas del dibujo de la cancha a las medidas reales? ______

e) ¿Cuántas veces más chico es el largo de la cancha en el dibujo que el largo real de la cancha? ______

187

2

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que, efectivamente, $1\frac{1}{200}$ o 0.005 es la constante de proporcionalidad o factor de escala, pero que también es el valor unitario, porque a cada cm de las medidas reales corresponden 0.005 cm en el dibujo.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos que le entreguen las respuestas a las preguntas c), d) y f). Si no son correctas, revise nuevamente esta sesión.

Respuestas.

a) El largo de la cancha es de 18 m o 1 800 cm. Según el factor de escala, 50 cm de la cancha medirán 1 cm en el dibujo, así que se divide 1 800 entre 50 y resulta 36. El largo de la cancha en el dibujo medirá 36 cm.

c) Es $\frac{1}{50}$ (porque para obtener las medidas del dibujo cada medida real se multiplica por $\frac{1}{50}$.)

d) 50, porque cada medida en el dibujo se multiplica por 50.

e) Es 50 veces más chico.

Propósito de la sesión. Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales en contexto de escalas en los que la constante de proporcionalidad es una fracción unitaria.

Organización del grupo. Se sugiere trabajar toda la sesión en parejas.

Propósito del video. Identificar y usar la constante de proporcionalidad para resolver problemas con cantidades directamente proporcionales.

SESIÓN 2

MAPAS Y ESCALAS

>>> Para empezar

Centro Histórico de la Ciudad de México

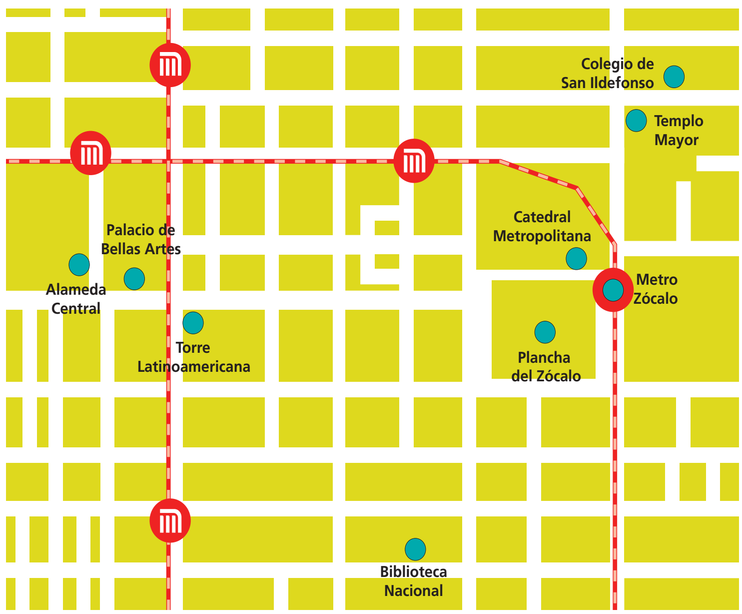
La Ciudad de México, además de ser la capital, es la ciudad más grande del país. Tiene aproximadamente 9 000 000 de habitantes, y si contaran a la gente que vive en sus alrededores ¡llega a 18 000 000! Además, la cantidad de calles, avenidas y edificios que la componen es realmente enorme. Ni los propios habitantes de la ciudad los conocen todos. Por eso es muy importante tener un mapa cuando se transita por esta ciudad.

En las siguientes actividades van a usar un mapa del centro de la Ciudad de México para ubicar algunos de los edificios más importantes y los recorridos que se pueden hacer por sus calles.

>>> Consideremos lo siguiente

Veamos un mapa del Centro Histórico de la Ciudad de México.

Fue hecho a una escala de **1** cm a **100** m, es decir, **1** cm del mapa equivale a **100** m de las medidas reales.



Completen la siguiente tabla:

	Medida en el mapa (cm)	Medida real (m)
De la **Catedral** a la **Alameda Central**	12.2	
De la estación **Zócalo** del metro a la **Biblioteca Nacional**	7.5	
De la **Torre Latinoamericana** a la **Alameda**	3	
Del **Templo Mayor** al **Colegio de San Ildefonso**	1.3	
Largo de la **plancha** del **Zócalo**	2.5	
Ancho de la **plancha** del **Zócalo**	2.2	

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten.

¿Cuántas veces más grande es la medida del largo de la plancha del Zócalo con respecto a su medida en el mapa? ____

>>> Manos a la obra

I. En el **equipo 1** de otra escuela dijeron:

"Como la escala es 1 cm a 100 m, entonces la medida real del largo de la plancha del Zócalo es 100 veces mayor que su medida en el mapa."

En el **equipo 2** dijeron:

"La medida real del largo de la plancha del Zócalo no es 100 veces más grande que su medida en el mapa, ya que las unidades cambian de centímetros a metros. Y la medida real del largo de la plancha del Zócalo es 10 000 veces más grande que su medida en el mapa."

Comenten:

¿Con cuál de los dos argumentos están de acuerdo?, ¿por qué?

II. Contesten:

En el mapa el largo de la plancha del Zócalo mide 2.5 cm.

a) ¿Cuál es su medida real en centímetros? ____

Propósito de la actividad. La intención es seguir trabajando con situaciones de proporcionalidad directa, sin embargo, es posible que haya diferencias mínimas en las medidas que obtenga cada pareja debido a imprecisiones en la medición. En el momento de la comparación, establezca cuáles son las medidas con las que todos habrán de trabajar, procurando redondear las medidas fraccionarias.

Respuestas. Cada medida en el mapa debe multiplicarse por 100 para obtener la medida real. Si el largo de la plancha del Zócalo es 2.5 cm en el mapa, su medida real es 250 m; y si el ancho en el mapa es 2.2 cm, su medida real es 220 m.

Respuestas. Es 10 000 veces más grande.

Posibles dificultades. Algunos alumnos podrían responder que es 100 veces más grande porque no están considerando que la unidad de medida en el mapa es el centímetro, y en las medidas reales es el metro (cada centímetro en el mapa equivale a 10 000 cm reales).

Si se equivocan, no los corrija en este momento y permita que sigan resolviendo la sesión.

Sugerencia didáctica. Haga notar a los alumnos que en estas preguntas se piden las medidas reales en centímetros.

Respuestas. Cada medida se multiplica por 10 000.

a) 25 000 cm.

b) 22 000 cm.

c) 10 000 cm, que es el valor unitario.

El ancho de la plancha del Zócalo mide 2.2 cm en el mapa.

b) ¿Cuál es su medida real en centímetros? _______________

c) ¿Qué medida real en centímetros le corresponde a 1 cm del mapa?

____

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cuántas veces más grande son las medidas reales del largo y ancho de la plancha del Zócalo que sus medidas en el mapa?

III. Completen la siguiente tabla para determinar las medidas reales en centímetros entre algunos lugares de la Ciudad de México a partir de las medidas del mapa:

	Medida en el mapa (cm)	**Medida real (cm)**
De la **Catedral** a la **Alameda Central**	12.2	120 000
De la estación **Zócalo** del metro a la **Biblioteca Nacional**	7.5	75 000
De la **Torre Latinoamericana** a la **Alameda**	3	30 000
Del **Templo Mayor** al **Colegio de San Ildefonso**	1.3	13 000
Largo de la **plancha** del **Zócalo**	2.5	25 000
Ancho de la **plancha** del **Zócalo**	2.2	22 000

>>> A lo que llegamos

Cuando una escala está dada con cierto cambio de unidades, como 1 cm a 100 m, hay varias maneras de relacionar las medidas reales con las del mapa, por ejemplo:

- Si se quiere pasar de las medidas del mapa en **centímetros** a las reales **en metros**, la **constante de proporcionalidad** es **100 m por cada cm**; es decir, las medidas reales (en metros) se obtienen al multiplicar por 100 las del mapa (en centímetros).
- Si se quiere pasar de las medidas del mapa **en centímetros** a las reales en centímetros, la **constante de proporcionalidad** es **10 000 cm por cada cm**; es decir, las medidas reales se obtienen al multiplicar por 10,000 las del mapa.

Lo anterior quiere decir que las medidas reales son 10 000 veces más grandes que las del mapa, y no que las medidas reales sean 100 veces más grandes que las del mapa. Es decir, en este problema el **factor de escala** es **10 000**.

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que el factor de escala en este problema no es 100 sino 10 000, porque cada centímetro en el mapa representa 10 000 cm en la realidad. La constante de proporcionalidad puede considerar el cambio de unidad o no, como dice la información. Es decir, la constante puede ser 100 (para pasar de centímetros a metros) o 10 000 (para pasar de centímetros a centímetros).

RUTAS Y TRANSPORTE

SESIÓN 3

Propósitos de la sesión. Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales identificando la aplicación inversa de la constante de proporcionalidad.
Utilizar los procedimientos aprendidos durante la secuencia para resolver situaciones de proporcionalidad directa en diversos contextos.
Organización del grupo. Se sugiere trabajar la sesión en parejas, excepto el apartado *Lo que aprendimos* y cuando haya momentos de discusión grupal.

>>> Para empezar

En la actualidad, el transporte es fundamental en las actividades que se realizan cotidianamente. Uno de los medios de transporte terrestre más usados es el camión.

Al número de kilómetros que el camión recorre por cada litro de gasolina que consume, se le llama rendimiento. Es útil conocer el rendimiento, por ejemplo, para saber qué cantidad de gasolina va a necesitar el camión para hacer un viaje largo.

>>> Consideremos lo siguiente

La tabla muestra las rutas que cubre una compañía de transporte y la distancia que hay entre los distintos lugares a los que llega.

Lugar de partida	Lugar de llegada	Distancia (km)
Hermosillo	Mexicali	682
Ciudad de México	Veracruz	435
Puebla	Acapulco	540
Acapulco	Ciudad de México	411
Ciudad de México	Querétaro	215

191

Sugerencia didáctica. Antes de que las parejas empiecen a resolver es recomendable que abra un espacio para que los alumnos comenten de qué se trata el problema.

Propósito de la actividad. En este problema es importante que los alumnos lleguen a establecer que el rendimiento de un camión es el número de kilómetros que recorre por cada litro de gasolina (km/l). Permita que lo resuelvan con sus propios procedimientos y en este momento no intervenga. Más adelante podrán comentarlos, detectar dudas y corregir errores.

Respuestas.

a) El camión 1 recorre de Puebla a Acapulco 540 km; considerando la ida y la vuelta son 1 080 km en total. Como utilizó 40 ℓ para ese viaje, se divide 1 080 entre 40, obteniendo un rendimiento de 27 km por litro.
El camión 2 recorre de Querétaro a Veracruz 650 km (pasando por la Ciudad de México); de ida y vuelta son 1 300 km en total. Utilizó 50 ℓ, por lo tanto 1 300 entre 50 da un rendimiento de 26 km por litro.
El primer camión tiene un mejor rendimiento.

b) Son 682 km del viaje y recorre 27 km por litro de gasolina. Necesitaría 682 ÷ 26 = 25.26 ℓ (redondeando el resultado).

c) Recorre 26 km por litro de gasolina. Necesitaría 682 ÷ 26 = 26.23 litros.

La compañía tiene dos tipos de camiones y el administrador quiere saber cuál de ellos tiene un mejor rendimiento, es decir, qué camión recorre más kilómetros por cada litro de gasolina. Lo que el administrador sabe es que:

- El camión del tipo 1 hace un recorrido de ida y vuelta de Puebla a Acapulco con 40 litros de gasolina.
- El camión del tipo 2 hace un recorrido de ida y vuelta de Querétaro a Veracruz, pasando por la Ciudad de México, con 50 litros de gasolina.

a) ¿Cuál de los dos tipos de camiones recorre más kilómetros por litro de gasolina?
____

b) ¿Cuántos litros de gasolina utilizaría el camión del tipo 1 en un recorrido de Hermosillo a Mexicali? _______________

c) ¿Cuántos litros de gasolina utilizaría el camión del tipo 2 en un recorrido de Hermosillo a Mexicali? _______________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Para encontrar cuál tipo de camión tiene el mejor rendimiento llenen las siguientes tablas.

Consumo de gasolina del camión tipo 1 (ℓ)	Distancia recorrida del camión tipo1 (km)
40	1 080
20	
10	
1	

Tabla 1

Consumo de gasolina del camión tipo 2 (ℓ)	Distancia recorrida del camión tipo 2 (km)
50	1 300
25	
5	
1	

Tabla 2

a) ¿Cuál es el rendimiento del camión del tipo 1? _______________

b) ¿Cuál es el rendimiento del camión del tipo 2? _______________

Comparen sus resultados y comenten:

c) ¿Cuál de los dos tipos de camiones tiene el mejor rendimiento? _______________

Propósito de la actividad. Las tablas pretenden apoyar a los alumnos para que obtengan el valor unitario mediante el cálculo de otros valores.
Cuando las hayan completado invítelos a comparar sus respuestas con las que obtuvieron en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

II. Con los datos anteriores, completen las siguientes tablas para encontrar cuántos litros de gasolina consumen los dos tipos de camión en un recorrido de Hermosillo a Mexicali:

Distancia recorrida del camión tipo1 (km)	Cantidad de gasolina consumida por el camión del tipo 1 (ℓ)
27	1
1	
682	

Tabla 3

Distancia recorrida del camión tipo 2 (km)	Cantidad de gasolina consumida por el camión del tipo 2 (ℓ)
26	1
1	
682	

Tabla 4

>>> A lo que llegamos

En estos problemas la **constante de proporcionalidad** indica el número de kilómetros que se recorren por cada litro de gasolina, es decir, el rendimiento.

El rendimiento del camión tipo 1 es de **27 km por cada ℓ**, mientras que el rendimiento del camión tipo 2 es de **26 km por cada ℓ**.

Respuestas.
Para el camión tipo 1 ℓ.
1 km recorrido: 1 entre 27 = $\frac{1}{27}$ ℓ o 0.037037… ℓ (como es un decimal periódico puede sugerirles que lo trunquen o lo redondeen).

682 km recorridos: 682 entre 27 = $\frac{682}{27}$ = $25\frac{7}{27}$ o 25.26 ℓ (redondeando).

Para el camión tipo 2.
1 km recorrido: 1 entre 26 = $\frac{7}{26}$ o 0.038 ℓ (redondeando).

682 km recorridos:
682 entre 26 = $\frac{682}{26}$ = 26 $\frac{6}{26}$ o 26.23 ℓ (redondeando).

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos hagan uso de la constante de proporcionalidad, identificándola como el número que permite pasar de la distancia recorrida al consumo de gasolina.

Respuestas. Para conocer cuál es el consumo de gasolina se divide el número de kilómetros de cada recorrido entre la constante de proporcionalidad.

Respuestas. Sabemos que el camión 1 tiene un rendimiento de 27 km por cada litro de gasolina. Para saber cuántos litros de gasolina gasta en un recorrido de 162 km se divide 162 entre 27, o bien, se multiplica 162 por $\frac{1}{27}$. La constante de proporcionalidad en la tabla 5 es $\frac{1}{27}$ porque se multiplica por $\frac{1}{27}$ (o se divide entre 27). En la tabla 6 es $\frac{1}{26}$.

III. Ahora calculen las distintas cantidades de litros de gasolina que se consumen en otras rutas que cubre la compañía.

Rutas del camión 1:

Recorrido	Distancia en el recorrido (kilómetros)	Consumo de gasolina del camión 1
De Ensenada a Durango	2 187	81
De Toluca a Colima	702	26
De Morelia a Guanajuato	162	6

Tabla 5

Rutas del camión 2:

Recorrido	Distancia en el recorrido (kilómetros)	Consumo de gasolina del camión 2
De Acapulco a Cuernavaca	312	12
De Toluca a Colima	702	27
De Ciudad de México a Puebla	130	5

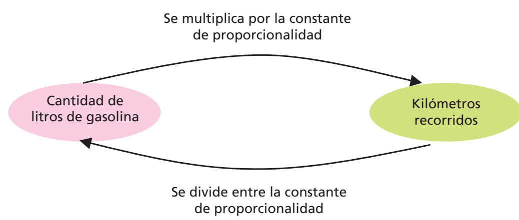
Tabla 6

Comparen sus resultados y comenten:

c) ¿Cuáles son las constantes de proporcionalidad de las tablas 5 y 6?

>>> A lo que llegamos

En este problema multiplicar o dividir por la **constante de proporcionalidad** permite encontrar la cantidad de kilómetros recorridos a partir de la cantidad de litros de gasolina consumidos y al revés, es decir, permite encontrar los litros de gasolina consumidos a partir de los kilómetros recorridos. Esta situación se ilustra mediante el siguiente esquema.



194

2

Sugerencia didáctica. La finalidad de la información que se presenta en este apartado es que los alumnos establezcan la acción inversa de la constante de proporcionalidad. Además de comentar esta información con el grupo, pida a los alumnos que busquen en la misma secuencia ejemplos que ilustren la aplicación de estas dos constantes.

>>> Lo que aprendimos

En tu cuaderno resuelve los siguientes problemas.

1. La base de un rectángulo mide 12 cm y su altura 5 cm. Se quiere hacer un dibujo a escala de ese rectángulo en el que la base mida 6 cm.

   a) ¿Cuántos centímetros debe medir la altura?

   b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar del tamaño original a la reducción?

   c) ¿Cuántas veces más chico es el dibujo reducido con respecto al original?

2. Los lados de un triángulo miden 5, 8 y 11 cm respectivamente. Se quiere hacer un dibujo a escala de ese triángulo de manera que el lado que mide 5 cm ahora mida 8 cm.

   a) ¿Cuánto deben medir los otros lados del triángulo?

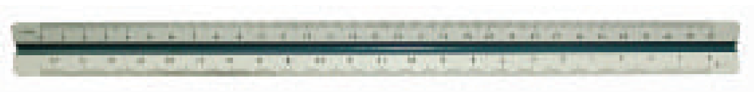
   b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

   c) ¿Cuántas veces más grande es el dibujo hecho a escala con respecto al original?

>>> Para saber más

Sobre las distancias que hay entre los distintos estados de la República Mexicana, así como algunas características especificas de éstos consulta:
http://www.trace-sc.com/maps_sp.htm
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Sobre las reglas y las dimensiones completas de una cancha de basquetbol y de voleibol consulta:
http://es.wikipedia.org/wiki/B%C3%A1squetbol#Medidas
http://www.monografias.com/trabajos14/voleib/voleib.shtml
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].



Respuestas.

a) Si en el rectángulo original la base mide 12 cm y en el dibujo a escala debe medir 6 cm, la altura debe ser también la mitad de la medida original: 2.5 cm.

b) Es $\frac{1}{2}$ (se multiplica por $\frac{1}{2}$ o se divide entre 2).

c) Es dos veces más pequeño.

Integrar al portafolios. Analice las respuestas de los alumnos y si es necesario revisen conjuntamente los apartados *Manos a la obra* de la secuencia 1 y de la secuencia 3.

Respuestas.

a) Para pasar de 5 cm a 8 cm se multiplica por $\frac{8}{5}$ o por 1.6.

El lado que medía 8 cm debe medir $\frac{64}{5}$ (12.8 cm), y el que medía 11 cm debe medir $\frac{88}{5}$ (17.6 cm).

Las medidas también pueden encontrarse dividiendo primero entre 5 y luego multiplicando por 8.

b) Es $\frac{8}{5}$ (se multiplica por $\frac{8}{5}$ o se divide entre $\frac{5}{8}$).

c) Es $\frac{8}{5}$ o 1.6 veces más grande.

Propósito de la sesión. Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales en los que se aplican sucesivamente dos factores constantes de proporcionalidad.
Organización del grupo. La sesión se trabaja en parejas.

Propósito del video. Identificar problemas con cantidades directamente proporcionales en donde se aplican sucesivamente dos constantes de proporcionalidad.

Propósito de la actividad. En esta situación se ponen en juego dos constantes de proporcionalidad que se aplican sucesivamente: × 30 (lente del objetivo) y × 20 (lente del ocular).
Posibles dificultades.
Probablemente algunos alumnos cometan errores como:

- Sumar las constantes de proporcionalidad (30 + 20 = 50 como ampliación final).
- Considerar sólo una de las constantes (ya sea × 20 o × 30) como la ampliación final.

Mientras las parejas resuelven, usted puede observar qué procedimientos utilizan y cuáles son los errores más frecuentes, para que posteriormente pueda retomarlos y ponerlos a consideración del grupo.

SECUENCIA 16

Aplicación sucesiva de constantes de proporcionalidad

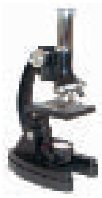
En esta secuencia aprenderán a interpretar el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en diversos contextos.

SESIÓN 1

MICROSCOPIOS COMPUESTOS

>>> Para empezar

Los microscopios son una de las herramientas tecnológicas que más descubrimientos científicos han impulsado en el área de las ciencias biológicas. En la secuencia 9 **¿Cómo medir seres pequeñitos?** de su libro de **Ciencias I** estudiaron algunos de estos descubrimientos. En la secuencia 6 de **Matemáticas I** conocieron las amplificaciones que se pueden hacer con los microscopios ópticos y cómo calcularlas. En esta sesión estudiarán las amplificaciones que se pueden hacer con microscopios de dos lentes, llamados microscopios ópticos compuestos.



Microscopios compuestos

Un microscopio óptico compuesto es un instrumento que amplifica las imágenes de los objetos usando dos lentes: la lente del objetivo y la lente del ocular. El objetivo es la parte del microscopio donde se pone el objeto que se va a observar, ahí está la primera lente. El ocular es la parte del microscopio donde se pone el ojo para observar la imagen amplificada del objeto, ahí está la segunda lente. La imagen del objeto es amplificada primero por la lente del objetivo y después por la lente del ocular.

>>> Consideremos lo siguiente

En el laboratorio de ciencias hay algunos microscopios compuestos. Uno de ellos tiene una lente en el objetivo que aumenta 30 veces el tamaño de los objetos. Además, tiene una lente en el ocular que aumenta 20 veces.

Recuerden que:
El micrómetro es una unidad que sirve para medir longitudes muy pequeñas.
1 micrómetro = 0.001 milímetros, o sea, 1 000 micrómetros = 1 milímetro.

Llenen la siguiente tabla para encontrar el tamaño con el que se verán las imágenes usando este microscopio

	Tamaño real (micrómetros)	Tamaño en el microscopio (micrómetros)
Bacteria 1	2	1 200
Cloroplasto	4	2 400
Bacteria 2	6	3 600
Glóbulo rojo	8	4 800
Glóbulo blanco	12	7 200

Tabla 1

196

Eje
Manejo de la información.
Tema
Análisis de la información.
Antecedentes
En la secuencia anterior los alumnos resolvieron problemas de proporcionalidad directa identificando la constante de proporcionalidad. En esta secuencia los alumnos aplicarán constantes de proporcionalidad de manera sucesiva.

Propósitos de la secuencia
Interpretar el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos	Vínculos
1	*Microscopios compuestos* Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales en los que se aplican sucesivamente dos factores constantes de proporcionalidad.	Video *Microscopios compuestos* Interactivo	Ciencias Secuencia 9
2	*Escalas y reducciones* Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales en los que la constante de proporcionalidad es una fracción unitaria.	Interactivo	
3	*Consomé ranchero* Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales mediante la aplicación sucesiva de constantes de proporcionalidad.		Ciencias Secuencia 12

Anoten en el pizarrón las medidas que cada equipo encontró y expliquen qué operaciones hicieron.

>>> Manos a la obra

I. El instructivo del microscopio incluye una tabla con las medidas de las amplificaciones de algunas células. Estas medidas están revisadas y verificadas por el laboratorio que construyó el microscopio.

	Tamaño real (micrómetros)	Tamaño en el microscopio (micrómetros)
Espermatozoide humano	3	1 800
Célula vegetal	8	4 800
Bacteria 3	11	6 600
Célula animal	12	7 200
Óvulo humano	200	120 000

Tabla 2

a) La tabla 2 indica que una célula vegetal que mide 8 micrómetros se ve en el microscopio de 4 800 micrómetros. En la tabla 1 un glóbulo rojo también mide 8 micrómetros, ¿qué medida encontraron ustedes para la amplificación de un glóbulo rojo en el microscopio? ____________________

b) La tabla 2 indica que una célula animal que mide 12 micrómetros se ve en el microscopio de 7 200 micrómetros. En la tabla 1 un glóbulo blanco también mide 12 micrómetros, ¿qué medida encontraron ustedes para la amplificación en el microscopio? ____________________

c) ¿Coinciden sus medidas con las de la tabla 2? ____________________

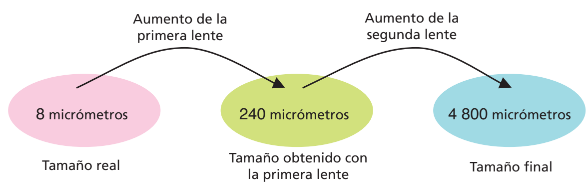
Comenten entre todos:

¿Mediante qué operación creen que se obtuvieron las medidas de la tabla 2?

____

Argumenten sus respuestas. Anoten las diferentes propuestas en el pizarrón.

II. En una escuela, un equipo hizo el siguiente esquema para calcular de qué tamaño se verá una célula vegetal en el microscopio:



197

Sugerencia didáctica. Pida a dos o tres parejas que hayan obtenido resultados distintos entre sí que expliquen cómo los obtuvieron. No es necesario que en este momento se agote la discusión sobre cuáles resultados son correctos y cuáles no, pues en la siguiente parte de la sesión podrán verificar sus respuestas.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos puedan contrastar los resultados que obtuvieron en la tabla 1 con las medidas que se establecen como correctas en la tabla 2. Las de las células vegetal y animal les permiten comparar de manera directa los resultados que obtuvieron para el glóbulo rojo y para el glóbulo blanco, pues las medidas originales son las mismas, respectivamente.

Sugerencia didáctica. Esta es una oportunidad para retomar la discusión de procedimientos y resultados que pudo haber quedado inconclusa en el problema inicial.

2

Sugerencia didáctica. El esquema muestra a los alumnos un procedimiento con el que pueden resolver este tipo de problemas, pues permite analizar las transformaciones que sucesivamente fue sufriendo el tamaño original al ser visto al través de cada una de las lentes. Analícelo con los alumnos.

Propósito del interactivo. Ejemplificar la aplicación sucesiva de la constante de proporcionalidad.

Respuestas.

a) La primera lente aumenta 30 veces las medidas originales, así que se obtiene una medida de 240 micras (8 × 30).

b) Por 20 (porque 240 × 20 = 4 800).

d) Multiplicando 13 × 600.
Multiplicar por 30 y luego por 20 es lo mismo que multiplicar por 600 (30 × 20).

e) 1 × 600.

2

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que copien en sus cuadernos el esquema y que redacten un texto en el que expliquen, con sus propias palabras, cómo se obtiene la constante de proporcionalidad correspondiente a la amplificación final.
También puede dejar como tarea el mismo problema, pero cambiando algunos datos, por ejemplo: ahora el aumento con la primera lente será de 15 veces y el de la segunda lente será de 45 veces. ¿Cuál será el aumento final?

a) ¿Por cuál número multiplicaron para obtener el aumento de la primera lente?

b) ¿Por cuál número multiplicaron para obtener el aumento de la segunda lente?

c) Llenen la tabla 3 para encontrar los aumentos que se obtienen con las dos lentes. Usen el esquema anterior para encontrar las medidas que faltan.

	Tamaño real (micrómetros)	Tamaño obtenido con la primera lente (micrómetros)	Tamaño final (micrómetros)
Bacteria 1	3	90	1 800
Espermatozoide humano	8	240	4 800
Cloroplasto	11	330	6 600
Glóbulo rojo	12	360	7 200
Glóbulo blanco	200	6 000	120 000

Tabla 3

d) ¿Cómo encontrarían el tamaño final de una célula cuyo tamaño real es de 13 micrómetros haciendo una sola operación?

e) ¿Y si el tamaño real de la célula fuera de 1 micrómetros?

>>> A lo que llegamos

Con la primera lente del microscopio compuesto descrito, una célula que mida 5 micrómetros se verá de 150 micrómetros (porque 5 × 30 = 150), una que mida 6 micrómetros se verá de 180 micrómetros (porque 6 × 30 = 180), etcétera.

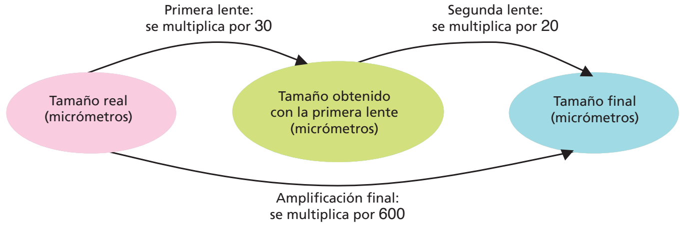
Los tamaños reales y sus amplificaciones son proporcionales. Con la primera lente cada célula amplifica su tamaño real 30 veces. En este ejemplo, al número que indica cuántas veces se amplifican las imágenes se le llama **constante de proporcionalidad**, y es **30 micrómetros por cada micra**.

La **constante de proporcionalidad** de la segunda lente es **20 micrómetros por cada micrómetro**.

La **constante de proporcionalidad** correspondiente a la **amplificación final** se obtiene al **multiplicar las constantes de proporcionalidad** de cada una de las dos lentes: en este caso **30 × 20 = 600**, es decir, **600 micrómetros por cada micrómetro**.

198

El siguiente esquema caracteriza lo dicho anteriormente:



ESCALAS Y REDUCCIONES

SESIÓN 2

Propósito de la sesión. Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales en los que la constante de proporcionalidad es una fracción unitaria.

Organización del grupo. La sesión se trabaja en parejas y en equipos.

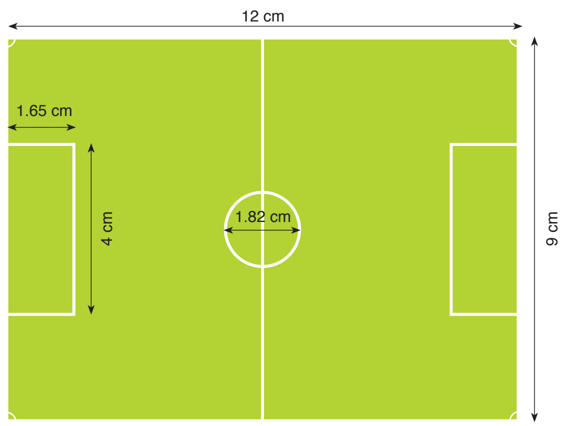
>>> Para empezar

Imagina que fuera necesario hacer el dibujo en tamaño real de una célula o de un edificio, ¿cómo lo harías? Con las escalas se pueden representar objetos muy pequeños o muy grandes porque permiten reducir o ampliar el tamaño real de los objetos de manera proporcional.

Una cancha reglamentaria de fútbol debe ser un rectángulo con las siguientes dimensiones: de largo debe medir entre 90 y 120 metros, y de ancho entre 45 y 90 metros.

>>> Consideremos lo siguiente

Observen un dibujo a escala 1 cm a 10 m de una cancha de futbol que tiene las medidas reglamentarias máximas.



Propósito de la actividad. En esta actividad se pretende ver el paso de la medida del dibujo a la medida real como la aplicación de una constante de proporcionalidad así como ver la conversión de metros a centímetros (para tener el valor del dibujo y el de la medida real en la misma unidad) como la aplicación de otra constante. Se espera que los alumnos hagan uso de procedimientos y recursos que ya han utilizado en situaciones similares: obtención del valor unitario y de la constante de proporcionalidad.

Respuestas.
a) 10 metros por cada centímetro.
b) 100.
c) Es 1 000 veces más grande.

Posibles dificultades. Algunos alumnos podrían responder que las medidas de la cancha son 10 veces más grandes con respecto a las del dibujo. Esa respuesta es incorrecta porque no está considerando el cambio de unidad (de centímetros a metros). No los corrija en este momento, permita que resuelvan el apartado *Manos a la obra.*

2

Sugerencia didáctica. El esquema representa el efecto de la aplicación sucesiva de dos constantes de proporcionalidad. Dibújelo en el pizarrón para completarlo y analizarlo junto con los alumnos. Enfatice que:

- El esquema puede analizarse viendo las flechas de arriba. Se aplica una primera constante para pasar de la medida del dibujo en centímetros a la real en metros. La primera constante es 10 metros por cada centímetro. Después viene la aplicación de la segunda constante para pasar la medida real en metros a centímetros. Como cada metro tiene 100 centímetros, la segunda constante es 100 centímetros por cada metro.
- También puede analizarse viéndolo por la flecha de abajo. Esa única flecha "compone" la aplicación de las dos constantes (10 y 100) en una sola. Por eso pasa de la medida del dibujo a la medida real en centímetros con una sola operación (por 1 000).

Sugerencia didáctica. Diga a los alumnos que comparen su respuesta a esta pregunta con la que dieron en el inciso c) del apartado anterior. Si hay diferencias, pídales que expliquen por qué y hagan las correcciones pertinentes.

Completen la siguiente tabla para encontrar algunas de las medidas de la cancha:

	Medida en el dibujo (cm)	Medidas reales de la cancha (m)
Largo de la cancha de futbol	12	120
Ancho de la cancha de futbol	9	90
Diámetro del círculo central	1.82	18.2
Largo del área grande	4	40
Ancho del área grande	1.65	16.5

Tabla 1

Recuerden que:
En el factor de escala las mismas unidades se deben conservar.

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar de una medida en el dibujo (en centímetros) a su medida real (en metros)? ______

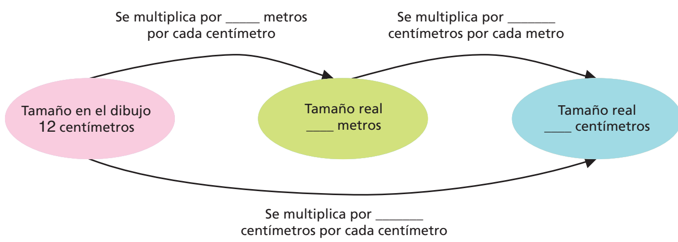
b) ¿Cuál es el factor de escala? ______

c) ¿Cuántas veces más grande es cada una de las medidas de la cancha con respecto a su medida en el dibujo? ______

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Completen el siguiente esquema para encontrar la medida real del largo de la cancha calculada en centímetros:



Comenten

¿Cuántas veces es más grande la medida real del largo de la cancha que su medida en el dibujo?

200

II. Completen la siguiente tabla para saber cuántas veces es más grande cada una de las medidas reales de la cancha respecto a su medida en el dibujo.

	Medida en el dibujo (cm)	Medida real de la cancha (cm)
Largo de la cancha de futbol	12	12 000
Ancho de la cancha de futbol	9	9 000
Diámetro del círculo central	1.82	1 820
Largo del área grande	4	4 000
Ancho del área grande	1.65	1 650

Tabla 2

¿Cuál es el factor de escala que permite pasar de las medidas en el dibujo (en centímetros) a las medidas reales (en centimetros)? ______

>>> A lo que llegamos

En este problema, para pasar de las medidas del dibujo a las medidas reales están involucradas varias constantes de proporcionalidad:

1. La **constante de proporcionalidad** que permite pasar de las medidas de la cancha en el dibujo (en centímetros) a las medidas reales (en metros) es **10 metros por cada centímetro**.
2. La **constante de proporcionalidad** que permite pasar de las medidas reales (en metros) a las medidas reales en (centímetros) es **100 centímetros por cada metro**.

   Esta constante permite hacer el cambio de unidades de metros a centímetros.
3. Finalmente, la **constante de proporcionalidad** que permite pasar de las medidas de la cancha en el dibujo (en centímetros) a las medidas reales (en centímetros) es **1 000 centímetros por cada centímetro**.

   Este número resulta ser el **factor de escala**.

Respuestas. Se aplica a cada medida del dibujo la composición de las dos constantes de proporcionalidad, es decir, cada medida se multiplica por 1 000.

Respuestas. El factor de escala es 1 000 cm.

Sugerencia didáctica. Lea junto con los alumnos la información del recuadro y vayan señalando en el siguiente esquema cada una de las constantes que se mencionan. Cuando terminen puede preguntarles: ¿cómo se puede pasar de la medida del dibujo (en centímetros) a la medida real en centímetros haciendo una sola operación?

Propósito de la actividad. Ahora se pretende que los alumnos apliquen una constante de manera inversa, es decir, si ya se conoce la medida real en metros, hallar la medida en el dibujo (en centímetros).

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que hagan mentalmente las operaciones necesarias para llenar la tabla. Esto les ayudará a practicar el cálculo mental con divisiones entre 10. Pongan especial atención en la medida del ancho de los postes de la portería, porque hay que añadir un cero.

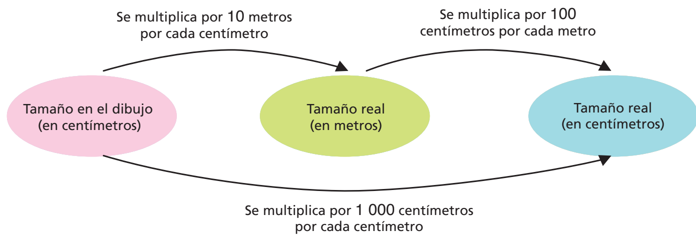
Respuestas. Hay que dividir cada medida real entre 10 para obtener la del dibujo (o recorrer el punto un lugar hacia la izquierda).

Propósito del interactivo. Ejemplificar la aplicación sucesiva de la constante de proporcionalidad.

Respuestas.

a) Es $\frac{1}{10}$ decímetro por cada metro.

b) Son 1 000 veces más chicas.



III. En el dibujo de la cancha de fútbol no aparecen las medidas del área chica. Completen la siguiente tabla para encontrar las dimensiones del área chica, de la portería y de la distancia que hay entre la portería y el lugar donde se cobra un tiro penal.

	Dimensiones reales de la cancha (m)	Dimensiones en el dibujo (cm)
Largo del área chica	18.5	1.85
Ancho del área chica	5.5	0.55
Largo de la portería	7.4	0.74
Altura de la portería	2.45	0.245
Tiro penal	9.15	0.915
Ancho de los postes de la portería	0.12	0.012

Tabla 3

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar de las medidas reales de la cancha (en metros) a la medida en el dibujo (en centímetros)? ______

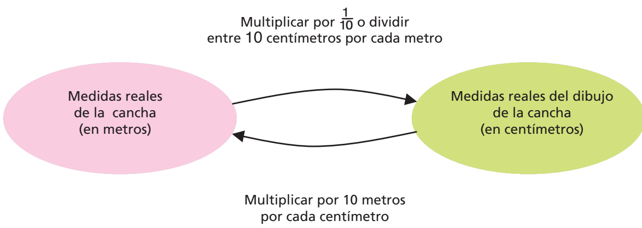
b) ¿Cuántas veces más chicas son las medidas del dibujo con respecto de su medida real? ______

202

>>> A lo que llegamos

En este problema las medidas del dibujo (en centímetros) se pueden obtener multiplicando por $\frac{1}{10}$ las medidas reales (en metros). La constante de proporcionalidad es $\frac{1}{10}$ centímetros por cada metro, y permite pasar de cualquier medida real (en metros) a su medida en el dibujo (en centímetros).

El siguiente esquema te ayudará a comprender mejor la explicación anterior



CONSOMÉ RANCHERO

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En la secuencia 12 **¿Cómo evitar problemas relacionados con la alimentación?** de tu libro de **Ciencias I** conociste la importancia de tener una buena alimentación. Muchas veces las cantidades recomendadas de alimentos que deben consumirse se presentan en forma de raciones o porciones. Por ejemplo, en las recetas de comida, las cantidades de los ingredientes se presentan dependiendo del número de porciones que se van a preparar. En esta sesión encontrarás distintas maneras de calcular estas cantidades.

203

3

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cómo encontraron las medidas de la tabla 3:
¿Alguien dividió entre 10?, ¿alguien multiplicó por $\frac{1}{10}$?
¿Se obtiene el mismo resultado con ambos procedimientos?
¿Por qué?

Propósito de la sesión. Resolver problemas de cantidades directamente proporcionales mediante la aplicación sucesiva de constantes de proporcionalidad.
Organización del grupo. Se propone resolver la sesión en parejas y en equipos. El apartado *Lo que aprendimos* es individual.

Propósito de la actividad. Se aborda la aplicación sucesiva de dos constantes de proporcionalidad, una que divide y otra que multiplica (en este caso, dividir entre 5 y multiplicar por 8). La operación que permite "componer" las dos constantes es multiplicar por $\frac{5}{8}$.

Posibles procedimientos. El problema puede ser resuelto de distintas maneras; una de ellas es que los alumnos intenten calcular la cantidad que se requiere de cada ingrediente para una porción (valor unitario). Una vez obtenida, se multiplica esa cantidad por 8 porciones.

Otra forma de resolverlo es multiplicar por 8 las cantidades de cada uno de los ingredientes, y después dividir entre 5 cada una de ellas; el resultado que se obtiene es el mismo que con el procedimiento anterior.

Es posible que algunos alumnos expresen los resultados con números decimales. Pídales que también lo hagan con fracciones.

Posibles dificultades. Los alumnos podrían:

1. Aplicar sólo una de las constantes, por ejemplo, multiplicar por 8 las cantidades de cada uno de los ingredientes pero sin dividir entre 5.
2. Observar que la diferencia entre 5 y 8 porciones es 3, por lo que podrían multiplicar la cantidad de cada ingrediente (para 5 porciones) por 3 y afirmar que esa es la cantidad que se requiere para 8 porciones.

Esos dos procedimientos son incorrectos. No los corrija ahora, más adelante tendrán oportunidad de hacerlo.

>>> Consideremos lo siguiente

Ésta es una receta para elaborar una sopa nutritiva y típica de la cocina mexicana, el consomé ranchero. Rinde para 5 porciones.

- 6 tazas de caldo de pollo;
- $\frac{1}{2}$ pechuga cocida y deshebrada;
- $\frac{1}{2}$ cebolla picada;
- 1 jitomate picado;
- $1\frac{1}{2}$ tazas de arroz cocido;
- 4 cucharadas de cilantro picado.

Contesten en sus cuadernos:

Si se quisieran preparar 8 porciones de consomé ranchero ¿Qué cantidades de cada ingrediente se necesitarían?

Comparen sus resultados con los de otras parejas y comenten cómo los obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. En un grupo, el equipo 1 lo resolvió así:

"Calculamos primero los ingredientes para una porción de consomé ranchero y luego los multiplicamos por 8".

Luego hicieron la siguiente tabla para encontrar el número de tazas de caldo de pollo que se necesitan para preparar 8 porciones.

Número de tazas de caldo de pollo en 5 porciones de consomé ranchero	Número de tazas de caldo de pollo en 1 porción de consomé ranchero	Número de tazas de caldo de pollo en 8 porciones de consomé ranchero
6	$6 \div 5 = 1.2 = \frac{6}{5}$	$1.2 \times 8 = \frac{48}{5} = 9.6$

Respuestas. Todas las cantidades deben multiplicarse por $\frac{8}{5}$.

$\frac{48}{5}$ tazas de caldo de pollo.

$\frac{8}{10}$ de pechuga.

$\frac{8}{10}$ de cebolla.

$\frac{8}{5}$ de jitomate picado.

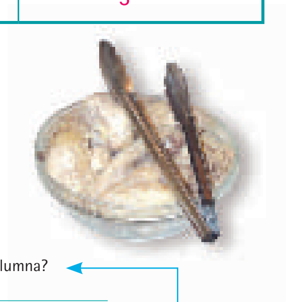
$\frac{24}{10}$ tazas de arroz cocido.

$\frac{32}{5}$ cucharadas de cilantro picado.

a) Completen la siguiente tabla usando el método del equipo 1.

Cantidades de cada ingrediente en 5 porciones de consomé ranchero	Cantidades de cada ingrediente en 1 porción de consomé ranchero	Cantidades de cada ingrediente en 8 porciones de consomé ranchero
6 tazas de caldo de pollo	$\frac{6}{5}$ tazas de caldo de pollo	$\frac{48}{5}$ tazas de caldo de pollo
$\frac{1}{2}$ pechuga cocida y deshebrada	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
$\frac{1}{2}$ cebolla picada	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
1 jitomate picado	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
$1\frac{1}{2}$ tazas arroz cocido	$\frac{3}{10}$	$\frac{24}{10} = \frac{12}{5}$
4 cucharadas de cilantro picado	$\frac{4}{5}$	$\frac{32}{5}$





b) ¿Por cuál número dividieron para ir de la primera a la segunda columna?

c) ¿Por cuál número multiplicaron para ir de la segunda a la tercera columna?

d) ¿Cuál es el número por el que se debe multiplicar o dividir para ir de la primera a la tercera columna? ____________________

Comparen sus tablas y sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron.

205

Propósito de la actividad. En esta tabla se explicita la aplicación de las dos constantes: primero entre 5 y después por 8 (que es lo mismo que multiplicar por $\frac{8}{5}$).

Sugerencia didáctica. Antes de que las parejas empiecen a resolver, es conveniente que en el grupo se comente el procedimiento que se explica en el texto (el del equipo 1) para calcular las tazas de caldo de pollo.

Pregunte al grupo cómo se resuelve la división $6 \div 5$ utilizando números fraccionarios. En especial, cómo se resuelve la división $\frac{1}{2} \div 5$ con números fraccionarios.

Pídales que comparen sus resultados en la tercera columna con los que escribieron en el apartado *Consideremos lo siguiente* y corrijan si no obtuvieron lo mismo.

Si los alumnos no encuentran la respuesta a la pregunta d) no se preocupe, continúen resolviendo y déjenla en blanco.

Respuestas.

b) Entre 5.

c) Por 8.

d) Por $\frac{8}{5}$.

II. El equipo 2 lo resolvió así:

"Cada ingrediente de la receta para 5 porciones lo multiplicamos por 8 y obtuvimos los ingredientes para 40 porciones, luego dividimos entre 5 cada uno de los ingredientes para las 40 porciones y así obtuvimos los ingredientes para 8 porciones."

Número de tazas de caldo de pollo en 5 porciones de consomé ranchero	Número de tazas de caldo de pollo en 40 porciones de consomé ranchero	Número de tazas de caldo de pollo en 8 porciones de consomé ranchero
6	$6 \times 8 = 48$	$48 \div 5 = 9.6 = \frac{48}{5}$

a) Completen la siguiente tabla usando el método del equipo 2.

Cantidades de cada ingrediente en 5 porciones de consomé ranchero	Cantidades de cada ingrediente en 40 porciones de consomé ranchero	Cantidades de cada ingrediente en 8 porciones de consomé ranchero
6 tazas de caldo de pollo	48 tazas de caldo de pollo	1 $\frac{48}{5}$ tazas de caldo de pollo
$\frac{1}{2}$ pechuga cocida y deshebrada	4	$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{2}$ cebolla picada	4	$\frac{4}{5}$
1 jitomate picado	8	$\frac{8}{5}$
$1\frac{1}{2}$ tazas arroz cocido	$\frac{24}{2}=12$	$\frac{12}{5}$
4 cucharadas de cilantro picado	32	$\frac{32}{5}$

En su cuaderno respondan las siguientes preguntas:

b) ¿Por cuál número multiplicaron para ir de la primera a la segunda columna?

c) ¿Por cuál número dividieron para ir de la segunda a la tercera columna?

d) ¿Cuál es el número por el que se debe multiplicar o dividir para ir de la primera a la tercera columna?

Propósito de la actividad. En esta tabla se explicita la aplicación de las dos constantes, pero en orden inverso a la tabla anterior: primero por 8 y luego entre 5 (que también es lo mismo que multiplicar por $\frac{8}{5}$).

Respuestas.

b) Por 8.

c) Entre 5.

d) Por $\frac{8}{5}$.

III. Comenten las siguientes preguntas:

¿Cuál de los dos métodos creen que sea correcto?

¿Cómo calcularon ustedes las cantidades necesarias para 8 porciones?

¿Les salió lo mismo que al equipo 1 y al 2?

>>> A lo que llegamos

En este problema se usaron dos métodos para hallar la cantidad que se necesitaría de cada ingrediente para preparar 8 porciones de consomé ranchero. Ambos están relacionados, ya que con el método del equipo 1 primero se divide entre 5 y luego se multiplica por 8, y con el del equipo 2, primero se multiplica por 8 y luego se divide entre 5.

La **constante de proporcionalidad** en este problema con cualquiera de los dos métodos es $\frac{8}{5}$.

>>> Lo que aprendimos

1. En una revista van a publicar una fotografía, pero no saben de qué tamaño se vería mejor ya impresa. La fotografía original mide 16 cm de largo por 8 cm de alto.

   Contesta las siguientes preguntas en tu cuaderno:

   a) La fotografía A se obtendrá de reducir la fotografía original a la mitad. ¿Cuáles serán las medidas de la A?

   b) La fotografía B se obtendrá de reducir la fotografía A a la cuarta parte. ¿Cuáles serán las medidas de la fotografía B?

   c) ¿Cuántas veces más pequeña es la fotografía B respecto a la fotografía original?

   d) Si a la fotografía B se le hace una ampliación de 8 veces su tamaño, ¿qué medidas tendrá la fotografía?

2. Finalmente, si a la fotografía original se le hace una reducción a la tercera parte de su tamaño y luego una ampliación del doble de su tamaño, ¿cuál es la constante de proporcionalidad por la cual deberán multiplicarse las medidas de la fotografía original para conocer las dimensiones de las reducciones hechas a la fotografía?

>>> Para saber más

Sobre una buena alimentación consulta:
http://www.nutricion.org/para_saber_mas/dieta_equilib_2.htm
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].
Sociedad Española de Dietética y Ciencias de la Alimentación.

Respuestas. Ambos métodos son correctos, porque da lo mismo:

- dividir entre 5 y multiplicar por 8;
- multiplicar por 8 y dividir entre 5;
- multiplicar por $\frac{8}{5}$.

Si dejaron los incisos d) de la página 205 en blanco, contéstenlos ahora.

Sugerencia didáctica. Después de leer esta información, pida a los alumnos que prueben con varios números para ver si efectivamente da lo mismo multiplicar por $\frac{8}{5}$ que dividir entre 5 y multiplicar por 8 o viceversa.

Integrar al portafolios. En esta sección los alumnos ponen en práctica lo que aprendieron anteriormente. Si todavía no han comprendido en qué consiste la composición de dos constantes de proporcionalidad, resuelvan juntos el apartado *Manos a la obra*.

Respuestas.

a) Al reducir a la mitad, cada una de las medidas de la fotografía original debe dividirse entre 2 o multiplicarse por $\frac{1}{2}$. Las medidas de la fotografía A serán 8 cm de largo por 4 cm de alto.

b) Para obtener las medidas de la fotografía B (reducción a la cuarta parte), se divide entre 4 o se multiplica por $\frac{1}{4}$ cada una de las medidas originales. Serán 4 cm de largo por 2 cm de alto.

c) La fotografía original es 4 veces mayor respecto de la fotografía B.

d) Al componerse las 2 reducciones, la fotografía original se reduce 8 veces: dividir entre 2 y después dividir entre 4 es igual a dividir entre 8 o a multiplicar por $\frac{1}{8}$

2) Al hacer la ampliación de la fotografía B 8 veces su tamaño se obtiene el tamaño de la fotografía original (16 cm de largo por 8 cm de alto).

PROPUESTA DE EXAMEN BIMESTRAL BLOQUE 1

A continuación se presenta una propuesta para evaluar el primer bloque mediante un examen que será complementario a la información que usted ha ido integrando en el portafolios del alumno.

El examen tiene las siguientes características:

De cada secuencia se proponen entre uno y cuatro reactivos, cada uno evalúa un aspecto del contenido que se trató en la secuencia. En total, para evaluar este bloque se sugiere proponer a los alumnos 22 reactivos.

El examen se arma de la siguiente manera:

Hay dos opciones para cada reactivo (salvo en el inciso 3 de la evaluación de la secuencia 6), cada una evalúa el mismo contenido y tiene el mismo nivel de dificultad. Así que en este bloque encontrará 43 reactivos, de los que debe elegir 22 (una de cada dos opciones). La intención de poner estas dos opciones es que usted pueda elegir una o la otra y armar así distintas versiones del examen según le convenga. Encontrará los 43 reactivos respondidos para facilitarle la calificación.

Recomendaciones para la aplicación del examen, su revisión y calificación:

Cada uno de los reactivos propuestos tiene su solución indicada al margen de la hoja. En el caso de reactivos con gráficos las respuestas estan en rojo.

Debido a la longitud del examen, se sugiere aplicarlo en dos sesiones de clase. Una vez aplicado, haga una revisión grupal de las soluciones de los reactivos para aclarar dudas y dar oportunidad a que cada alumno haga las correcciones pertinentes de los errores que hubiera cometido.

Se sugiere no asignar más del 50% de la calificación bimestral a los resultados del examen, considere para el otro 50% las actividades que integró en el portafolios y otros aspectos importantes (como la participación, el cumplimiento de tareas, etcétera).

SECUENCIA 1. SISTEMAS DE NUMERACION

Reactivo 1

La respuesta es el inciso c).

1. ¿Cuál es el valor posicional del 7 en el número 8 174 326? Subráyalo:
   a) 7.
   b) 70.
   c) 70 000.
   d) 74 326.

La respuesta es el inciso d).

1'. ¿Cuál es el valor posicional del 3 en el número 40 328 960? Subráyalo:
   a) 3.
   b) 300.
   c) 328.
   d) 300 000.

Reactivo 2

La respuesta es el inciso c).

2. Indica cuál de las siguientes sumas es igual a 20 105 037:
   a) $7 \times 1 + 3 \times 10 + 5 \times 1\,000 + 1 \times 10\,000 + 2 \times 10\,000\,000$
   b) $7 \times 1 + 3 \times 10 + 5 \times 10\,000 + 1 \times 100\,000 + 2 \times 10\,000\,000$
   c) $7 \times 1 + 3 \times 10 + 5 \times 1\,000 + 1 \times 100\,000 + 2 \times 10\,000\,000$
   d) $7 \times 1 + 3 \times 10 + 5 \times 1\,000 + 1 \times 100\,000 + 2 \times 1\,000\,000$

La respuesta es el inciso b).

2'. Indica cuál de las siguientes sumas es igual a 30 064 107:
   a) $7 \times 1 + 1 \times 100 + 4 \times 1\,000 + 6 \times 100\,000 + 3 \times 10\,000\,000$
   b) $7 \times 1 + 1 \times 100 + 4 \times 1\,000 + 6 \times 10\,000 + 3 \times 10\,000\,000$
   c) $7 \times 1 + 1 \times 100 + 4 \times 1\,000 + 6 \times 10\,000 + 3 \times 1\,000\,000$
   d) $7 \times 1 + 1 \times 100 + 4 \times 10\,000 + 6 \times 10\,000 + 3 \times 10\,000\,000$

Reactivo 3

3. Escribe cómo se lee el número 25 306 812.

Veinticinco millones trescientos seis mil ochocientos doce.

3'. Escribe como se lee el número 47 091 730.

Cuarenta y siete millones noventa y un mil setecientos treinta.

Reactivo 4

4. Relaciona las columnas colocando la letra que corresponda dentro del paréntesis :

A. Sistema de numeración decimal. ( ) Para escribir ciertos números se necesitan muchos símbolos.

B. Sistema de numeración maya. ( ) Se usan 10 símbolos o cifras.

C. Sistema de numeración egipcio. ( ) El valor de cada nivel se obtiene multiplicando por 20 el valor del nivel anterior.

( ) Tiene tres símbolos.

Las respuestas en orden:

C, A, B, B, C, A, C.

( ) No tiene un símbolo para el cero.

( ) El valor de cada posición se obtiene multiplicando por 10 el valor de la posición anterior.

( ) Puede escribirse un número poniendo los símbolos en sentido opuesto sin que cambie el valor del número.

4'. Relaciona las columnas colocando la letra que corresponda dentro del paréntesis:

A. Sistemas posicionales.

B. Sistemas no posicionales.

C. Sistemas aditivos.

( ) Para encontrar el valor de un número se debe sumar el valor de cada uno de los símbolos que aparecen en el número.

( ) El valor de cada símbolo depende de la posición en la que se encuentre.

( ) Puede escribirse un número poniendo los símbolos en sentido opuesto sin que cambie el valor del número.

( ) Sistema de numeración decimal.

Las respuestas en orden:

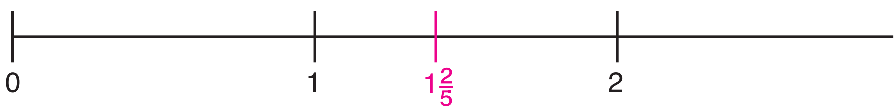
C, A, B, A.

SECUENCIA 2. FRACCIONES Y DECIMALES EN LA RECTA NUMÉRICA

Reactivo 1

Comentario: primero se localiza el 1, a la mitad entre el 0 y el 2. Luego la unidad entre el 1 y el 2 se divide en 5 partes. Se toma la segunda para localizar el $1\frac{2}{5}$.

1. En la siguiente recta numérica localiza el número $1\frac{2}{5}$



La respuesta es el inciso d).

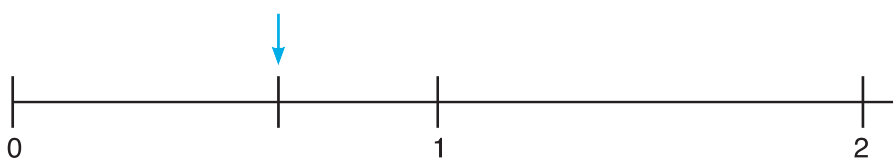
1'. ¿Cuál de los siguientes números es el que está señalado en la recta numérica?

a) $\frac{5}{3}$.

b) $\frac{8}{5}$.

c) $\frac{3}{5}$.

d) $\frac{5}{8}$.



Reactivo 2

2. En el Campeonato Mundial de Atletismo del 2003, celebrado en París, Francia, en la competencia de Salto de Altura, categoría Masculina, el ganador fue Jacques Freitag, de Sudáfrica. Su marca estuvo situada entre $2\frac{2}{7}$ y $2\frac{3}{7}$. Encuentra tres números que puedan ser la marca que obtuvo Freitag.

Entre ellos están por ejemplo: $2\frac{5}{14}$, $2\frac{7}{21}$, $2\frac{8}{21}$, $2\frac{9}{28}$ y $2\frac{11}{28}$

Pueden convertir a catorceavos: $2\frac{2}{7}$ son $2\frac{4}{14}$ y $2\frac{3}{7}$ son $2\frac{6}{14}$, entre ellos está el $2\frac{5}{14}$. Después pueden convertir a veintiunavos: $2\frac{2}{7}$ son $2\frac{6}{21}$ y $2\frac{3}{7}$ son $2\frac{9}{21}$, entre ellos están $2\frac{7}{21}$ y $2\frac{8}{21}$ O pueden convertir a veintiochoavos: $2\frac{2}{7}$ son $2\frac{8}{28}$ y $2\frac{3}{7}$ son $2\frac{12}{28}$, entre ellos están $2\frac{9}{28}$, $2\frac{10}{28}$ y $2\frac{11}{28}$.

2'. En el Campeonato Mundial de Atletismo del 2001, celebrado en Edmonton, Canadá, en la competencia de Salto de Altura, categoría Masculina, el ganador fue Martin Buss, de Alemania. Su marca estuvo situada entre $2\frac{1}{5}$ y $2\frac{2}{5}$. Encuentra tres números que pueden ser la marca que obtuvo Buss.

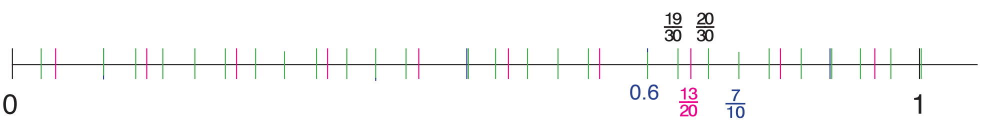
Entre ellos están: $2\frac{3}{10}$, $2\frac{4}{15}$, $2\frac{5}{15}$, $2\frac{5}{20}$ y $2\frac{7}{20}$.
Pueden convertir a décimos: $2\frac{1}{5}$ son $2\frac{2}{10}$ y $2\frac{2}{5}$ son $2\frac{4}{10}$, entre ellos está el $2\frac{3}{10}$. Después pueden convertir a quinceavos:
$2\frac{1}{5}$ son $2\frac{3}{15}$ y $2\frac{2}{5}$ son $2\frac{6}{15}$, entre ellos está el $2\frac{4}{15}$ y el $2\frac{5}{15}$.

O pueden convertir a veinteavos: $2\frac{1}{5}$ son $2\frac{4}{20}$ y $2\frac{2}{5}$ son $2\frac{8}{20}$, entre ellos está el $2\frac{5}{20}$, $2\frac{6}{20}$ y $2\frac{7}{20}$.

Reactivo 3

3. En la siguiente recta numérica localiza los números 0.6 y $\frac{7}{10}$. Después encuentra dos números que estén entre ellos.

Solución:



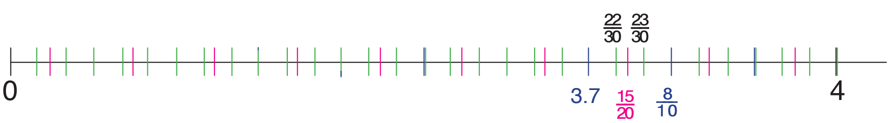
Entre ellos están por ejemplo: 0.61, 0.62, 0.63, 0.64, 0.65, 0.66, 0.67, 0.68 y 0.69.

Para localizar a los números deben poner el 0 y el 1. Se divide en 10 partes y se toma la sexta división para localizar al 0.6 y la séptima división para localizar al $\frac{7}{10}$.

Si toman al 0.6 como $\frac{6}{10}$, pueden transformar a veinteavos: $\frac{6}{10}$ son $\frac{12}{20}$ y $\frac{7}{10}$ son $\frac{14}{20}$, entre ellos está el $\frac{13}{20}$. Y luego pasar a treintavos: $\frac{6}{10}$ son $\frac{18}{30}$ y $\frac{7}{10}$ son $\frac{21}{30}$, entre ellos está el $\frac{19}{30}$ y $\frac{20}{30}$.

3'. En la siguiente recta numérica localiza los números 3.7 y $3\frac{8}{10}$. Después encuentra dos números que estén entre ellos.

Solución:



Entre ellos están 3.71, 3.72, 3.73, 3.74, 3.75, 3.76, 3.77, 3.78 y 3.79.

Comentario: para localizar los números deben de poner el 3 y el 4. Se divide en 10 partes y se toma la séptima división para localizar el 3.7 y la octava división para localizar el $3\frac{8}{10}$.

Si toman el 3.7 como $3\frac{7}{10}$ pueden transformar a veinteavos: $3\frac{7}{10}$ son $3\frac{14}{20}$ y $3\frac{8}{10}$ son $3\frac{16}{20}$; entre ellos está el $3\frac{15}{20}$. Y luego pasar a treintavos: $3\frac{7}{10}$ son $3\frac{21}{30}$ y $3\frac{8}{10}$ son $3\frac{24}{30}$, entre ellos están $3\frac{22}{30}$ y $3\frac{23}{30}$.

SECUENCIA 3. SUCESIONES DE NÚMEROS Y FIGURAS

Reactivo 1

1. Dibuja la figura 3 de la siguiente sucesión de figuras y completa la tabla.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

La figura 3 se forma agregando 3 bolitas a la figura 2, una en cada extremo.

TABLA: la figura del lugar 3 tiene 10 bolitas, la figura del lugar 5 tiene 16 bolitas, la figura del lugar 10 tiene 31 bolitas y la figura del lugar 20 tiene 61 bolitas.

Lugar de la figura	Número de bolitas
1	4
2	7
3	
4	13
5	
10	
20	

1'. Dibuja la figura 3 de la siguiente sucesión de figuras y completa la tabla.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

La figura 3 se forma agregando 2 cuadritos blancos a la derecha de la figura 2.

TABLA: la figura del lugar 3 tiene 8 cuadritos, la figura del lugar 5 tiene 12 cuadritos, la figura del lugar 10 tiene 22 cuadritos y la figura del lugar 20 tiene 42 cuadritos.

Lugar de la figura	Número de cuadritos
1	4
2	6
3	
4	10
5	
10	
20	

Reactivo 2

2. Para la sucesión **6**, **11**, **16**, **21**, **26**, **31**, **36**, **41**... subraya la expresión algebraica que te permite encontrar el término que está en el lugar n.

   a) $5n + 1$.

   b) $n - 5$.

   c) $n + 5$.

   d) n.

La respuesta es el inciso a).

2'. Para la sucesión **6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48**... subraya la expresión algebraica que te permite encontrar el término que está en el lugar n.

   a) $n + 6$.

   b) $6n$.

   c) $6n + 1$.

   d) $n - 6$.

Respuesta: inciso b).

Reactivo 3

3. La expresión algebraica que permite encontrar cualquier número de la sucesión **2**, **5**, **8**, **11**, **14**... es $3n - 1$, donde n indica el lugar del número dentro de la sucesión. ¿Cuál es el número que ocupa el lugar 100 en la sucesión? ____________________

Respuesta: 299.

Se puede obtener:
$3 \times 100 - 1 = 300 - 1 = 299$.

3'. La expresión $2n + 3$ permite encontrar cualquier número de la sucesión **5**, **7**, **9**, **11**, **13**... donde n indica el lugar del número dentro de la sucesión. ¿Cuál es el número que ocupa el lugar 100 en la sucesión?

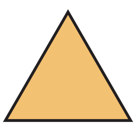
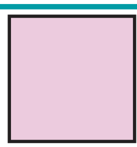
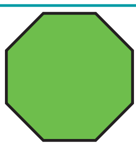
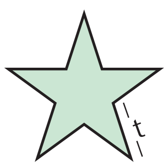
Respuesta: 203.

Se puede obtener: $2\ (100) + 3 = 203$.

SECUENCIA 4. GEOMETRÍA Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Reactivo 1

1. Escribe las expresiones algebraicas que sirven para calcular el perímetro de las siguientes figuras geométricas.

 x Expresión: ____________	 n Expresión: ____________
 x Expresión: ____________	 t Expresión: ____________

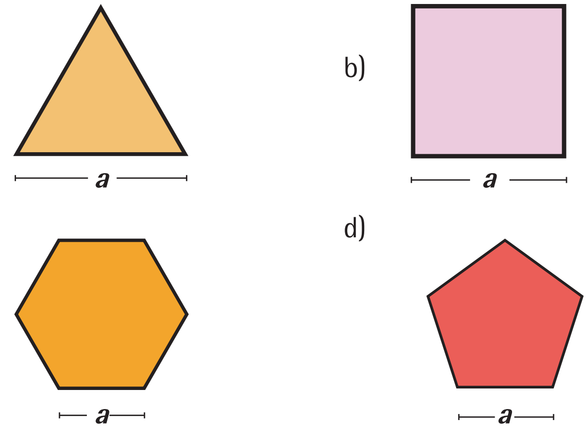
Respuesta: $3x$, $4n$, $8x$, $10t$.

Los alumnos pueden utilizar una "×" para indicar la multiplicación.

La respuesta es el inciso c).

1'. De las siguientes figuras ¿en cuál de ellas el perímetro se puede representar con la expresión $5a$?

a) b) c) d)



Reactivo 2

(a) $r \times r$ o rr.

(b) $\frac{s \times t}{2}$ o también $\frac{st}{2}$.

2. Escribe una expresión algebraica que permita calcular el área de:

a) Un cuadrado de lado r ______

b) Un triángulo de base **s** y altura t ______

(a) $d \times e$ o también de.

(b) $\frac{s \times t}{2}$ o también $\frac{st}{2}$.

2'. Escribe una expresión algebraica que permita calcular el área de:

a) Un rectángulo de base d y altura e ______

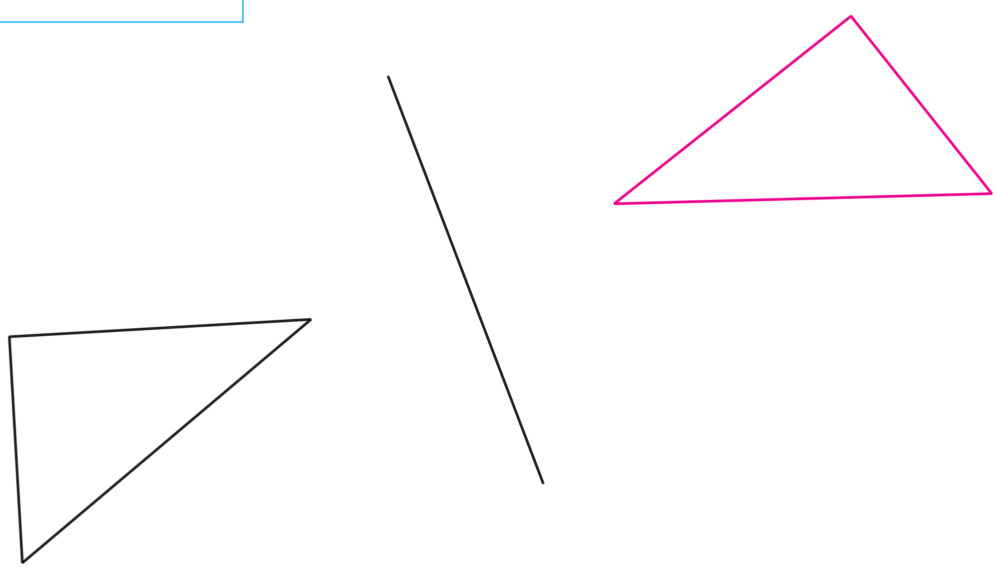
b) Un triángulo de base s y altura t ______

SECUENCIA 5. SIMETRÍA

Reactivo 1

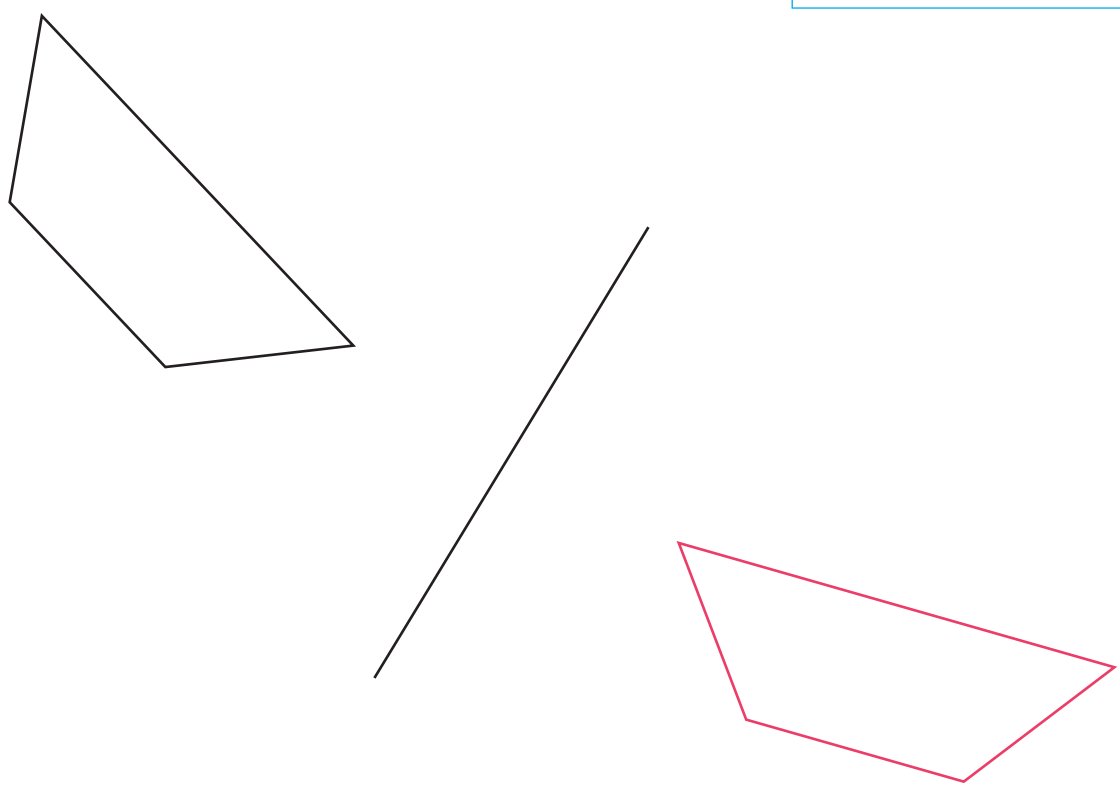
Comentario: se debe trazar el simétrico de cada uno de los vértices del triángulo.

1. Traza el simétrico del triángulo con respecto al eje utilizando tus instrumentos geométricos.



1'. Traza el simétrico del trapecio con respecto al eje utilizando tus instrumentos geométricos.

Comentario: se debe trazar el simétrico de cada uno de los vértices del trapecio.



Reactivo 2

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera al hablar de dos figuras simétricas con respecto a un eje?

a) Sus lados correspondientes tienen diferente medida.

b) Sus lados correspondientes tienen la misma medida.

c) Sus ángulos correspondientes tienen diferente medida.

d) Sus vértices correspondientes no equidistan del eje de simetría.

La respuesta es el inciso b).

2'. Al trazar una figura simétrica a otra con respecto a un eje se conservan algunas propiedades. Escribe dos de esas propiedades:

a) ______________________________

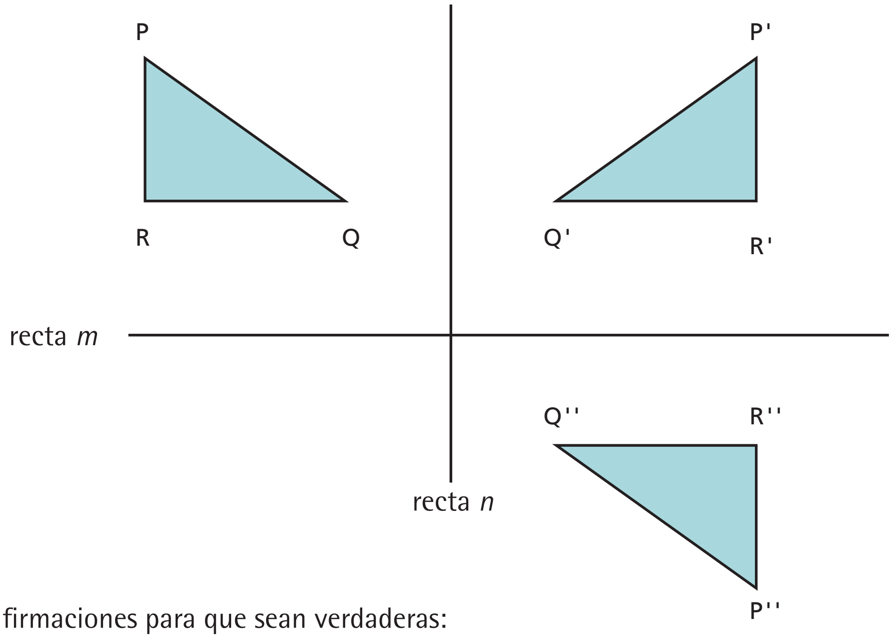
b) ______________________________

Posibles respuestas:

- Los lados correspondientes tienen la misma medida.
- Los ángulos correspondientes tienen la misma medida.
- Se conservan los lados paralelos.
- Se conservan los lados perpendiculares.

Reactivo 3

3. Con respecto a la siguiente figura:



Las respuestas son:

a) P″Q″R″.

b) P′Q′ con respecto a la recta ***n***.

c) RQ;
P′ R′;
Perpendiculares.

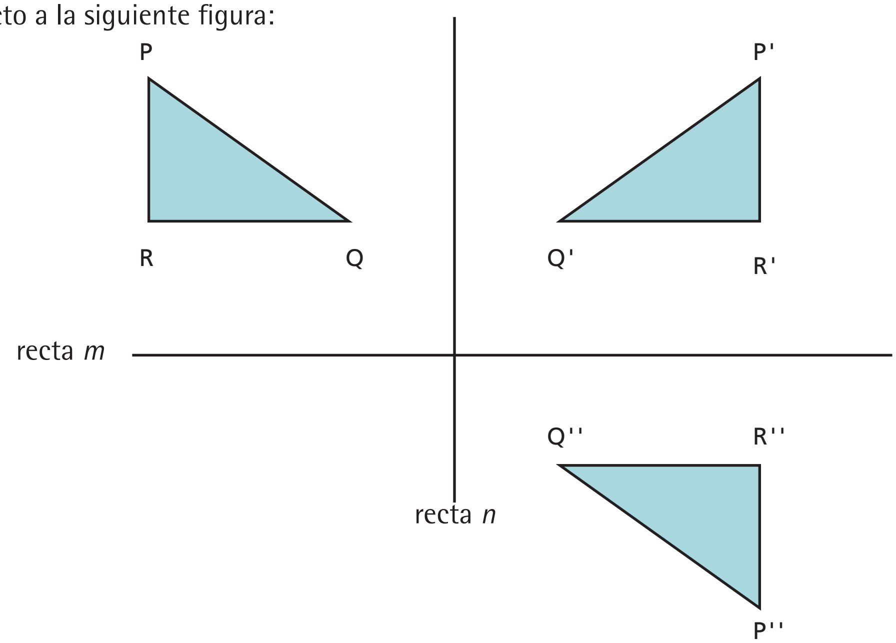
Completa las afirmaciones para que sean verdaderas:

a) El triángulo P′Q′R′ es simétrico al triángulo ________ con respecto a la recta *m*.

b) El lado PQ es el correspondiente simétrico del lado ________ con respecto a la recta ________

c) El lado PR es perpendicular a ________ y, por lo tanto, sus correspondientes simétricos ________ y R′Q′ también son ________

3′. Con respecto a la siguiente figura:



Las respuestas son:

a) P″Q″R″.

b) R′ con respecto a la recta ***n***.

c) 90°.
Ángulo R′, que mide 90°.

Completa las afirmaciones para que sean verdaderas:

a) El triángulo P′Q′R′ es simétrico al triángulo ________ con respecto a la recta *n*.

b) El ángulo R″ es el correspondiente simétrico al ángulo ________ con respecto a la recta ________

c) El ángulo R mide ________ y su correspondiente simétrico con respecto a la recta *n* es el ángulo ________ que mide ________

SECUENCIA 6. PROPORCIONALIDAD

Reactivo 1

1. ¿Cuáles de las siguientes tablas representan una situación de proporcionalidad directa?

a)

Cantidad de helados	Precio de los helados (en $)
3	15
6	30
1	5

b)

Lado de un cuadrado (en cm)	Perímetro de un cuadrado (en cm)
3	12
6	24
1	4

Las respuestas son los incisos a), b) y d).

c)

Lado de un cuadrado (en cm)	Área de un cuadrado (en cm^2)
3	9
6	36
1	1

d)

Cantidad de azúcar (en kg)	Precio del azúcar (en $)
3	21
6	42
1	7

1'. ¿Cuál de las siguientes cuatro tablas representa una situación de proporcionalidad?

a)

Lado de un cuadrado (en centímetros)	Área de un cuadrado (en centímetros cuadrados)
3	9
6	36
1	1

b)

Hora del día	Temperatura ambiental
6:00	10° C
12:00	27° C
18:00	18° C

La respuesta es el inciso d).

c)

Edad de un bebé (en meses)	Peso promedio (en kg)
3	4.5
6	6
1	3.5

d)

Lado de un cuadrado (en cm)	Perímetro de un cuadrado (en cm)
3	12
6	24
1	4

Reactivo 2

Las respuestas son:
a) 5 gramos.
b) 210 gramos.

2. Veinte tuercas tienen un peso total de 100 gramos.

a) ¿Cuánto pesa una tuerca? _______________

b) ¿Cuánto pesan 42 tuercas? _______________

Las respuestas son:
a) 2.50 pesos
b) 65 pesos

2'. Diez paletas cuestan 25 pesos.

a) ¿Cuánto cuesta una paleta? _______________

b) ¿Cuánto cuestan 26 paletas? _______________

Reactivo 3

3. Relacionen las siguientes dos columnas.

( ) Dos cantidades son directamente proporcionales si…

( ) El valor unitario es importante ya que…

( ) La cantidad de pintura blanca en mililitros es proporcional a su precio en pesos, el valor unitario es…

A. El precio en pesos correspondiente a un mililitro de pintura blanca.

B. Al aumentar al doble, triple, etc., … o disminuir a la mitad, tercera parte, etc., su correspondiente aumenta al doble, triple, etc., o disminuye a la mitad, tercera parte, etcétera.

C. Al aumentar una cantidad la otra disminuye.

D. A partir de él se puede encontrar cualquier cantidad de las que se encuentran en proporcion directa.

Las respuestas son B, E, A.

SECUENCIA 7.
REPARTO PROPORCIONAL

Reactivo 1

1. Cuatro amigos hicieron una inversión para poner un puesto de jugos y licuados. La siguiente tabla indica cuánto aportó cada uno:

Juan	$5 000
Miguel	$8 000
Héctor	$3 000
José	$4 000

Después de un tiempo vieron que tenían una ganancia de $50 000. Decidieron repartir la ganancia proporcionalmente a la cantidad que cada uno había invertido. ¿Cuánto le toca a cada quién?

La inversión total fue de $20 000. Es decir que por cada peso invertido, a cada uno le toca $2.50 de ganancia.

Entonces la ganancia se reparte:
Juan: $12 500.
Miguel: $20 000.
Héctor: $7 500.
José: $10 000.

1'. En un equipo de futbol los tres mejores goleadores se reparten un premio en proporción al número de goles que anotaron en la temporada. El mejor goleador anotó 12 goles, el segundo lugar anotó 9 y el tercer lugar anotó 7 goles. Si el premio total es de $14 000, ¿cuánto le corresponde a cada jugador?

Entre los tres goleadores anotaron 28 goles, es decir que les corresponde $500 por gol.
Al primero le tocan $6 000.
Al segundo le tocan $4 500.
Al tercero le tocan $3 500.

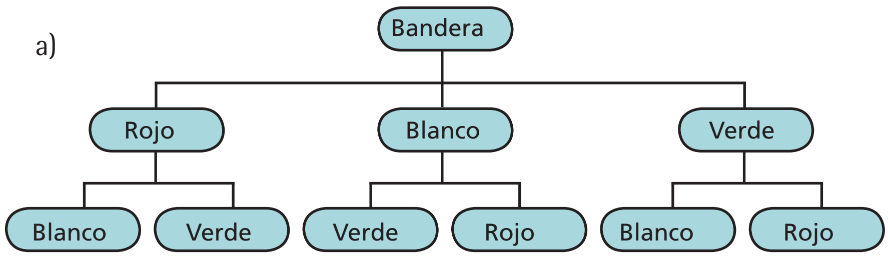
SECUENCIA 8. PROBLEMAS DE CONTEO

Reactivo 1

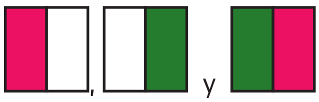
La respuesta es el inciso a).

1. Se quieren elaborar banderas de dos franjas y colores diferentes, para lo cual se tiene tela de los siguientes tres colores: blanco, rojo y verde.

¿Cuáles de los siguientes procedimientos corresponden al total de banderas diferentes que se pueden elaborar?

a) 

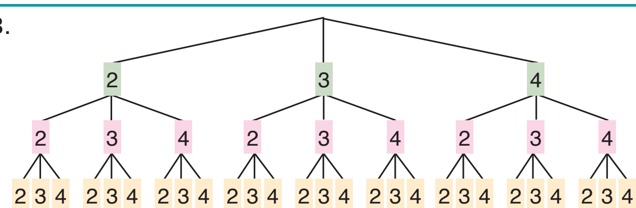
b) 3 × 3.

c) 

d) blanco, rojo
blanco, verde
blanco, blanco
verde, rojo
verde, blanco
verde, verde
rojo, blanco
rojo, verde
rojo, rojo.

Las respuestas son C, A, B, A.

1'. Relaciona las columnas anotando en cada paréntesis la letra del inciso que le corresponda. Puede repetirse más de una letra.

<table>
<tr><td>(   ) ¿De cuántas formas se puede armar un juego de alhajas si se tienen 3 tipos de aretes, 2 de pulseras y 4 de anillos?
(El juego de alhajas se forma con 1 tipo de aretes, pulsera y anillo.)</td><td>A. 4 × 3.</td></tr>
<tr><td>(   ) ¿Cuántos viajes directos diferentes se pueden realizar si hay 4 ciudades de salida y 3 ciudades de llegada?
(Un viaje directo es ciudad de salida-ciudad de llegada.)</td><td rowspan="2">B. 
</td></tr>
<tr><td>(   ) ¿Cuántos números diferentes de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 4, 3 y 2?
(Los números se pueden repetir.)</td></tr>
<tr><td>(   ) ¿De cuántas formas se pueden combinar 3 blusas y cuatro faldas?
(Utilizando únicamente 1 blusa y 1 falda.)</td><td>C. 2 × 3 × 4.</td></tr>
</table>

Reactivo 2

1. ¿Cuántas banderas de 3 franjas pueden hacerse si se tiene tela de 4 colores diferentes (azul, blanco, rojo y verde) y se puede repetir un mismo color en franjas separadas?

   a) $4 \times 3 \times 1$.

   b) $4 \times 3 \times 2$.

   c) $4 \times 3 \times 3$.

   d) $4 \times 3 \times 4$.

La respuesta es el inciso c).

1'. En un restaurante una persona puede elegir entre 2 sopas, 4 guisados y 3 postres. ¿De cuántas formas diferentes puede elegir su menú?

   a) 9.

   b) 12.

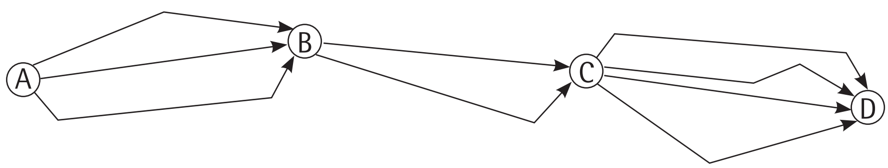
   c) 18.

   d) 24.

La respuesta es el inciso d).
Se puede obtener: $2 \times 4 \times 3 = 24$.

Reactivo 3

1. ¿De cuántas formas diferentes se puede ir de la ciudad A a la ciudad D, pasando por las ciudades B y C? (sin que haya retrocesos).



La respuesta es de 24 formas diferentes.

Comentario: los alumnos pueden enumerar los caminos y hacer un diagrama de árbol, lista, arreglo o aplicar la regla del producto $3 \times 2 \times 4$, y obtener las 24 formas diferentes en que se puede ir de A a D.

1'. En un restaurante, una persona puede escoger entre 2 sopas, 4 guisados y 3 postres. Se ha pensado ofrecer más combinaciones de menú agregando un platillo. Para que el número de combinaciones sea el mayor posible, ¿qué conviene aumentar? (un menú se forma con una sopa, un guisado y un postre).

   a) El número de sopas.

   b) El número de guisados.

   c) El número de postres.

   d) Cualquiera de los 3.

La respuesta es el inciso a).

Comentario: la operación sería $3 \times 4 \times 3$ y se obtendrían 36 combinaciones diferentes.

PROPUESTA DE EXAMEN BIMESTRAL BLOQUE 2

SECUENCIA 9. PROBLEMAS ADITIVOS DE NÚMEROS FRACCIONARIOS Y DECIMALES

Reactivo 1

La respuesta es el inciso b).

1. ¿Cuál es el resultado de la operación $\frac{5}{3} + \frac{4}{6} - \frac{3}{2}$? Subráyalo.
   a) $\frac{6}{36}$.
   b) $\frac{5}{6}$.
   c) $\frac{6}{7}$.
   d) $\frac{12}{11}$.

La respuesta es el inciso b).

1'. ¿Cuál es el resultado de la operación $\frac{12}{5} + \frac{2}{4} - \frac{3}{2}$? Subráyalo.
   a) $\frac{3}{12}$.
   b) $\frac{7}{5}$.
   c) $\frac{17}{11}$.
   d) $\frac{58}{20}$.

Reactivo 2

La respuesta es el inciso d).

2. ¿Cuál es el denominador que se debe utilizar para realizar la siguiente adición: $\frac{3}{12} + \frac{4}{8} + \frac{1}{4}$? Subráyalo.
   a) 4.
   b) 8.
   c) 12.
   d) 24.

La respuesta es el inciso d).

2'. ¿Cuál es el denominador que conviene utilizar para realizar la siguiente adición: $\frac{3}{6} + \frac{5}{8} + \frac{2}{3}$? Subráyalo.
   a) 3
   b) 6
   c) 18
   d) 24

Reactivo 3

La respuesta es $3\frac{1}{8}$ m.

3. De una pieza de listón de $5\frac{1}{4}$ m se cortó un trozo de $2\frac{1}{8}$ m, ¿cuánto mide el trozo de listón sobrante?

La respuesta es el inciso $8\frac{5}{8}$ ℓ.

3'. Un recipiente tenía $3\frac{1}{8}$ ℓ de agua y se le agregaron $5\frac{1}{2}$ ℓ de agua, ¿qué cantidad de agua tiene ahora el recipiente?

Reactivo 4

4. ¿Cuál es la forma correcta de acomodar las cantidades para sumar 5.82 + 2.1 + 135.218? Subráyala.

La respuesta es el inciso d).

a)	b)	c)	d)
5.82 + 2.1 135.128	5.82 + 2.1 135.128	5.82 + 2.1 135.128	5.82 + 2.1 35.128

4'. ¿Cuál es la forma correcta de acomodar las cantidades para restar 2.51 de 4.3? Subráyala.

La respuesta es el inciso a).

a)	b)	c)	d)
– 4.3 2.51	– 2.51 4.3	– 4.3 2.51	– 2.51 4.3

Reactivo 5

5. ¿Cuál es el número que completa correctamente la siguiente suma: ☐ + 32.14 = 53.48? Subráyalo.

La respuesta es el inciso c).

a) 11.34.

b) 20.62.

c) 21.34.

d) 85.62.

5'. ¿Cuál es el número que completa correctamente la siguiente resta: ☐ – 3.4 = 2.5? Subráyalo.

La respuesta es el inciso d).

a) 0.9.

b) 1.1.

c) 5.1.

d) 5.9.

Reactivo 6

6. Un triángulo isósceles tiene perímetro de 21.1 cm y tiene un lado desigual que mide 5.6 cm. ¿Cuánto mide cada uno de los otros lados?

La respuesta es 7.75 cm.

Comentario: Se espera que los estudiantes resuelvan este problema mediante métodos aritméticos, pues aún no han estudiado resolución de ecuaciones.

6'. Una habitación de forma rectangular tiene perímetro de 17.3 m y mide 3.9 m de ancho. ¿Cuánto mide su largo?

La respuesta es 4.75 m.

Comentario: Se espera que los estudiantes resuelvan este problema mediante métodos aritméticos, pues aún no han estudiado resolución de ecuaciones.

SECUENCIA 10. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

Reactivo 1

La respuesta es el inciso c).

1. Resultado de la operación $\frac{3}{4} \times 2$.

a) $\frac{3}{8}$.
b) $\frac{6}{8}$.
c) $\frac{6}{4}$.
d) $\frac{9}{4}$.

La respuesta es el inciso c).

1'. Resultado de la operación $3 \times \frac{3}{4}$.

a) $\frac{3}{12}$.
b) $\frac{6}{4}$.
c) $\frac{9}{4}$.
d) 3.

Reactivo 2

La respuesta es el inciso a).

1'. Resultado de la operación $\frac{2}{4} \div \frac{3}{2}$.

a) $\frac{4}{12}$.
b) $\frac{9}{16}$.
c) $\frac{6}{8}$.
d) $\frac{12}{4}$.

La respuesta es el inciso c).

2'. Resultado de la operación $\frac{5}{9} \div \frac{2}{3}$.

a) $\frac{3}{6}$.
b) $\frac{10}{27}$.
c) $\frac{15}{18}$.
d) $\frac{10}{9}$.

Reactivo 3

3. El número 5 se multiplicó por una fracción y se obtuvo un resultado menor que 5. ¿Por cuál de las siguientes fracciones se multiplicó?

La respuesta es el inciso a).

a) $\frac{14}{15}$.
b) $\frac{6}{5}$.
c) $\frac{3}{2}$.
d) $\frac{5}{3}$.

3'. El número 20 se multiplicó por una fracción y se obtuvo un resultado mayor que 20. ¿Por cuál de las siguientes fracciones se multiplicó?

a) $\frac{6}{7}$.

b) $\frac{9}{10}$.

c) $\frac{14}{15}$.

d) $\frac{3}{2}$.

La respuesta es el inciso d).

Reactivo 4

4. Relaciona las siguientes columnas escogiendo entre las fracciones de la columna derecha el resultado de las operaciones que se indican en la columna izquierda. Puedes repetir las letras de los incisos.

( ) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{10} =$	
( ) $\frac{4}{3} \div \frac{1}{10} =$	A) $\frac{4}{30}$
( ) $\frac{3}{4} \div 10 =$	B) $\frac{40}{30}$
( ) $\frac{4}{3} \times \frac{1}{10} =$	C) $\frac{3}{40}$
( ) $\frac{4}{3} \div 10 =$	D) $\frac{30}{4}$
( ) $\frac{3}{4} \times 10 =$	E) $\frac{40}{3}$
( ) $\frac{4}{3} \times 10 =$	
( ) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{10} =$	

Las respuestas en orden:
C, E, C, A, A, D, E, D.

4'. Relaciona las siguientes columnas escogiendo entre las fracciones de la columna derecha el resultado de las operaciones que se indican en la columna izquierda. Puedes repetir las letras de los incisos.

( ) $\frac{3}{2} \times 8 =$	
( ) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{8} =$	A) $\frac{16}{3}$
( ) $\frac{3}{2} \div 8 =$	B) $\frac{2}{24}$
( ) $\frac{3}{2} \times \frac{1}{8} =$	C) $\frac{3}{16}$
( ) $\frac{2}{3} \div 8 =$	D) $\frac{24}{16}$
( ) $\frac{2}{3} \times 8 =$	E) $\frac{24}{2}$
( ) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{8} =$	
( ) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{8} =$	

Las respuestas en orden:
E, A, C, C, B, A, E, B.

Reactivo 5

La respuesta es $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

5. En las tres quintas partes de una plaza ha sido instalada una feria. De este espacio, dos terceras partes corresponderán al área de juegos mecánicos. ¿Qué parte de la plaza representa el área de juegos mecánicos?

La respuesta es $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$.

5'. Media barra de chocolate se quiere repartir en partes iguales entre tres amigos, ¿qué cantidad de chocolate le corresponde a cada amigo?

SECUENCIA 11. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Reactivo 1

La respuesta es el inciso d).

1. ¿Cuál de las opciones es la operación equivalente a multiplicar por 0.25?

a) Multiplicar por 25.

b) Multiplicar por 4.

c) Dividir entre 25.

d) Dividir entre 4.

La respuesta es el inciso c).

1'. ¿Cuál de las opciones es la operación equivalente a multiplicar por 0.2?

a) Multiplicar por 5.

b) Multiplicar por 2.

c) Dividir entre 5.

d) Dividir entre 2.

Reactivo 2

Las respuesta son:

a) 125.28.

b) 0.024.

2. Resuelve estas operaciones

a) 17.4×7.2.

b) 0.3×0.08.

Las respuesta son:

a) 47.12.

b) 0.021.

2'. Resuelve estas operaciones

a) 15.2×3.1.

b) 0.07×0.3.

Reactivo 3

La respuesta es el inciso d).

3. Lety va a hacer una copia de un dibujo, pero quiere que el tamaño de la copia sea mayor que el dibujo original, ¿cuál de los siguientes factores de escala puede utilizar?

a) $\times$ 0.5.

b) $\times$ 1.

c) $\times$ 0.1.

d) $\times$ 2.5.

3'. Martín quiere hacer un plano de su casa, ¿cuál de los siguientes factores de escala tendrá que aplicar para que el plano quede menor que el tamaño real?

a) × 2.

b) × 0.001.

c) × 1.5.

d) × 1.125.

La respuesta es el inciso b).

Reactivo 4

4. ¿Cuál es el área de un terreno rectangular cuyas dimensiones son 17.8 m de ancho y 20 m de largo? ______

La respuesta es 356 m^2.

4'. En una ciudad, el costo por viaje en autobús es de \$5.50; si para ir a la escuela, José viaja dos veces al día en autobús durante 5 días de la semana, ¿cuánto gasta en pasajes en la semana? ______

La respuesta es el inciso \$55.

SECUENCIA 12. MEDIATRIZ Y BISECTRIZ

Reactivo 1

1. ¿Cuál de las opciones se refiere a la mediatriz de un segmento? Subráyala.

a) La perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

b) La perpendicular al segmento que pasa por uno de sus extremos.

c) Cualquier recta que pasa por el punto medio del segmento.

d) Cualquier recta que pasa por uno de los extremos del segmento.

La respuesta es el inciso a).

1'. Completa:

La bisectriz de un ángulo es ______

Posibles respuestas:

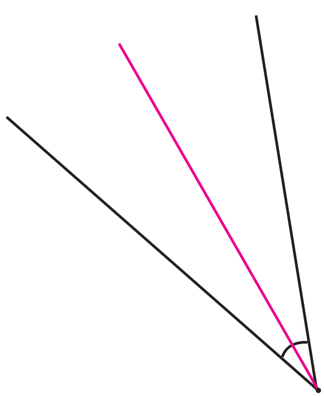
1. La semirrecta que pasa por el vértice y determina dos ángulos iguales.
2. El eje de simetría del ángulo.
3. El conjunto de puntos que equidistan de los lados del ángulo.

También:

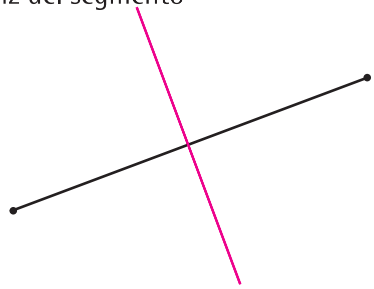
4. La recta que divide al ángulo en dos partes iguales.

Reactivo 2

2. Traza la bisectriz del siguiente ángulo



2'. Traza la mediatriz del segmento



Reactivo 3

Inciso b).

Comentario: se espera que los estudiantes hagan "bosquejos" de las figuras, sus ejes de simetría y sus mediatrices.

3. ¿En cuál de las siguientes figuras sus ejes de simetría son mediatrices de los lados que atraviesan?

a) Rombo.

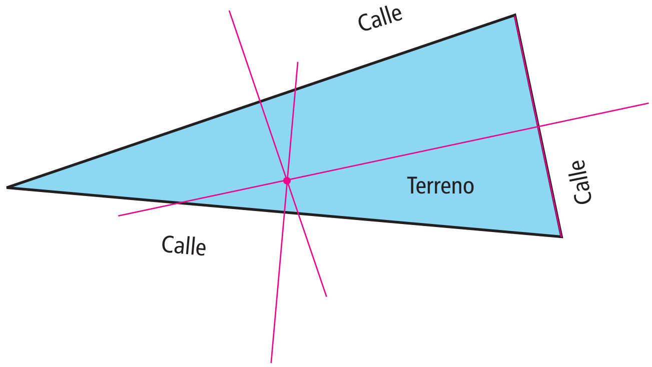
b) Rectángulo.

c) Romboide.

d) Trapezoide.

Comentario: hay que trazar las mediatrices de los lados del triángulo. El punto buscado es el punto en el que se intersectan las mediatrices.

3'. El triángulo representa un terreno rodeado por tres calles, los lados del triángulo. El dueño del terreno desea construir la casa a la misma distancia de las tres calles. Señala con un punto el lugar donde puede construirla.



SECUENCIA 13. POLÍGONOS REGULARES

Reactivo 1

Comentario: lo importante es que sigan el procedimiento, deben trazar primero una circunferencia y dividirla en 5 o en 6 partes para trazar las figuras.

1. Construye un pentágono regular de cualquier tamaño.

1'. Construye un hexágono regular de cualquier tamaño.

Reactivo 2

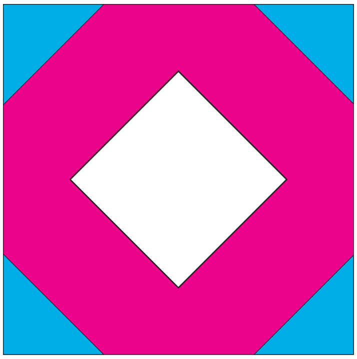
Comentario: primero deben trazar un segmento de 4 cm de lado, a partir de ese segmento deben de trazar otros segmentos eligiendo los ángulos correctamente.

2. Construye un hexágono regular cuyo lado mida 4 cm.

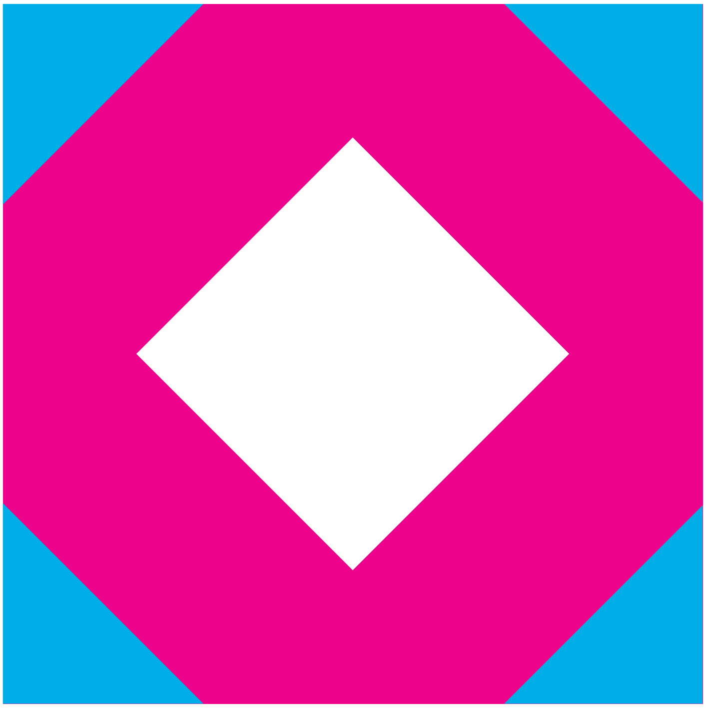
2'. Construye un pentágono regular cuyo lado mida 4 cm.

Reactivo 3

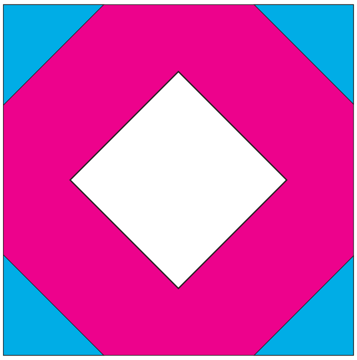
3. Reproduce a escala **2** a**1** el siguiente mosaico:



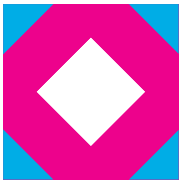
SOLUCIÓN:



3'. Reproduce a escala 1 a 2 el siguiente mosaico:



SOLUCIÓN:



Reactivo 4

La respuesta es el inciso d).

4. Para construir un polígono regular, Lety trazó una circunferencia y dentro trazó ángulos centrales de 45º. ¿Qué polígono regular va a trazar?

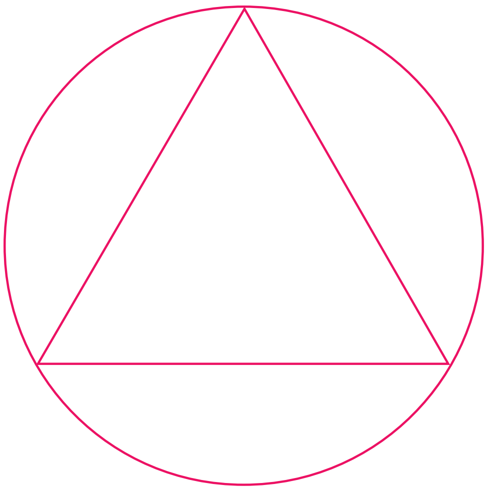
a) Triángulo equilátero.

b) Pentágono regular.

c) Heptágono regular.

d) Octágono regular.

4'. En la ilustración se ha trazado un triángulo equilátero inscrito dentro de una circunferencia.



La respuesta es el inciso b).

Si trazas los ejes de simetría del triángulo y los prolongas hasta cortar la circunferencia, ¿qué polígono regular se forma?

a) Pentágono regular.

b) Hexágono regular.

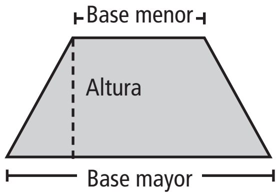
c) Octágono regular.

d) Decágono regular.

SECUENCIA 14. FÓRMULAS PARA CALCULAR EL ÁREA DE POLÍGONOS

Reactivo 1

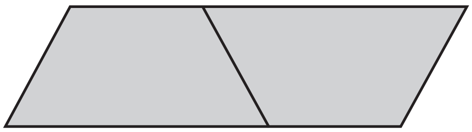
1. La fórmula para calcular el área del trapecio es $\frac{(\text{base mayor}+\text{ base menor}) \times \text{altura}}{2}$



¿Cuál de las siguientes figuras es un auxiliar para justificar esta fórmula?

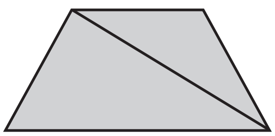
La respuesta es el inciso a).

a)

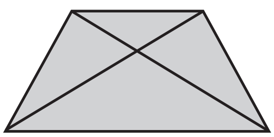


b)

c)

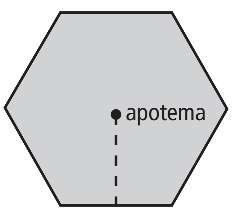


d)



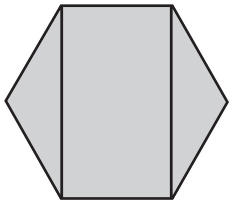
1'. La fórmula para calcular el área de un polígono regular es $\frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$.

La respuesta es el inciso c).

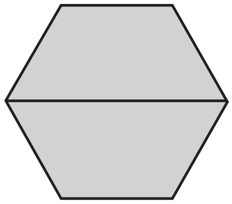


¿Cuál división de este polígono es un auxiliar para justificar esta fórmula?

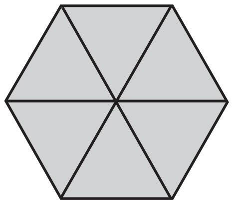
a)



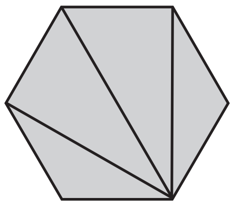
b)



c)



d)

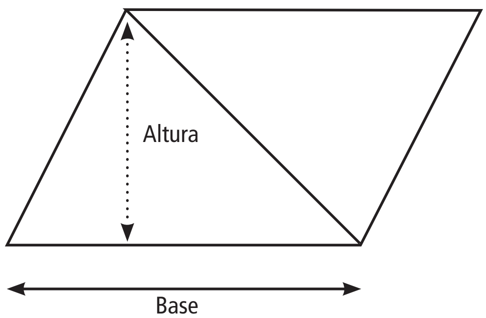


Reactivo 2

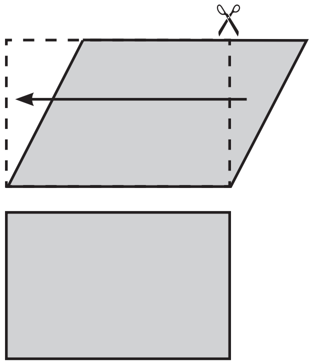
2. A partir de la figura completa la siguiente justificación para la fórmula del área del triángulo.

El triángulo es la mitad del ______________________ *; si el área del* ______________ *se calcula multiplicando* ______________ *por* ______________________________ *, entonces el área del triángulo se calcula* ______________________________

El triángulo es la mitad del romboide, si el área del romboide se calcula multiplicando base por altura, entonces el área del triángulo se calcula base por altura entre dos.



2'. A partir de la figura, completa la siguiente justificación para la fórmula del área del romboide.



Un romboide puede transformarse en un ______________________ *;*

como el área del rectángulo se calcula multiplicando ______________

______________________ *por* ______________________________ *,*

entonces, el área del romboide es ______________________________

Un romboide puede transformarse en un rectángulo; como el área del rectángulo se calcula multiplicando base por altura, entonces el área del romboide es base por altura.

SECUENCIA 15. LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD

Reactivo 1

1. Pedro es carpintero y va a hacer un dibujo a escala de un mueble. La escala a la que va a hacer su dibujo es 2 cm a 30 cm.

a) Completa la tabla para encontrar algunas de las medidas que tendrá el dibujo del mueble.

	Medida real (en cm)	Medida en el dibujo (en cm)
Largo del mueble	150	10
Ancho del mueble	120	
Altura del mueble	90	
Largo de los cajones	45	
Ancho de los cajones	15	

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que nos permite encontrar las medidas del dibujo a partir de las medidas reales? ______________

c) ¿Cuántas veces más chicas son las medidas del dibujo que las medidas reales del mueble? ______________________________

Las respuestas son:

a) 8, 6, 3, 1

b) $\frac{1}{15}$ cm por cada cm.

c) Son 15 veces más chicas.

Las respuestas son:

a) Tabla: 498, 249, 83.

b) 83 kilómetros por cada hora.

c) 21 horas.

1'. Un automóvil hace un viaje de la ciudad de México a la Ciudad de Torreón en un tiempo de 12 horas. Entre estas dos ciudades hay 996 km de distancia. Supón que el automóvil va siempre a velocidad constante:

a) Completa la siguiente tabla para encontrar la velocidad a la que fue el automóvil.

Tiempo de viaje de automóvil (horas)	Distancia recorrida (kilómetros)
12	996
6	
3	
1	

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que nos permite encontrar la distancia recorrida a partir del tiempo de viaje? __________

c) Si el automóvil va a hacer otro viaje de la ciudad de Torreón a la ciudad de Mexicali a la misma velocidad, ¿cuántas horas tardará en realizar este viaje si sabemos que entre las ciudades de Torreón y Mexicali hay 1 743 km?

Reactivo 2

Las respuestas son:

Tabla: 90, 18.

Constante de la TABLA:
18 kilómetros por litro.

2. Completa la tabla y encuentra la constante de proporcionalidad:

Gasolina consumida por un automóvil (ℓ)	Distancia recorrida por el automóvil (km)
25	450
5	
1	

Constante __________

Las respuestas son:

Tabla: 550, 50.

Constante de la TABLA:
50 metros por cada centímetro.

2'. Completa la tabla y encuentra la constante de proporcionalidad

Medidas de un dibujo hecho a escala (cm)	Medidas reales (m)
22	1 100
11	
1	

Constante __________

SECUENCIA 16. APLICACIÓN SUCESIVA DE CONSTANTES DE PROPORCIONALIDAD

Reactivo 1

1. Una fotografía se reduce con una escala de **1** a **2**, es decir, tanto el ancho como el largo de la fotografía se reducen a la mitad. En seguida se reduce nuevamente con una escala de **1** a **4**.

Si las medidas de la fotografía original son de 24 centímetros de largo por 16 centímetros de ancho:

a) ¿Cuánto mide el largo de la fotografía al hacerle las dos reducciones?

____

b) ¿Cuánto mide el ancho de la fotografía al hacerle las dos reducciones?

____

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar directamente de las medidas originales de la fotografía a las medidas de la reducción final?

____

Las respuestas son:

a) 3 cm de largo.

b) 2 cm de ancho.

c) $\frac{1}{8}$ cm por cada cm.

1'. Una fotografía se amplía con una escala de **3** a **1**, es decir, tanto el largo como el ancho aumentan seis veces su tamaño. En seguida se reduce con una escala de **1** a **6**.

Si la fotografía mide 12 centímetros de largo por 10 centímetros de ancho:

a) ¿Cuál es la medida del largo de la fotografía después de haber hecho la ampliación y la reducción? _______________

b) ¿Cuál es la medida del ancho de la fotografía después de haber hecho la ampliación y la reducción? _______________

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar directamente de las medidas originales de la fotografía a las medidas finales?

____

Las respuestas son:

a) 6 cm de largo.

b) 5 cm de ancho.

c) $\frac{1}{2}$ cm por cada cm.

III. Reúnan los resultados que obtuvieron en su equipo con los de los demás equipos y completen la tabla.

Equipo	Número de veces que se obtuvo una tarjeta con un número par	Número total de extracciones
Total		

a) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener una tarjeta con un número par en su equipo? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener una tarjeta con un número par en su grupo? ______

c) Ahora, comparen esta probabilidad con la probabilidad clásica de este evento. ¿Se aproxima la probabilidad frecuencial de este evento a la probabilidad clásica? ______

d) ¿Cuál de las dos probabilidades frecuenciales, la que obtuvo su equipo o la del grupo, es más cercana a la de la probabilidad clásica? ______

IV. Consideren que la urna tiene 20 tarjetas numeradas del 1 al 20 y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener una tarjeta con un número mayor que 0? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener una tarjeta con un número mayor que 10? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener una tarjeta con un número par? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener una tarjeta con un número mayor que 20? ______

Respuestas.

a) Es 1, un evento seguro.

b) $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

d) 0, es un resultado imposible.

e) No, un resultado favorable debe “caber” en el número de resultados posibles.

2

Sugerencia didáctica. Lean esta información. Después revisen sus respuestas a los números II y III del apartado *Manos a la obra* y aclaren dudas.

Respuestas.

a) Clásica, no se realiza el experimento.

b) Frecuencial, sí se lleva a cabo el experimento.

c) Clásica, no se llevó a cabo.

e) ¿Se podría dar el caso de que el número de resultados favorables sea mayor que el número de resultados posibles? ______

>>> A lo que llegamos

La probabilidad clásica es diferente de la probabilidad frecuencial. Para obtener la probabilidad clásica se consideran las condiciones del experimento.

Por ejemplo, en una urna hay veinte tarjetas numeradas del 1 al 20 y se quiere elegir una tarjeta con número impar, entonces la probabilidad clásica es $\frac{1}{2}$; y la probabilidad frecuencial se calcula a partir de los resultados que se obtienen al efectuar el experimento.

En este caso, si se realizó el experimento 100 veces y 38 veces se sacó una tarjeta con número impar, la probabilidad frecuencial de este evento es:

$$P\text{ (sacar número impar)} = \frac{38}{100} = 0.38 = 38\%$$

Después de realizar muchos experimentos, la probabilidad frecuencial de un evento se parece a la probabilidad clásica.

Tanto la probabilidad clásica como la frecuencial se pueden expresar utilizando fracciones, decimales y porcentaje.

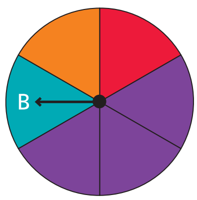
>>> Lo que aprendimos

1. Indiquen en cada caso si se trata de probabilidad frecuencial o probabilidad clásica:

a) Una bolsa contiene 5 canicas rojas y 7 azules. La probabilidad de sacar una canica roja es $\frac{5}{12}$. ______

b) Se les hace una encuesta a 600 personas para conocer qué bebida prefieren tomar para acompañar su comida; se sabe que 450 prefieren refresco. Se determina que la probabilidad del evento es $\frac{450}{600}$. ______

c) En una feria hay una ruleta como la siguiente:



La probabilidad de caer en el área B es ______

2. En un restaurante hay una rockola que tiene 40 diferentes melodías, las cuales están clasificadas y distribuidas equitativamente en cuatro diferentes tipos de música:

a) Grupera b) Rock c) Cumbia d) Balada

a) Calculen la probabilidad clásica de que sea seleccionada una melodía de rock.

$$P\text{ (rock)} = \frac{\text{opciones de elegir música rock}}{\text{total de opciones de elegir una melodía}}$$

En la siguiente tabla se muestra la preferencia con la cual se han seleccionado las melodías a partir del tipo de música al que pertenece.

Tipo de música	Grupera	Rock	Cumbia	Balada
Núm. de veces que se tocó	15	24	11	30
			Total	80

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de seleccionar una melodía de música grupera?

$$P\text{ (grupera)} = \frac{\text{veces que se tocó música grupera}}{\text{número total de melodías que se tocaron}}$$

c) Comparen la probabilidad clásica de que sea seleccionada una melodía que pertenece al género de la música grupera y la probabilidad frecuencial del mismo evento.

¿Son iguales? ______________ ¿Cuál es mayor? ______________

d) Calculen las probabilidades que se indican:

Tipo de música	Probabilidad clásica	Probabilidad frecuencial
Cumbia	P (cumbia) = $\frac{10}{40}$	P (cumbia) = $\frac{11}{80}$
Rock	P (rock) = $\frac{10}{40}$	P (rock) = $\frac{24}{80}$
Balada	P (balada) = $\frac{10}{40}$	P (balada) = $\frac{30}{80}$
Grupera	P (grupera) = $\frac{10}{40}$	P (grupera) = $\frac{15}{80}$

Propósito de la actividad. A diferencia de los anteriores, este experimento no es aleatorio porque no depende del azar sino de la preferencia de cada persona. Por ello, aunque muchas personas elijan en la rockola su música favorita, la probabilidad frecuencial no necesariamente tenderá a la clásica, que en este caso es $\frac{10}{40}$ o $\frac{1}{4}$.

En esta actividad la intención es que el alumno identifique situaciones relacionadas con la preferencia (de música, candidatos, deportes, etc.) y la probabilidad; es decir, introducir la probabilidad y la estadística de un modo experimental, además de confrontar creencias personales o de carácter determinista con la importancia y utilidad de la estadística para la toma de decisiones con una base racional y objetiva.

Respuestas.

a) Como están distribuidas equitativamente es $\frac{10}{40}$.

b) $\frac{15}{40}$

c) No son iguales. Es mayor la probabilidad clásica ($\frac{10}{40} > \frac{15}{80}$).

Propósito de la sesión. Calcular las probabilidades de diversos eventos y distinguir entre ellos cuál es más probable que ocurra, cuál es menos probable y cuáles tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Organización del grupo. Se sugieren actividades individuales, en parejas y en equipos.

Sugerencia didáctica. Si no tienen a la mano canicas pueden sustituirlas por papeles de colores o blancos con el nombre del color escrito.

3

Propósito de las preguntas. Es muy importante que los alumnos contesten las preguntas antes de realizar el experimento. Se pretende que al responderlas hagan uso de lo que han aprendido sobre la probabilidad clásica, sin embargo, puede ser que en un primer momento no se den cuenta de que es igualmente probable obtener una canica roja en la bolsa 1 y en la 3.

Respuestas.

En la bolsa 1 la probabilidad es $\frac{1}{2}$, y en la 3 es $\frac{2}{4}$, es decir, de ambas es igualmente probable extraer una canica roja.

Es mejor elegir la bolsa 2 porque ahí la probabilidad es $\frac{2}{3}$ y es mayor que en cualquiera de los otros casos.

SECUENCIA 24

SESIÓN 4

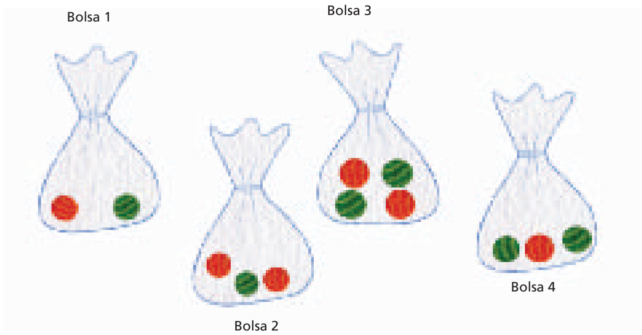
COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES II

>>> Para empezar

Cuando has participado en un juego de azar, ¿alguna vez te ha tocado elegir las reglas que rigen el juego? En esta sesión calcularás las probabilidades de diversos eventos y distinguirás cuál es más probable que ocurra, cuál es menos probable y cuáles tienen la misma probabilidad de ocurrir.

>>> Consideremos lo siguiente

Para realizar el siguiente juego se necesitan 4 bolsas no transparentes, 6 canicas rojas y 6 canicas verdes. Hay que distribuir las canicas en las cuatro bolsas como se indica en la figura.



El juego se realiza de la siguiente manera: cada integrante elige una de las cuatro bolsas y extrae, sin mirar, una canica; anota el color que sale. Después regresa la canica a la bolsa y repite hasta tener 20 extracciones. Gana quien haya sacado más veces una canica roja de la bolsa que eligió. Antes de empezar a jugar contesten:

¿Qué creen que sea más probable, extraer una canica roja de la bolsa 1 o de la bolsa 3?

____

¿Qué bolsas elegirían? ______________________________

¿Por qué? ______________________________

Comparen sus respuestas.

98

>>> Manos a la obra

I. Realicen el juego. Usen el siguiente casillero para anotar la letra **r** si sale roja y la **v** si sale verde. Repitan el experimento 20 veces para llenar los casilleros. Recuerden, gana quien haya sacado más veces una canica roja.

Bolsa núm.__________ Resultado en cada extracción																			
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª	17ª	18ª	19ª	20ª

a) Utilicen la siguiente tabla para registrar los resultados que obtuvieron al realizar este juego.

Resultados de 20 extracciones en la bolsa __________		
Color de la canica	**Frecuencia Número de veces que sale una canica**	**Probabilidad frecuencial**
 **Roja (r)**		**P (r) =** ________________
 **Verde (v)**		**P (v) =** ________________

b) Analicen los resultados obtenidos por todos los integrantes de su equipo. ¿Quién ganó?____

c) ¿Qué número de bolsa utilizó?______________________________

d) ¿Cuál es la **probabilidad frecuencial** de sacar una canica roja en esa bolsa?
____

e) Consideren los resultados del equipo, ¿qué color de canica salió más veces?
____

II. Reúnan los resultados del grupo en la siguiente tabla y después marquen con "**X**" si es verdadero (**V**) o falso (**F**) en el cuadrito correspondiente.

99

Total de canicas de color rojo					
Equipo		Bolsa 1	Bolsa 2	Bolsa 3	Bolsa 4
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
Total de canicas de color rojo (Frecuencia)					
Probabilidad frecuencial de sacar una canica roja	Fracción				
	Decimal				
	%				

Sugerencia didáctica. Para responder estos incisos los alumnos deben considerar los resultados de los experimentos que reunieron en la tabla anterior. Cuando hayan terminado, anote en el pizarrón los incisos y contéstenlos considerando ahora la probabilidad clásica. Comparen ambas respuestas y comenten sus diferencias y coincidencias (si las hubo).

Respuestas. Considerando la probabilidad clásica:

a) F, en la 2 la probabilidad es $\frac{2}{3}$, mientras que en la 1 es $\frac{1}{2}$.

b) V, en la 1 la probabilidad es $\frac{1}{2}$ y en la 4 es $\frac{1}{3}$.

c) V, porque $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$.

d) F, son igualmente probables.

e) V, porque $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$.

	V	F
a) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 1 que de la bolsa 2.		
b) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 1 que de la bolsa 4.		
c) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 2 que de la bolsa 4.		
d) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 1 que de la bolsa 3.		
e) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 2 que de la bolsa 3.		

III. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad clásica de sacar una canica roja de cada bolsa?

Bolsa 1	P (sacar una canica roja) = $\frac{\text{número total de canicas rojas en la bolsa 1}}{\text{número de canicas en la bolsa 1}}$ =
Bolsa 2	P (sacar una canica roja) = $\frac{\text{número total de canicas rojas en la bolsa 2}}{\text{número de canicas en la bolsa 2}}$ =
Bolsa 3	P (sacar una canica roja) = $\frac{\text{número total de canicas rojas en la bolsa 3}}{\text{número de canicas en la bolsa 3}}$ =
Bolsa 4	P (sacar una canica roja) = $\frac{\text{número total de canicas rojas en la bolsa 4}}{\text{número de canicas en la bolsa 4}}$ =

b) De acuerdo con estos cálculos, para ganar el juego, ¿qué bolsa debes elegir?

____

c) ¿Por qué? ______________________________

d) Pregúntale a alguno de tus compañeros qué bolsa eligió. ____________

e) ¿En qué bolsas existe la misma probabilidad de sacar una canica roja? ____________

f) ¿Por qué? ______________________________

>>> A lo que llegamos

La comparación de probabilidades permite determinar cuál es la mejor opción que se puede elegir, ya sea en un juego o en otro tipo de situaciones. Así, por ejemplo, en el juego anterior podemos determinar la probabilidad clásica de sacar una canica roja de cada bolsa y elegir la bolsa que más nos convenga.

La probabilidad clásica proporciona una información de lo que puede suceder, mientras que la probabilidad frecuencial indica lo que sucedió al realizar el juego.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Claudia Gómez. *Una ventana a la incertidumbre*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre información para conocer otros juegos de azar consulta:
http://www.acanomas.com/Biblioteca.php [Fecha de consulta: 23 de agosto 2007].

Respuestas. La probabilidad clásica en cada bolsa es:

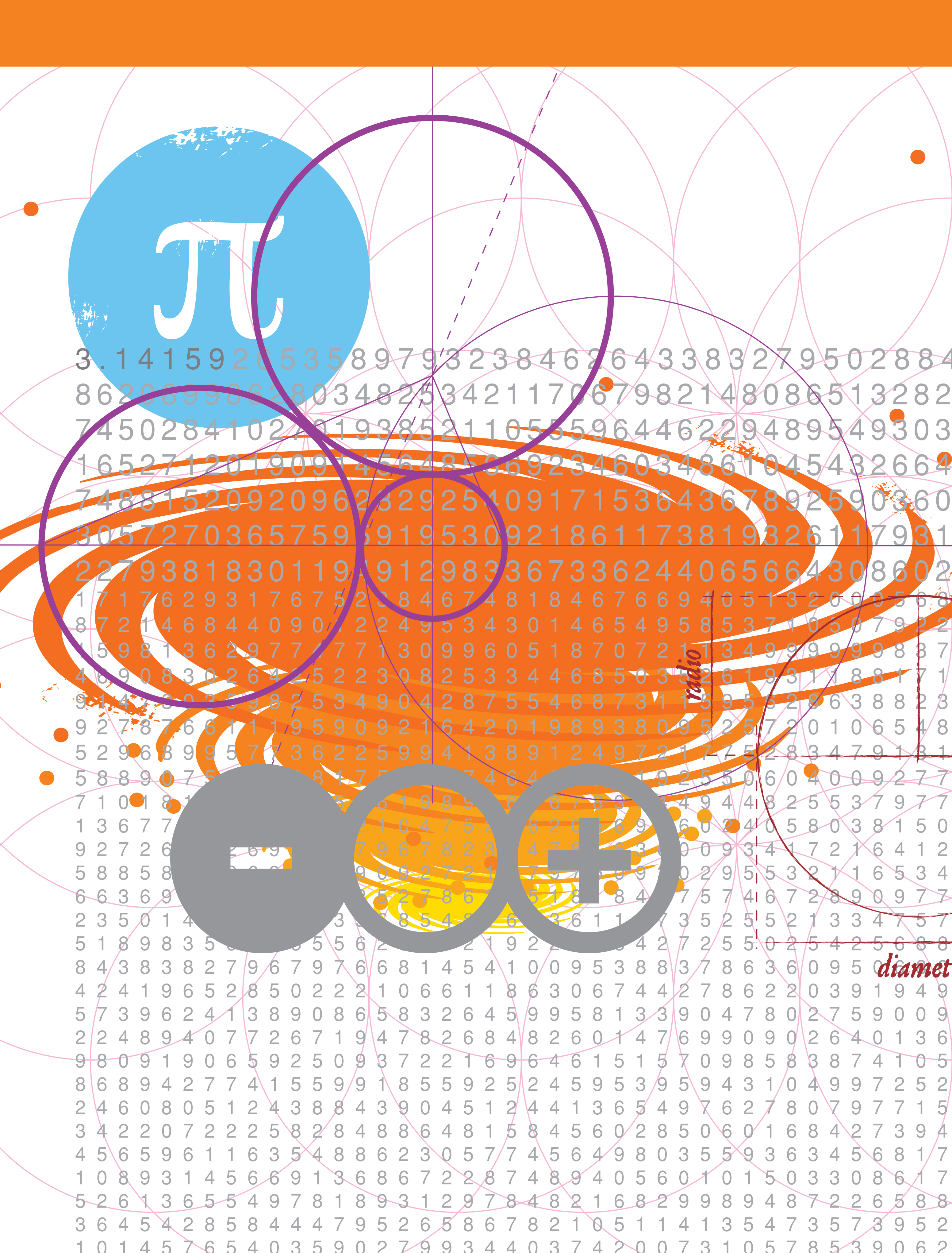
Bolsa 1 y bolsa 3: $\frac{1}{2}$

Bolsa 2: $\frac{2}{3}$

Bolsa 4: $\frac{1}{3}$

Sugerencia didáctica. Es posible que en la bolsa 3 algunos alumnos escriban $\frac{2}{4}$. Señale que, como $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes, la probabilidad en ambas bolsas es la misma.

Sugerencia didáctica. Cuando contesten estas preguntas, pida a los alumnos que revisen lo que respondieron en el apartado *Consideremos lo siguiente* y que corrijan si es necesario.


π
3.141592653589793238462643383279502884
radio
diamet

BLOQUE 4

Propósito de la sesión. Conocer e identificar los números con signo.

Organización del grupo. La sesión se trabaja en parejas, con algunos momentos de intercambio grupal.

1

Propósito de la actividad. La intención es que los alumnos empleen cualquier recurso que les parezca útil para comunicar las ubicaciones de los objetos. La dificultad radica en que hay objetos que están bajo el nivel del mar a la misma distancia de otros que están sobre el nivel del mar (por ejemplo, el buzo y la gaviota), por lo que escribir en el mensaje sólo el número no es suficiente para diferenciarlos. Los alumnos se verán en la necesidad de escribir alguna marca que logre diferenciar entre lo que se encuentra sobre el nivel del mar y lo que está bajo el mismo. Acepte cualquier tipo de mensaje que cumpla con las condiciones planteadas (no usar palabras, dibujos ni flechas), incluso aquellos en los que aparecieran los signos + y –, pero no los exija.

Sugerencia didáctica. Oriente la discusión hacia la comparación de los recursos empleados para comunicar la ubicación de los objetos. Aunque varios tipos de mensaje hayan podido ser interpretados correctamente, pregunte al grupo cuál les parece más claro, cuál podría crear confusiones y por qué.

SECUENCIA 25

Números con signo

En esta secuencia plantearás y resolverás problemas que impliquen la utilización de números con signo.

SESIÓN 1

NIVEL DEL MAR

>>> Para empezar

Existen situaciones donde además de utilizar los números naturales se requieren otros números, por ejemplo: al calcular los gastos y las ganancias de una tienda, en un termómetro ambiental, en la línea del tiempo, en metros sobre y bajo el nivel del mar, etcétera.

>>> Consideremos lo siguiente

Para jugar necesitan organizarse en parejas:

- Todos observen con cuidado la siguiente ilustración.
- Cada pareja escoge cuatro objetos de los que ahí aparecen.
- Cada pareja envía un mensaje por escrito a otra pareja indicando la ubicación de los cuatro objetos que eligieron. Pero hay una condición: en el mensaje NO SE VALE ESCRIBIR PALABRAS NI HACER DIBUJOS O FLECHAS.
- La pareja que recibe el mensaje debe interpretarlo para saber cuáles fueron los objetos que sus compañeros eligieron. Cuando los hayan encontrado, los anotan en el mensaje y lo regresan a la pareja que lo envió.
- Cuando terminen, revisen si la otra pareja interpretó correctamente. Si hubo equivocaciones, deben encontrar en dónde estuvo la falla y corregirla.

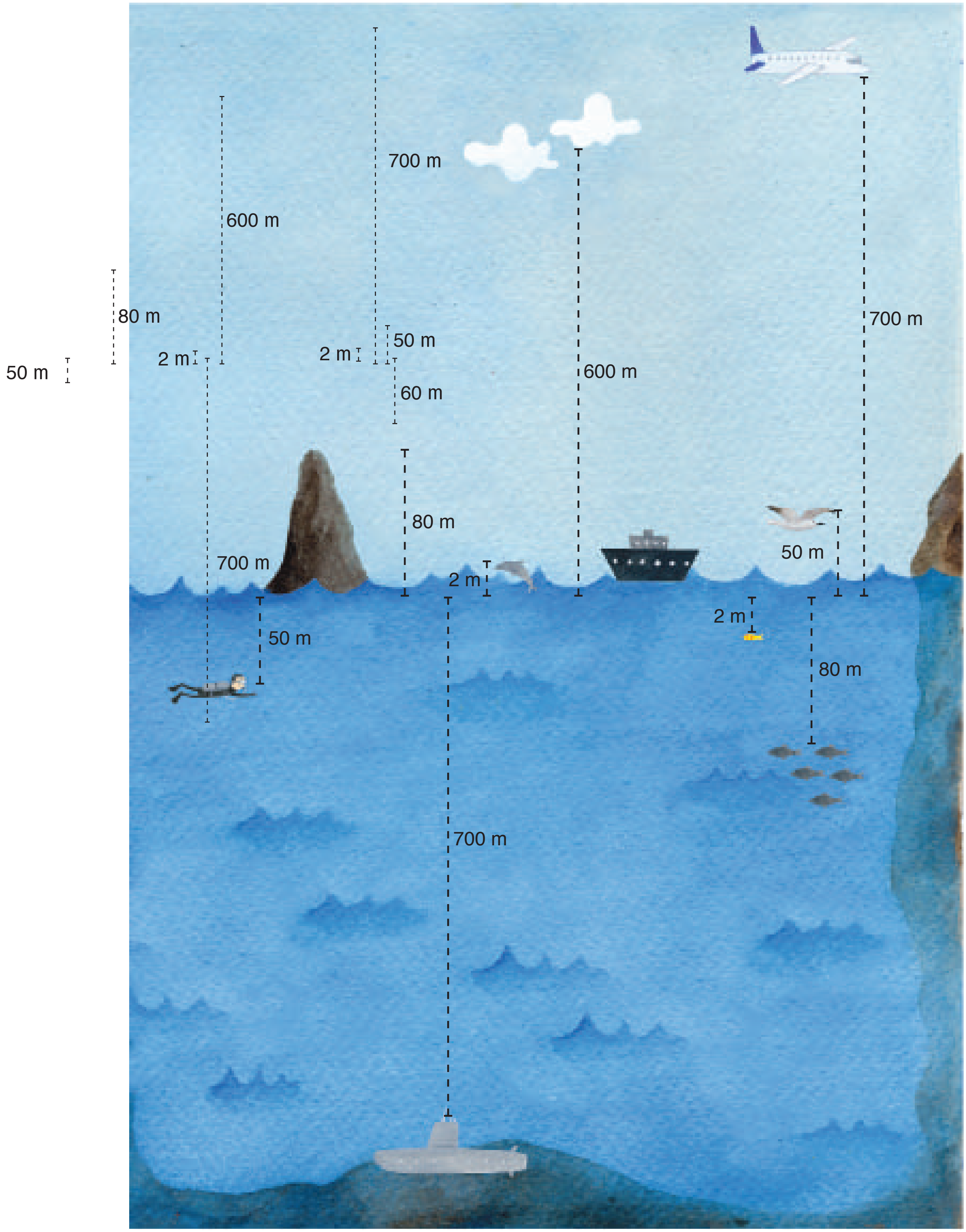
Anoten en el pizarrón las distintas maneras que utilizaron para identificar los objetos, decidan cuáles fueron las más adecuadas, o aquellas que les gustaron más, y escriban por qué.

104

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de los números.
Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos conocieron los números naturales, los fraccionarios y los decimales. En esta secuencia se introducen los números enteros, que por sus características permiten resolver problemas que no tendrían solución con los naturales.

Propósitos de la secuencia
Plantear y resolver problemas que impliquen la utilización de números con signo.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos	Vínculos
1	*Nivel del mar* Conocer e identificar los números con signo.		
2	*Distancia y orden* Obtener la distancia entre dos números con signo, ordenarlos y compararlos.	Video *Temperaturas ambientales* Interactivo "Temperaturas"	*Geografía de México y el mundo* Secuencia 4
3	*Valor absoluto y simétricos* Ubicar números con signo en la recta numérica, obtener su valor absoluto e identificar sus simétricos.		


700 m
600 m
80 m
2 m
50 m
2 m
50 m
60 m
600 m
700 m
80 m
700 m
2 m
50 m
50 m
2 m
80 m
700 m

Propósito de la actividad. Los alumnos utilizarán signos no convencionales para diferenciar entre lo que se encuentra sobre el nivel del mar y bajo éste.

Respuestas.

- Los que están sobre el nivel del mar con una carita.
- Los que están bajo el nivel del mar con dos asteriscos.
- El barco lo ubicó a 0 m, es decir, al nivel del mar.

>>> Manos a la obra

I. En otra telesecundaria, una de las parejas elaboró un mensaje que fue correctamente interpretado por otra pareja. Fíjense cómo hicieron:

Pareja que elaboró el mensaje. → | ← Pareja que recibió el mensaje.

Objetos que elegimos:	Creemos que es el:
☺ 700 m	Avión
☺ 600 m	Nubes
0 m	Barco
**2 m	Pez amarillo
**50 m	Buzo

a) Utilicen ese mismo sistema y completen la siguiente tabla.

Ubicación	Dibujo
	Gaviotas
☺ 80 m	
	Barco
☺ 2 m	
	Peces
**700 m	

b) El barco está ubicado al nivel del mar. También hay objetos sobre el nivel del mar (como las nubes) y bajo el nivel del mar (como el submarino).

- ¿Cómo representó esta pareja a los objetos que están ubicados sobre el nivel del mar? ______
- ¿Cómo representó esta pareja a los objetos que están ubicados bajo el nivel del mar? ______
- ¿A cuántos metros ubicaron el barco? ______

Comparen estos mensajes con los mensajes que ustedes elaboraron. ¿Cuáles le parecen más claros y por qué?

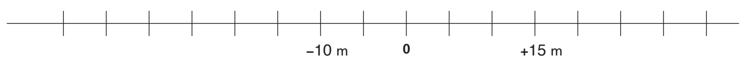
Como vieron, hay distintas maneras de comunicar la ubicación de los objetos, sin embargo, es posible que algunas personas no sepan qué es lo que se quiere decir en un mensaje. Por ello, en matemáticas se representa el nivel del mar con el cero, lo que está sobre el nivel del mar con signo positivo "+" y lo que está bajo el nivel del mar con signo negativo "– ".

II. Completen la siguiente tabla usando los signos + y –, según corresponda:

Objeto	Ubicación
Algas marinas a 20 m bajo el nivel del mar	– 20 m
Una lancha sobre el nivel del mar	
Un delfín que salta 5 m sobre el nivel del mar	
Un tiburón que nada a 5 m bajo el nivel del mar	
Una roca que sobresale 20 m sobre el nivel del mar	+ 20 m

III. En matemáticas se usa la recta numérica para ubicar a los números positivos, negativos y al cero. Primero, determinen el lugar del cero (como lo hicieron en la secuencia 2), después los números con signo + se ubican a la derecha del cero y los números con signo - se ubican a la izquierda del cero.

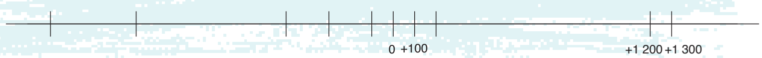
Localicen en la siguiente recta numérica los objetos que se mencionan en la tabla del inciso c). Fíjense que cada división vale 5 unidades.



>>> A lo que llegamos

Los números que has utilizado en esta sesión se llaman: números con signo. Pueden ser positivos o negativos, y para diferenciarlos se representan de la siguiente manera:

Números positivos: se ubican a la derecha del cero en la recta numérica y se escriben anteponiéndoles un signo +; por ejemplo, el 5 positivo se escribe +5.
En el caso de los objetos de la ilustración, los números positivos se utilizan para designar a todo lo que se encuentra arriba del nivel del mar.



107

2

Propósito de la actividad. Ahora se pretende que los alumnos empleen los signos convencionales (+ y –) para diferenciar entre lo que se encuentra sobre el nivel del mar y bajo éste.

Posibles dificultades. Anteriormente, los alumnos utilizaron los signos + y – para denotar una operación (la suma o la resta), y ahora adquieren otro significado que se añade al que ellos ya sabían. Cuando en esta secuencia se escribe +20 no significa que hay que hacer una suma, sino que el 20 es un número positivo (que está del lado derecho de la recta con respecto al 0, o en este ejemplo, que está sobre el nivel del mar).
Comente con los alumnos esta cuestión.

Respuestas.
Lancha 0 m.
Delfín +5 m.
Tiburón –5 m.

Propósito de la actividad. Los alumnos han trabajado hasta ahora con la recta numérica para ubicar números naturales, fracciones y decimales. En esta actividad, en la que la recta considera también los números negativos, se espera que utilicen lo que han aprendido con los naturales para ubicar estos nuevos números.

Sugerencia didáctica. Dibuje la recta en el pizarrón y pida a los alumnos que comenten cómo ubicaron los objetos. Haga notar que, a la derecha del cero están los números positivos, y que mientras más a la derecha se encuentre un número, será mayor. Los números negativos están a la izquierda del cero, y mientras más a la izquierda se encuentre un número, será menor. Por eso $-22 < -5$.

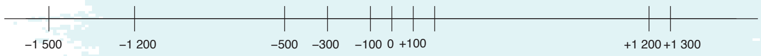
3

Sugerencia didáctica. Lean la información del recuadro en voz alta. Cuando terminen, pregunte a los alumnos si conocen algún otro caso en el que se utilicen los números con signo.
Comente con los alumnos que el signo + se pone para resaltar que el número es positivo y diferenciarlo de uno negativo, pero que dependiendo del contexto, los números positivos también se escriben sin el signo.

Propósito de la sesión. Obtener la distancia entre 2 números con signo, ordenarlos y compararlos.

Organización del grupo. Al igual que en la sesión anterior, el trabajo es en parejas, con espacios para comentarios grupales.

Números negativos: se ubican a la izquierda del cero en la recta numérica y se escriben anteponiéndoles un signo **–**, por ejemplo, el 7 negativo se escribe **–7**. En el caso de los objetos de la ilustración, los números negativos se utilizan para designar a todo lo que se encuentra por debajo del nivel del mar.



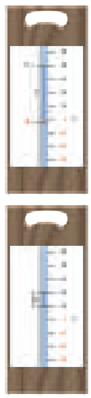
El **cero** se escribe sin signo (no se le pone + ni –). En la ilustración, todo lo que se encuentra en el nivel del mar se dice que está a 0 metros.

SESIÓN 2

DISTANCIA Y ORDEN

>>> Para empezar

Temperaturas ambientales



Los termómetros ambientales, como el de la ilustración, miden tanto temperaturas sobre cero o **temperaturas positivas,** como temperaturas bajo cero o **temperaturas negativas**. Las temperaturas bajo cero se distinguen porque se escriben anteponiéndoles el signo "–".

En la secuencia 4 **La Tierra: Un planeta con vida** de tu libro de *Geografía de México y del mundo, volumen I* estudiaste las diversas características que definen el clima, como la variación de la temperatura. En el desierto, la variación de la temperatura determina las condiciones climáticas extremas que lo caracterizan: en un mismo día puede haber temperaturas máximas de 40 °C y temperaturas mínimas de 2 °C. En este caso hay una variación de 38 °C.

En contraste, las zonas tropicales tienen variaciones de temperatura muy pequeñas: en promedio, las temperaturas máximas pueden ser de 20 °C y las mínimas de 10 °C. La variación de la temperatura es entonces de 10 °C, porque hay 10 grados entre 20 °C y 10 °C.

La variación de la temperatura es un factor que influye tanto en la conservación del equilibrio biológico como en la salud y el bienestar de los seres humanos. Grandes variaciones de temperatura pueden ocasionar la extinción de plantas y animales o la pérdida de las cosechas en el campo.

>>> Consideremos lo siguiente

El 4 de noviembre del 2005, el Servicio Meteorológico Nacional publicó un aviso de heladas que se esperaban en distintas ciudades para ese día.

Ciudad	Estado	Temperatura máxima (°C)	Temperatura mínima (°C)
Las Vigas de Ramírez	Puebla	26.5	1.0
El Saladillo	Zacatecas	22.0	-5.0
Tepatitlán	México	23.5	-4.0
Balcón del Diablo	Puebla	26.5	2.5

Tabla 1

Con estos datos, contesten las siguientes preguntas (si lo necesitan, se pueden auxiliar del termómetro de la derecha):

a) ¿De cuánto se esperaba la variación de temperatura en Las Vigas de Ramírez? ______

b) ¿De cuánto se esperaba la variación de temperatura en Tepatitlán? ______

c) ¿Cuál de las temperaturas máximas que se esperaban en Las Vigas de Ramírez y Tepatitlán es mayor? ______

d) ¿Cuál de las temperaturas mínimas que se esperaban en Tepatitlán y Las Vigas de Ramírez es menor? ______

Comparen sus resultados y comenten sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. En una escuela obtuvieron los siguientes resultados:

- En el equipo 1 dijeron que la variación que se esperaba en Tepatitlán es de 19.5 °C, porque 23.5 – 4 = 19.5.
- En el equipo 2 utilizaron el termómetro ambiental para localizar las temperaturas y dijeron que la variación es de 27.5 °C, porque es el número de grados que hay entre ambas temperaturas.

a) En el termómetro de la derecha ubiquen las temperaturas 23 °C y –4 °C.

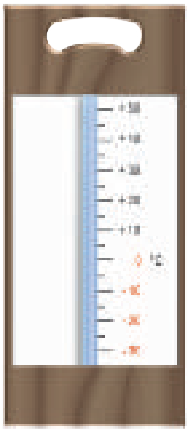
b) Cuenten los grados que hay de –4 °C a 0 °C. Hay ______ grados.

c) Cuenten los grados que hay de 0 °C a 23.5 °C. Hay ______ grados.

d) ¿Cuántos grados hay de –4 °C hasta 23.5 °C? ______

e) ¿De cuánto es la variación de temperatura que se esperaba en Tepatitlán? ______

f) ¿Cuál de los dos equipos obtuvo la variación correcta? ______



II. Usando el mismo termómetro, contesten las siguientes preguntas:

a) La temperatura máxima de una ciudad es de 18 °C y la temperatura mínima de –2 °C. ¿De cuánto es la variación de temperatura en esa ciudad? ______

b) La temperatura mínima de otra ciudad es de –8 °C. Si se sabe que la variación de temperatura es de 12 °C, ¿cuál es la temperatura máxima de dicha ciudad? ______

109

Propósito del interactivo. Introducir la idea de resta de números con signo, como la variación de la temperatura.

Posibles dificultades. En la comparación de temperaturas negativas y positivas los signos pueden ser motivo de confusión.

- Podría ocurrir que los alumnos dijeran que entre 22 °C y –5 °C hay una variación de 17 °C (porque 22 – 5 = 17).
- También es posible que algunos alumnos piensen que –3 °C es menor que –12 °C porque los comparan como si fueran números naturales (3 < 12).

Permítales utilizar los procedimientos que les parezcan convenientes para responder las preguntas y cerciórese de que más adelante expliquen lo que hicieron, pero si se equivocan no los corrija en este punto, más adelante tendrán oportunidad de rectificar sus errores.

Respuestas.

a) La máxima es de 26.5, la mínima es de 1. La variación es de 25.5 °C.
b) La máxima es de 23.5 °C, la mínima es de –4. La variación es de 27.5 °C.
c) La temperatura de Las Vigas de Ramírez (26.5 °C) es mayor que la de Tepatitlán (23.5 °C).
d) La temperatura de Tepatitlán es menor, porque –4 < 1 (hace más frío a –4 °C que a 1 °C).

Propósito de las preguntas. Se pretende que los alumnos calculen la variación entre dos temperaturas, una positiva y una negativa, como el número de grados que hay que recorrer para llegar de una a la otra. Para corregir un error que muchos alumnos cometen (que consiste en restarle a una de las temperaturas la otra), se les pide que primero calculen cuántos grados hay desde una de las temperaturas hasta el cero, y del cero a la otra temperatura.

Respuestas.

b) 4 °C.
c) 23.5 °C.
d) 27.5 °C.
e) De 27.5 °C.
f) El equipo 2.

Respuestas.

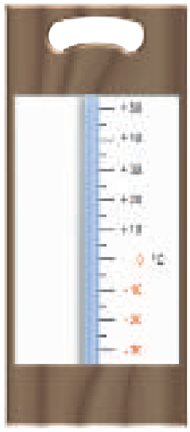
a) 20 °C. De –2 a 0 hay 2 °C, y de 0 a 18 hay 18 °C. Se suma 2 + 18.
b) 4 °C. Sabemos que la variación es de 12 °C y que hay 8 grados de –8 a 0.

Posibles dificultades. En esta actividad las 2 temperaturas que se comparan son negativas, lo que puede hacer pensar a algunos alumnos que la diferencia entre ellas será también un número negativo (por ejemplo, que la variación entre la máxima y la mínima en Anchorage es de −7 °C).
Comente con los alumnos que en estas actividades sólo se pregunta cuántos grados hay entre las 2 temperaturas, no se pregunta si la segunda temperatura subió o bajó con respecto a la primera.

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos se den cuenta de que para hallar la variación entre 2 temperaturas se deben contar todos los grados que hay entre ellas. Si las temperaturas que se comparan son una positiva y otra negativa, el conteo va a pasar por el cero.
Si cree que los alumnos lo necesitan, ponga ejercicios similares, por ejemplo:
Encontrar la variación de temperatura entre:

6 °C y −2 °C
−12 °C y −4 °C
−9 °C y 1 °C
28 °C y 0 °C
24 °C y 7 °C

Pídales que ubiquen las temperaturas en un termómetro ambiental o en una recta numérica para encontrar el segmento que representa la distancia entre ambas.



III. En otros países se han registrado las siguientes temperaturas:

Ciudad	Estado	Temperatura máxima (°C)	Temperatura mínima (°C)
Anchorage	Alaska (Estados Unidos de América)	−6.0	−13.0
Armstrong	Ontario (Canadá)	−1.0	−9.0

a) En el termómetro de la izquierda, localicen las temperaturas máxima y mínima de Anchorage.

b) ¿Cuántos grados hay de −6 °C a −13 °C? ______

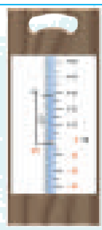
c) ¿De cuántos grados es la variación de temperatura en Anchorage? ______

d) En el mismo termómetro, localicen las temperaturas máxima y mínima de Armstrong.

e) ¿Cuántos grados hay de −1 °C a −9 °C? ______

f) ¿De cuántos grados es la variación de temperatura en Armstrong? ______

>>> A lo que llegamos

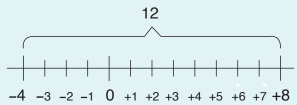


- **La variación de temperatura es el número de grados que hay entre ambas temperaturas.**
  Por ejemplo, en el termómetro de la izquierda:

	Máxima	Mínima	Diferencia
Ajocucar	29.0	−2.5	31.5

- **La variación de temperatura también la podemos ver como la distancia que hay entre dos números en una recta numérica horizontal.**

Por ejemplo: entre el −4 y el 8 hay una distancia de 12, como lo muestra la ilustración.

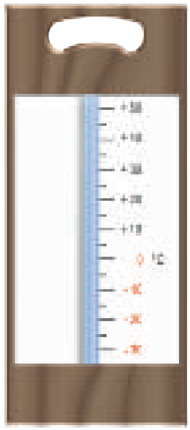


Es decir, la distancia entre dos números es la longitud del segmento que los une.

110

IV. De las temperaturas mínimas de Tepatitlán y Las Vigas de Ramírez dos alumnos dicen lo siguiente:

- Dulce dice que Las Vigas de Ramírez tiene la menor temperatura, porque 1 es menor que 4.
- Consuelo dice que Tepatitlán tiene la menor temperatura, porque –4 °C está abajo de 1°C.



a) ¿Quién creen que tiene la razón? ______

b) En el termómetro de la derecha ubiquen las temperaturas 12 °C y 2 °C.

c) ¿Cuál de las dos es menor? ______

La temperatura 2 °C está debajo de 12 °C y es la menor de ellas.

d) En el mismo termómetro, ubiquen las temperaturas mínimas de Las Vigas de Ramírez y Tepatitlán.

e) ¿Cuál de las dos temperaturas está debajo de la otra? ______

f) ¿Cuál de las dos es menor? ______

Comparen sus respuestas.

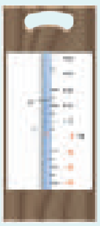
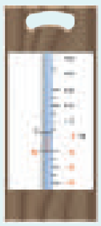
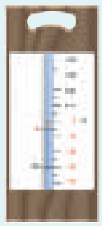
Respuestas.
a) Consuelo tiene razón. Otra manera de verlo es preguntarse a qué temperatura hace más frío: a 1 °C o a –4 °C.
c) 2 °C
e) –4 °C está por debajo.
f) –4 °C es menor.

>>> A lo que llegamos

- **Al comparar dos temperaturas en un termómetro, siempre es mayor aquella que está más arriba.**

Por ejemplo:

a) 22 °C es mayor que 3 °C. b) 2 °C es mayor que –10 °C. c) –5 °C es mayor que –35 °C.

- **Al comparar dos temperaturas en la recta numérica, siempre es mayor aquella que está más a la derecha.**

Por ejemplo:

a) +9 es mayor que +2. b) +5 es mayor que –10. c) –3 es mayor que –15.

Propósito de la pregunta. Ahora ya no se habla de comparar temperaturas sino números. Se pretende que el alumno pueda aplicar los conocimientos que adquirió con los termómetros y las rectas para comparar cualquier par de números con signo.

Integrar al portafolios. Que los alumnos le entreguen en una hoja aparte los resultados que obtuvieron en los números 1 y 2.

Respuestas.

1.
   a) 16
   b) 16
   c) 8
   d) 18
2.
   a) 6
   b) 8
   c) 4
3.
   a) Mayor que >
   b) Menor que <
   c) Mayor que >

Propósito de la sesión. Ubicar números con signo en la recta numérica, obtener su valor absoluto e identificar sus simétricos.

Organización del grupo. Pida a los alumnos que trabajen en parejas.

Respuestas.

a) Si el valor absoluto es la distancia de un número al cero, entonces es el +6.5.

b) $-\frac{1}{2}$

c) +5 y −5

>>> Lo que aprendimos

1. ¿Qué distancia hay entre los siguientes pares de números?

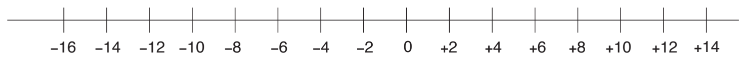
a) −6 y +10 ________ b) +10 y +26 ________ c) −9 y −1 ________ d) −15 y +3 ________

2. ¿Que distancias hay entre...

a) −6 y 0? ________ b) 0 y +8? ________ c) −4 y 0? ________

3. Escriban mayor que (>) o menor que (<) según corresponda. Ayúdense con la recta numérica.

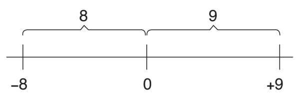
a) +14 ________ +6 b) −9 ________ +5 c) −4 ________ −15



SESIÓN 3

VALOR ABSOLUTO Y SIMÉTRICOS

>>> Para empezar



La distancia de un número al cero es la longitud del segmento que va del cero al número. A esta longitud se le llama valor absoluto, y se representa por medio de dos barras paralelas | |

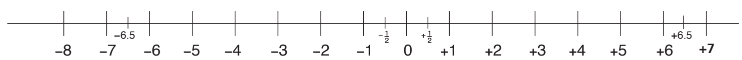
Por ejemplo: Entre el −8 y el 0 hay un segmento de longitud 8.

Entre +9 y el 0 hay un segmento de longitud 9.

El valor absoluto de −8, se escribe |−8| = 8. El valor absoluto de +9, se escribe |+9| = 9

>>> Consideremos lo siguiente

En la siguiente recta numérica se han ubicado algunos números.



a) ¿Qué número positivo tiene el mismo valor absoluto que −6.5?

b) ¿Qué número negativo tiene el mismo valor absoluto que $+\frac{1}{2}$?

c) ¿Cuáles números tienen valor absoluto 5?

Comparen sus respuestas y comenten sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. Sobre el anterior inciso c):

- Pablo dice que el único número cuyo valor absoluto es 5 es el número +5
- Delia dice que son dos números: el +5 y el –5

  a) ¿Con quién de los dos están de acuerdo? ¿Por qué?

  b) ¿Cuál es la distancia del –5 al cero?, ¿y del +5 al cero?

  c) ¿Qué números tienen como valor absoluto 5?

II. Contesten las siguientes preguntas:

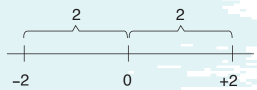
a) ¿Qué número negativo tiene el mismo valor absoluto que +20? ____________

b) ¿Qué valor absoluto tienen los números +13 y –13? ____________

c) ¿Qué número positivo tiene el mismo valor absoluto que –9.5? ____________

>>> A lo que llegamos

- **El valor absoluto de números positivos y negativos siempre es un número positivo.**
  Por ejemplo: $|-12.5| = 12.5$ y $|+12.5| = 12.5$
- **Dos números que están a la misma distancia del cero se llaman números simétricos entre sí.**
  Por ejemplo: +2 y –2 son números simétricos entre sí.



III. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el número simétrico del +6? ____________

b) ¿Cuál es el número simétrico del –35? ____________

c) ¿Cuál es el número simétrico del –13.9? ____________

d) ¿Cuál es el número simétrico del +26.1? ____________

e) ¿El número $+\frac{1}{2}$ y el $-\frac{1}{2}$ son simétricos? ____________

f) ¿Cuál es el número simétrico del $-\frac{3}{4}$? ____________

Comparen sus respuestas.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Números enteros" en *Una ventana al infinito*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Luz María Marván. "Números simétricos", "Números con signo", "¿Mayor o menor?" y "El valor absoluto" en *Representación numérica*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Sugerencia didáctica. Lean juntos esta información y comente a los alumnos que, como el valor absoluto es la distancia a la que está un número con respecto al cero, y no en qué dirección está, el valor absoluto nunca puede ser un número negativo. Pregunte a los alumnos: ¿Cuál es el valor absoluto del cero, es decir, a qué distancia está el cero del cero? La respuesta es “a cero unidades”, por lo tanto, su valor absoluto es cero.

Propósitos de la sesión. Explorar la segunda potencia o el cuadrado de un número a partir de la obtención de la medida del lado de un cuadrado que mide un área determinada. Identificar la raíz cuadrada de un número ***A*** como el número que multiplicado por sí mismo da ***A***. Identificar el cuadrado de un número y la raíz cuadrada como operaciones inversas.

Organización del grupo. Se recomienda trabajar en parejas, a excepción del apartado *Lo que aprendimos*, que puede resolverse de manera individual.

Materiales. Una calculadora por alumno o por pareja.

Propósito de la actividad. Se les plantea el reto: ¿cuál será la medida del lado de un cuadrado cuya área es igual a 18 cm²? Dado que esa medida no es exacta, la tarea consiste en encontrar un número que multiplicado por sí mismo dé 18.

Sugerencia didáctica. Respecto al inciso e), algunos alumnos podrían afirmar que no existe un cuadrado con esa área, pues con 4 cm obtienen 16 cm² y con 5 cm, obtienen 25 cm². Invítelos a probar utilizando también números decimales. Lo más probable es que prueben con varios números buscando aquel que más se aproxime a 18 cm². Durante la comparación de resultados pida a los alumnos que identifiquen qué medida se acerca más al número buscado.

Respuestas

a) 4 cm² (lado por lado = 2 × 2).
b) 9 cm².
c) 4 cm.
d) 5 cm.
e) Sí existe, y la medida de sus lados es de 4.2426 cm aproximadamente.

Propósito de la actividad. Que los alumnos constaten que sí existe un cuadrado con esa superficie y que verifiquen la longitud de los lados midiendo.

Respuestas.

a) El cuadrado blanco tiene 6 cm por lado. Su área es de 36 cm². Al trazar los cuatro triángulos azules pueden darse cuenta de que son triángulos rectángulos isósceles, y de que su base y su altura miden 3 cm. También podrían considerar como base a la hipotenusa y medir la altura.
b) El área de cada triángulo es de 4.5 cm².
c) El cuadrado azul está formado por los cuatro triángulos. Su área es de 18 cm².
d) La medida está entre 4.2 o 4.3 cm. Es importante que consideren que se trata de una aproximación.
e) Si utilizan la medida de 4.2, el área es de 17.64 cm², y si utilizan la medida de 4.3, el área es de 18.49 cm². En el primer caso nos falta, en el segundo caso nos pasamos. Es decir que la medida real de cada lado debe ser un valor entre 4.2 y 4.3.

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las operaciones.
Antecedentes
Es la primera vez que los alumnos estudian estas operaciones; sin embargo, el contexto en el que se abordan (cálculo del área de cuadrados) es bastante conocido por ellos, lo que les permitirá hacer uso de sus conocimientos previos para iniciar el estudio de este tema.

SECUENCIA 26

Raíz cuadrada y potencias

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y la potencia de exponente natural, ambas de números naturales y decimales.

SESIÓN 1

CUADROS Y MÁS CUADROS

>>> Para empezar

En la secuencia 4 de *Matemáticas I* encontraste la expresión algebraica de la fórmula del cuadrado. Si el lado del cuadrado mide ℓ, entonces su área **A** se calcula con la expresión: $A = \ell \times \ell$. En esta sesión, estudiarás cómo encontrar la medida del lado del cuadrado a partir de su área.

>>> Consideremos lo siguiente

Calculen:

a) ¿Cuál es el área de un cuadrado que tiene lados que miden 2 cm? ______
b) ¿Cuál es el área de un cuadrado que tiene lados que miden 3 cm? ______
c) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene 16 cm² de área? ______
d) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene 25 cm² de área? ______
e) ¿Creen que exista algún cuadrado de 18 cm² de área? ______ ¿Cuánto medirían sus lados? ______

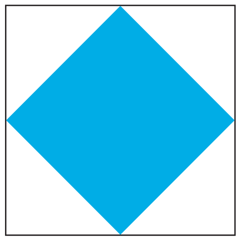
Expliquen y comprueben sus respuestas en su cuaderno.

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En la ilustración hay un cuadrado blanco cuyos lados miden 6 cm; dentro del cuadrado blanco hay un cuadrado azul.

a) Calculen el área del cuadrado blanco ______



114

Propósitos de la secuencia Resolver problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y la potencia de exponente natural, ambas de números naturales y decimales.		
Sesión	**Título y propósitos de la sesión**	**Recursos**
1	*Cuadros y más cuadros* Explorar la segunda potencia o el cuadrado de un número a partir de la obtención de la medida del lado de un cuadrado que mide un área determinada. Identificar la raíz cuadrada de un número ***A*** como el número que multiplicado por sí mismo da ***A***. Identificar el cuadrado de un número y la raíz cuadrada como operaciones inversas.	Aula de medios "Cuadros y más cuadros" (Hoja de cálculo)
2	*Cálculo de raíces cuadradas* Calcular mediante aproximaciones la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto.	Video *Los babilonios y la raíz cuadrada* Interactivo "Método babilónico"
3	*¿Cuántos tatarabuelos?* Resolver problemas que impliquen el cálculo de las potencias de exponentes naturales de números naturales. Identificar la raíz cúbica de un número ***A*** como el número que tiene tercera potencia igual a ***A***, y la raíz cuarta de un número ***A*** como el número que tiene cuarta potencia igual a ***A***.	Interactivo "Diagrama de árbol"

Tracen las diagonales del cuadrado azul. Van a obtener cuatro triángulos azules iguales.

b) Calculen el área de cada triángulo azul. ____

c) Calculen el área del cuadrado azul. ____

d) ¿Cuánto miden los lados del cuadrado azul? ____

Midan con su regla.

e) En sus cuadernos, comprueben la medida que obtuvieron para el lado del cuadrado azul aplicando la fórmula del área: **A =** $\ell \times \ell$

¿Qué valor del área encontraron usando la fórmula? ____

Recuerden que:
El área de un triángulo con medida de la altura a y medida de la base b se calcula:
$A = \frac{b \times a}{2}$

Comparen sus respuestas y comenten:

a) De los valores del área que encontraron usando la fórmula, ¿cuál es el que más se aproxima a 18 cm²?

b) ¿Cuál es la mejor aproximación que encontraron para la medida del lado del cuadrado?

II. Llenen la siguiente tabla para encontrar valores aproximados a la medida del lado del cuadrado de área 18 cm²:

Medida del lado (cm)	Área (cm²)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
4.5	20.25
4.2	17.64
4.3	18.49
4.25	18.0625

a) ¿Cuál es el valor más aproximado que encontraron para la medida del lado del cuadrado? ____

b) ¿Podrían encontrar un valor más aproximado? ____ ¿Cuál?

____

Comparen sus respuestas.

115

Sugerencia didáctica. El área del cuadrado azul es de 18 cm²; por lo tanto, sí existe un cuadrado con esa área. Pida a los alumnos que revisen lo que respondieron en el inciso e) del apartado *Consideremos lo siguiente*. Solicite a las parejas que registren en el pizarrón la medida que encontraron para los lados del cuadrado azul y el área que obtienen con esa medida (esto puede hacerse en una tabla que usted previamente puede trazar en el pizarrón). Pídales que identifiquen cuál es la medida que se aproxima más a la longitud del lado del cuadrado para que el área sea de 18 cm².

Propósito de la actividad. La tabla sirve para ir encontrando los valores del lado del cuadrado que hacen que el área se vaya aproximando a 18 cm².

Respuestas. El valor de la tabla que más se aproxima es 18.0625, que corresponde a 4.25 cm por lado. Sin embargo, es posible hallar valores que se aproximen más a la medida buscada.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que, con la ayuda de la calculadora, encuentren uno o dos valores que se aproximen más a la medida del lado. Usted puede hacerles notar que el valor debe estar entre 4.2 y 4.25; asimismo, puede comentarles que el valor exacto tiene una cantidad infinita de cifras decimales, por lo que siempre se toma una cantidad aproximada.

Sugerencia didáctica. Antes de que las parejas busquen la medida del lado del cuadrado, pida al grupo que estimen una respuesta. Algunas de esas estimaciones pueden ser registradas en el pizarrón para que después verifiquen qué tanto se acercaron a la respuesta.

Sugerencia didáctica. Se puede continuar la exploración hasta con tres cifras decimales. Los valores más aproximados son 5.65 y 5.66. Usted puede preguntar a todo el grupo si pueden decirle algunos números entre estos dos y cuáles de ellos son mejores opciones para la medida del lado. Los más aproximados son 5.656 y 5.657.

2

Sugerencia didáctica.
Pida a los alumnos que lean la información y que respondan en sus cuadernos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se calcula la segunda potencia o el cuadrado de un número?
- ¿Cómo se representa el cuadrado de un número? Dar algunos ejemplos.
- ¿Qué es la raíz cuadrada de un número? Dar ejemplos.

III. ¿Creen que exista algún cuadrado de **32** cm² de área? ____________ ¿Cuánto medirían sus lados? ____________

a) Completen la siguiente tabla para encontrar valores aproximados a la medida de sus lados.

Medida del lado (cm)	Área (cm^2)
5	25
5.5	
5.6	
5.7	
6	

b) La medida del lado de este cuadrado está entre 5.6 cm y 5.7 cm. ¿Con qué valor continuarían la tabla para encontrar un valor que se aproxime más a la medida del lado de este cuadrado? ____________

c) Hagan la comprobación. ¿Qué valor del área encontraron? ____________

Comparen sus respuestas y hagan la comprobación.

>>> A lo que llegamos

- Para calcular el área de un cuadrado, conociendo la medida de su lado ℓ, se multiplica la medida del lado por ella misma: $\ell \times \ell$

  En general, cuando se multiplica un número por él mismo, por ejemplo **y × y**, se dice que se calcula la **segunda potencia** o el **cuadrado** del número. Esto se escribe: y^2

  Por ejemplo, al calcular **5 × 5**, se dice que se está calculando **5** a la **segunda potencia** o el **cuadrado** de **5**, y se escribe 5^2. O sea:

  $$5 \times 5 = 5^2 = 25$$

- Al calcular el lado de un cuadrado a partir de su área se dice que se calcula la **raíz cuadrada** del área. En general, la **raíz cuadrada** de un número **A** es el número que multiplicado por él mismo da **A**.

  Por ejemplo, la raíz cuadrada de **16** es **4**, porque **4 × 4 = 16**. La raíz cuadrada de **16** se escribe: $\sqrt{16}$

IV. Llenen la siguiente tabla:

Número ℓ	Cuadrado del número ℓ^2
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
11.5	132.25
12	144
13	169
14	196
15	225
15.5	240.25
16	256

Pueden usar calculadora para hacer y verificar sus cálculos.

Sugerencia didáctica. Esta tabla puede servir para que los alumnos utilicen la tecla de la raíz cuadrada en la calculadora. También pueden ubicar la tecla que sirve para elevar al cuadrado y no sólo multiplicar a cada número por sí mismo.

A partir de la información de la tabla anterior, relacionen las dos columnas:

(a) ¿Cuál es el área del cuadrado cuyos lados miden 13 cm?	(c) 144
(b) ¿A cuánto es igual $\sqrt{240.25}$?	(e) 225 cm^2
(c) ¿A cuánto es igual 12^2?	(b) 15.5
(d) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 169?	(f) 15
(e) ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyos lados miden 15 cm?	(a) 169 cm^2
(f) ¿A cuánto es igual $\sqrt{225}$?	(d) 13

Comparen sus respuestas y hagan las comprobaciones.

>>> A lo que llegamos

El cuadrado de un número y la raíz cuadrada son operaciones inversas. Esto quiere decir que si a un número se le aplica una operación y después la otra, se obtendrá el número original.

Por ejemplo, el cuadrado del número 15 es: $15^2 = 15 \times 15 = 225$

Y la raíz cuadrada del número 225 es: $\sqrt{225} = 15$

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que copien la información en sus cuadernos y que presenten ejemplos distintos a los que ahí se ofrecen. Además, usted puede recordarles las operaciones inversas que ya conocen: suma y resta, multiplicación y división.

Integrar al portafolios. Respuesta.

1. Si consideran hasta con dos cifras decimales, es 1.41, si consideran cuatro cifras decimales, es 1.4142; pida a los alumnos que registren las distintas operaciones que efectuaron, ya sea que las hayan hecho con calculadora o con lápiz y papel.

Propósito de la sesión. Calcular mediante aproximaciones la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto.

Materiales. Calculadora.

Propósito de la actividad. Presentar a los alumnos un procedimiento para calcular la raíz cuadrada de un número, en el contexto del área de un cuadrado: al calcular la raíz cuadrada de un número estamos buscando la medida del lado de un cuadrado del que se conoce el área.

Propósito del video. Visualizar la aplicación del método babilónico en el cálculo de raíces cuadradas de distintos números.

>>> Lo que aprendimos

1. En tu cuaderno encuentra una aproximación para la medida del lado de un cuadrado de área 2 cm².

2. Relaciona las dos columnas.

(a) ¿Cuál es el área del cuadrado cuyos lados miden 10 cm?	(c) 196
(b) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 196?	(a) 100 cm²
(c) ¿Cuánto es 14²?	(f) 11.5
(d) ¿Cuánto es $\sqrt{256}$?	(d) 16
(e) ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyos lados miden 7 cm?	(e) 49 cm²
(f) ¿Cuánto es $\sqrt{132.25}$?	(b) 14

SESIÓN 2

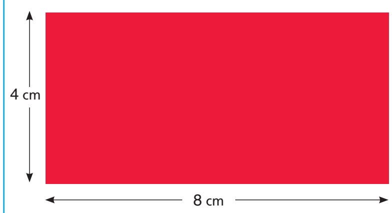
CÁLCULO DE RAÍCES CUADRADAS

>>> Para empezar

Los babilonios y la raíz cuadrada

Existen varios métodos para calcular la raíz cuadrada de un número. En esta sesión aprenderán un método que fue inventado por los antiguos babilonios.

Para obtener la **raíz cuadrada de 32** con el método babilónico, se siguen los siguientes pasos:



1. Se escogen dos números que multiplicados den **32**. Por ejemplo, **8** y **4**.

2. Se construye un rectángulo de área **32 cm²** y lados **8 cm** y **4 cm** (rectángulo rojo).

   A partir de ahora se encuentran rectángulos cada vez más parecidos a un cuadrado de área **32 cm²**. Vean cómo se hace esto:

3. Se promedian las medidas de los lados del rectángulo:

$$\frac{8\text{ cm} + 4\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}$$

118

Sugerencia didáctica. Antes de revisar cada uno de los pasos del método babilónico, comente al grupo que se va a buscar la medida del lado de un cuadrado cuya área es de 32 cm². Pida al grupo que haga una estimación de la posible medida del lado del cuadrado (la respuesta es entre 5 y 6 cm). Posteriormente, una vez que hayan revisado el método babilónico, tendrán oportunidad de verificar su respuesta.

Propósito de la actividad. El método de los babilonios considera un rectángulo con un área determinada, al cual gradualmente se modifican las medidas de sus lados –conservando el área–, de manera tal que cada vez se acerca más a un cuadrado.

Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, recuerde a los alumnos que el procedimiento para encontrar un promedio (paso número 3) consiste en sumar los valores y luego dividir esa suma entre el número de valores que se están promediando.

4. Se construye otro rectángulo (más parecido a un cuadrado) que tenga un lado que mida **6 cm**, ¿cuánto debe medir el otro lado para que el área del rectángulo sea **32 cm²**? ________. Con estas medidas se construyó el rectángulo azul.

Observen que:

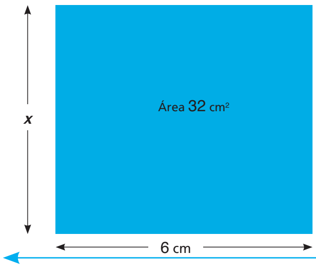
El área de un rectángulo se obtiene multiplicando la medida de sus lados. Entonces, si conocen el área (**32 cm²**) y la medida de uno de los lados (**6 cm**) la medida del otro lado (**x cm**) se puede obtener resolviendo la ecuación: $6x = 32$

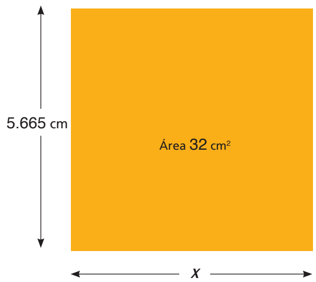
Recuerden que:
Para hacer sus cálculos pueden usar aproximaciones.
Por ejemplo, al hacer la división 32 ÷ 6 pueden usar el número decimal 5.33 o 5.333

5. Se vuelven a promediar las medidas de los lados del rectángulo:

$$\frac{6 \text{ cm} + 5.33 \text{ cm}}{2} = 5.665 \text{ cm}$$

6. Se construye otro nuevo rectángulo (rectángulo anaranjado) que tenga un lado que mida **5.665 cm** y otro que mida **32** entre **5.665**, es decir **5.648 cm.**





Se puede seguir con esta construcción y acercarse cada vez más al valor exacto de la raíz de **32**. Por el momento, se detendrá aquí el proceso para observar que el rectángulo anaranjado es casi un cuadrado. Sus lados miden: **5.665 cm** y **5.648 cm**.

Calculen (pueden usar una calculadora):

5.665^2 = ________

5.648^2 = ________

¿Cuál de los dos números es una mejor aproximación a $\sqrt{32}$? ________

Los lados del rectángulo azul midieron **6 cm** y **5.33 cm**. Calculen (pueden usar calculadora):

6^2 = ________

5.33^2 = ________

Comenten:

¿Qué rectángulo da mejores aproximaciones a $\sqrt{32}$, el azul o el anaranjado? ________

119

Respuesta. Se divide 32 entre 6. Es igual a 5.333333… Si se toman sólo dos cifras decimales, es 5.33.

Sugerencia didáctica. Usted puede pedir a los alumnos que resuelvan la ecuación que se les plantea:

$6x = 32$

$x = 32 \div 6$

$x = 5.333$

Respuestas. Se obtiene:

$5.665^2 = 32.092225$

$5.648^2 = 31.899904$

El primer número es el que más se acerca a la raíz cuadrada de 32.

Respuesta. El rectángulo anaranjado es el que más se aproxima.

Sugerencia didáctica. Entre todo el grupo pueden realizar una aproximación más si se promedia 5.665 y 5.648

Sugerencia didáctica. Mientras las parejas resuelven, procure estar pendiente de cómo lo hacen y apóyelos si tienen dificultades. Particularmente, sugiérales que revisen nuevamente cada uno de los pasos que se describen en el caso anterior.

>>> Consideremos lo siguiente

Con el método babilónico se puede calcular la raíz cuadrada de cualquier número. Siguiendo los pasos de este método, calculen la raíz cuadrada de **7.3**

Pueden usar su calculadora para hacer las operaciones que se indican y una regla para hacer los dibujos de los rectángulos.

1. Se escogen dos números que multiplicados den **7.3**
   Háganlo con **1** y **7.3**
2. Dibujen en sus cuadernos un rectángulo de lados **1 cm** y **7.3 cm**.
   Ahora van a encontrar rectángulos cada vez más parecidos a un cuadrado.
3. Obtengan el promedio de **1 cm** y **7.3 cm**, ¿cuánto es? __________
   Éste es uno de los lados del nuevo rectángulo.
4. ¿Cuánto mide el otro lado del rectángulo? __________
   Para encontrar esta medida pueden resolver la ecuación: $4.15x = 7.3$
   Dibujen en sus cuadernos un rectángulo que tenga las medidas que acaban de encontrar.
   Pueden seguir con el método para encontrar rectángulos cada vez más parecidos a un cuadrado de área **7.3 cm²**
5. Obtengan el promedio de **4.15 cm** y **1.759 cm**, ¿cuánto es? __________
   Éste es uno de los lados del otro rectángulo.
6. Si saben que **7.3 ÷ 2.95** es aproximadamente **2.474**, ¿cuánto mide el otro lado del nuevo rectángulo? __________
   Dibujen en sus cuadernos un rectángulo que tenga las medidas que acaban de encontrar.
7. Encuentren el siguiente rectángulo y dibújenlo en sus cuadernos.

Respuesta. Aproximadamente 2.701.

Sugerencia didáctica. Usted puede pedir a algunas parejas que vayan indicando las medidas de los lados de cada uno de los rectángulos que encontraron.

Comparen las medidas que obtuvieron siguiendo los pasos del método babilónico. Comenten:

¿Cuánto es $\sqrt{7.3}$? __________

Propósito de la actividad. Que de manera individual, los alumnos ejerciten el método babilónico para obtener la raíz cuadrada de un número. Los alumnos pueden recurrir a los ejercicios anteriores en caso de que tengan dudas o dificultades para resolver este ejercicio.

>>> Manos a la obra

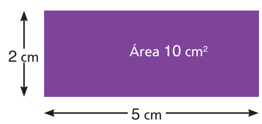
I. Calcula por pasos la raíz cuadrada de **10** con el método babilónico.

1. Se escogen dos números cuya diferencia sea la menor posible y cuyo producto sea igual a **10**, es decir, el **2** y el **5**.

Propósito del interactivo. Obtener la aproximación de la raíz cuadrada de un número por medio del método babilónico.

Observa que:

Podrías escoger el **1** y el **10**, pero los lados del rectángulo serían muy distintos: medirían **1 cm** y **10 cm**. En cambio, si escoges **2** y **5**, el rectángulo que obtienes se parece más a un cuadrado.



2. Se construye un rectángulo de área **10 cm²** y lados **2 cm** y **5 cm** (rectángulo morado).

Se construye otro rectángulo de área **10 cm**, pero más parecido a un cuadrado.

3. Se obtiene el promedio entre **2** y **5**, sumando **2** más **5** y dividiendo entre 2. El promedio es: ____________________. Éste es uno de los lados del nuevo rectángulo (rectángulo azul).

4. Si sabes que **10 ÷ 3.5** es aproximadamente **2.86**, ¿cuánto mide el otro lado del nuevo rectángulo? ____________________

El método se puede continuar para aproximar mejor $\sqrt{10}$, encontrando rectángulos de área **10 cm²** cada vez más parecidos a un cuadrado.

Calcula:

$2.86^2 =$ ____________________

$3.5^2 =$ ____________________

¿Qué número usarías para una mejor aproximación de $\sqrt{10}$? ____________________

Comparen sus aproximaciones. ¿Cuál es la mejor? ____________________

>>> Lo que aprendimos

1. En tu cuaderno, calcula la raíz cuadrada de **18**. Obtén 3 rectángulos de área **18 cm²** siguiendo los pasos del método babilónico.

2. Completa la siguiente tabla para calcular la raíz cuadrada de números enteros y decimales. Si el resultado es un número decimal, utiliza sólo dos cifras decimales para tus respuestas. Puedes usar una calculadora.

Número	Raíz cuadrada
25	5
1	1
0.01	0.1
0.25	0.5

a) ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo lado tiene **0.1 cm** de longitud? __________

b) ¿Cuál es la longitud del lado de una figura de **0.25 cm²** de área? __________

121

Sugerencia didáctica. En cada uno de los pasos siguientes usted puede pedirles que dibujen los rectángulos en sus cuadernos.

Respuestas.
$2.86^2 = 8.1796$
$3.5^2 = 12.25$

Respuesta. Una buena aproximación con cuatro cifras decimales es 3.1622.

Sugerencia didáctica. Puede pedir a algunos alumnos que encuentren todavía una o dos aproximaciones mejores. Esto debe hacerse utilizando más cifras decimales en los resultados.

Integrar al portafolios. Si identifica que los alumnos aún tienen dificultades para encontrar la raíz cuadrada de un número con el método babilónico, revise con ellos cada uno de los pasos tomando este caso como ejemplo. Recuerde que no se trata de que los alumnos sean expertos en el manejo de este método, pues hay otros recursos, como la calculadora, que en ciertas circunstancias permiten obtener resultados de manera más rápida y segura; el propósito es que *comprendan* qué implica buscar la raíz cuadrada de un número.

Respuesta. El primer rectángulo puede ser de 3 × 6. Una buena aproximación es 4.2426.

Respuestas.
a) 0.01 cm².
b) 0.5 cm.
Recomiende a los alumnos que utilicen la calculadora para verificar sus resultados.

Propósitos de la sesión. Resolver problemas que impliquen el cálculo de las potencias de exponentes naturales de números naturales. Identificar la raíz cúbica de un número A como el número que tiene la tercera potencia igual a A, y la raíz cuarta de un número A como el número que tiene cuarta potencia igual a A.

Organización del grupo. Se sugiere que trabajen en parejas y que el apartado *Lo que aprendimos* lo resuelvan de manera individual.

Materiales. Calculadora.

Respuesta. Una persona tiene 2 papás, 4 abuelos, 8 bisabuelos y 16 tatarabuelos.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que registren en sus cuadernos la forma en que encontraron la respuesta. Pueden apoyarse con operaciones o con elementos gráficos.

Respuestas.

a) 32

b) 64

c) 128

d) La segunda multiplicación (el 2 se multiplica 7 veces). Puede pedir a los alumnos que realicen las multiplicaciones para comprobar el resultado.

SECUENCIA 26

SESIÓN 3

¿CUÁNTOS TATARABUELOS?

>>> Para empezar

Un árbol genealógico es una representación gráfica de la historia familiar de una persona. En un árbol genealógico aparecen los antepasados de cada persona, es decir, sus padres, abuelos, bisabuelos (padres de los abuelos), tatarabuelos (padres de los bisabuelos), etc. Diremos que los padres son la primera generación de antepasados, que los abuelos son la segunda generación de antepasados, etcétera.

>>> Consideremos lo siguiente

En una familia, los bisabuelos son los papás de los abuelos, y los tatarabuelos son los papás de los bisabuelos. ¿Cuántos tatarabuelos hay en el árbol genealógico de una persona?

>>> Manos a la obra

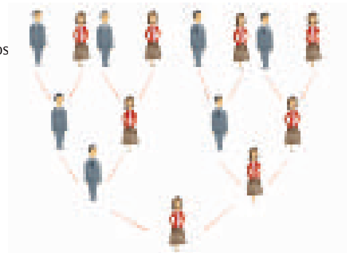
I. El siguiente árbol genealógico puede servir para encontrar cuántos tatarabuelos tiene una persona. Copien el árbol en sus cuadernos y dibujen a los tatarabuelos. ¿Cuántos son? ____________

Bisabuelos

Abuelos

Padres

Persona



a) Si quieren continuar con el árbol genealógico, ¿cuántos antepasados habría en la siguiente rama hacia arriba? Es decir, ¿cuántos antepasados hay en la quinta generación? ____________ . Dibújenlos en sus cuadernos.

b) ¿Cuántos antepasados de la sexta generación tiene una persona? ____________

c) ¿Y cuántos antepasados tiene en la séptima generación? ____________

d) ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones les permite encontrar el número de antepasados de la séptima generación?

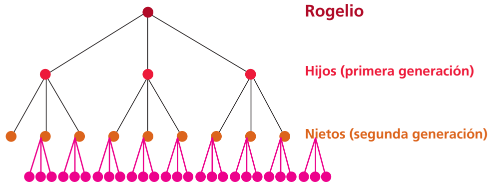
- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las encontraron.

122

II. Los descendientes de una persona son sus hijos, nietos, bisnietos, tataranietos, etc. Supongan que Rogelio tiene 3 hijos (primera generación de descendientes) y cada uno de sus hijos tiene a su vez 3 hijos (segunda generación de descendientes), de los cuales cada uno tiene 3 hijos (tercera generación de descendientes) y así sucesivamente. Es decir, cada miembro de la familia tendrá exactamente 3 hijos.

a) Completen el siguiente diagrama de árbol hasta la tercera generación de descendientes:



b) ¿Cuántos descendientes tendrá Rogelio en la tercera generación? ________

c) ¿Cuántos descendientes tendrá Rogelio en la sexta? ________

d) ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones permite calcular el número de descendientes de la novena generación?:

- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

e) Si en lugar de tener 3 hijos, cada quien tuviera 5 hijos, ¿cuántos descendientes tendría Rogelio en la cuarta generación? ________

f) ¿Y en la octava? ________

g) ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones permite encontrar el número de descendientes en la duodécima generación?

- $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
- $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

Respuestas.

a) De cada uno de los nietos deben salir tres ramas, cada rama representa a un bisnieto.

b) 27

c) 759

d) La segunda multiplicación (el 3 se multiplica 9 veces).

e) 625

f) 390 625

g) La segunda multiplicación (el 5 se multiplica 12 veces).

Propósito del interactivo. Utilizar el diagrama de árbol como técnica de conteo en la resolución de problemas con potencias.

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que elijan un número como base para ejemplificar en sus cuadernos cada una de las potencias, desde la potencia 1 hasta la décima potencia. Es recomendable que para esto utilicen la notación con el exponente y con las multiplicaciones.

Respuestas.

a) 3
b) 10
c) 0.5
d) 20 736. Algunos podrán pensar que es el 12. Pídales que verifiquen con la calculadora.
e) 4

Sugerencia didáctica. Después de leer y comentar esta información, pida a los alumnos que escriban en sus cuadernos otros ejemplos de raíces cuadradas, raíces cúbicas y raíces cuartas.

>>> A lo que llegamos

Una **potencia** es la multiplicación de un número por sí mismo varias veces.
Por ejemplo, en el problema de los árboles genealógicos:

2^{10} es la multiplicación **2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2**.
2^{10} se llama **la décima potencia de 2** y se lee **2 elevado a la 10** o **2 a la 10**.
2 es la **base** y **10** es el **exponente**.

5^9 es la multiplicación **5 × 5 × 5 × 5 × 5 × 5 × 5 × 5 × 5**.
5^9 se llama **la novena potencia de 5** y se lee **5 elevado a la 9** o **5 a la 9**.
5 es la **base** y **9** es el **exponente**.

III. Completen la siguiente tabla de potencias y contesten:

Número n	Cuadrado n^2	Tercera potencia n^3	Cuarta potencia n^4
3	9	27	81
4	16	64	256
10	100	1 000	10 000
0.5	0.25	0.125	0.0625
1.5	2.25	3.375	5.0625
12	144	1728	20 736

a) ¿Qué número multiplicado 3 veces por él mismo da 27? ________
b) ¿Qué número tiene tercera potencia igual a 1 000? ________
c) ¿Qué número tiene segunda potencia igual a 0.25? ________
d) ¿Qué número tiene raíz cuadrada igual a 144? ________
e) ¿Qué número tiene cuarta potencia igual a 256? ________

>>> A lo que llegamos

- La **raíz cúbica** de **64** es **4**, porque **$4^3 = 64$**. La **raíz cúbica** de **64** se escribe así: $\sqrt[3]{64}$

  En general, la **raíz cúbica** de un número ***k*** es otro número que tiene tercera potencia igual a ***k***.
- La **raíz cuarta** de **81** es **3**, porque **$3^4 = 81$**. La **raíz cuarta** de **81** se escribe así: $\sqrt[4]{81}$

En general, la **raíz cuarta** de un número ***k*** es otro número que tiene cuarta potencia igual a ***k***.

f) ¿Cuál es la raíz cúbica de 1 000? ______

g) ¿Cuál es la raíz cuarta de 10 000? ______

h) La raíz ______ de 2.25 es 1.5

Respuestas.
f) 10
g) 10
h) Es la raíz cuadrada.

>>> Lo que aprendimos

Integrar al portafolios. Si advierte que los alumnos tienen dificultades para calcular las potencias que se indican, revise nuevamente con ellos el primer apartado *A lo que llegamos* de esta sesión. Si tienen dificultades para identificar las raíces cúbicas o las raíces cuartas, revise nuevamente con ellos el segundo apartado *A lo que llegamos* de esta misma sesión. En los casos de estas raíces, no se trata de que los alumnos las calculen, sino que a partir de la información que se proporciona en la tabla puedan establecer relaciones y las identifiquen.

1. Completa la siguiente tabla de potencias y contesta:

Número n	Cuadrado n^2	Tercera potencia n^3	Cuarta potencia n^4
0.2	0.04	0.008	0.0016
0	0	0	0
1	1	1	1
1.1	1.21	1.331	1.4641
2	4	8	16
11	121	1 331	14 641

a) ¿Cuál es la raíz cúbica de 0.008? ______

b) ¿Cuál es la raíz cúbica de 0? ______

c) ¿Cuál es la raíz cuarta de 1.4641? ______

d) ¿Cuál es la raíz cuarta de 1? ______

Respuestas.
a) 0.2
b) 0
c) 1.1
d) 1

2. Si la raíz cúbica de 8 es 2 y la de 27 es 3, encuentra una aproximación con dos cifras decimales de la raíz cúbica de 20.

Respuesta. Es 2.71.

3. Completa.

a) En la potencia 7^6, la base es ______ y el exponente es ______ .

b) En la potencia ______ , la base es 8 y el exponente es 13.

c) Al escribir 6 × 6 × 6 × 6 como potencia, la base es ______ y el exponente es ______ .

>>> Para saber más

Sobre el árbol genealógico consulta:
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/historia/histdeltiempo/pasado/famili/p_arbol.htm
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].
Red Escolar, Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa.

125

Respuestas.
a) La base es 7 y el exponente es 6.
b) 8^{13}
c) La base es 6 y el exponente es 4.

Propósito de la sesión. Analizar y representar algebraicamente la relación de dependencia en una relación funcional de la forma $y = ax$.

Organización del grupo. Se sugiere trabajar la sesión en parejas, excepto en el apartado *Lo que aprendimos* y en momentos de discusión grupal.

Propósito del video. Introducir las ideas generales de la ley de Hubble: Velocidad de alejamiento de una galaxia y Constante de Hubble.

1

Propósito de la actividad. En otras secuencias los alumnos han trabajado con cantidades directamente proporcionales. Lo que aprendieron les permitirá contestar con relativa facilidad los incisos a) y b); sin embargo, lo que pretende constituirse en un reto en esta sesión es el inciso c), que es expresar algebraicamente la relación entre las cantidades.
Quizá los alumnos tengan dificultades para lograr una expresión correcta. Si es el caso, no los corrija ni les dé la solución, permítales continuar resolviendo.

Respuestas.

a) A 150 km/s (se multiplica 3 por 50).

b) A 300 km/s.

c) $v = 50d$
También podrían escribir $v = 50 \times d$, aunque en esta expresión se puede confundir el signo de multiplicación con la letra x.

SECUENCIA 27

Relación funcional

En esta secuencia analizarás en situaciones problemáticas la presencia de cantidades relacionadas y representarás esta relación mediante una tabla y una expresión algebraica.

SESIÓN 1

LA EXPANSIÓN DEL UNIVERSO

>>> Para empezar

La expansión del Universo.

Hasta principios del siglo XX los astrónomos pensaron que el Universo había sido siempre del mismo tamaño. Sin embargo, en 1929, el astrónomo Edwin Hubble observó que las galaxias se están alejando unas de otras. Este descubrimiento confirmó una teoría de extraordinaria importancia para la ciencia: la teoría de la Expansión del Universo.

A la velocidad con la que una galaxia se aleja de la Tierra se le llama velocidad de alejamiento y, de acuerdo con el descubrimiento de Hubble, las galaxias que están más lejos de la Tierra son también las que se alejan a mayor velocidad.

>>> Consideremos lo siguiente

Una galaxia que está a 1 megaparsec de distancia se aleja de la Tierra a una velocidad de 50 km/s; otra galaxia que está a 2 megaparsecs se aleja de la Tierra a una velocidad de 100 km/s, y así sucesivamente.

El megaparsec es una unidad que se usa para medir distancias astronómicas.

1 megaparsec es igual a 3.082×10^{18} km que equivale a 3.26 millones de años luz.

A partir de esta información, contesten las siguientes preguntas:

a) ¿A qué velocidad se aleja una galaxia que está a 3 megaparsecs de distancia? ____________

b) ¿A qué velocidad se aleja una galaxia que está a 6 megaparsecs de distancia? ____________

c) Representen con la letra d la distancia en megaparsecs a la que se encuentra una galaxia, y con v a la velocidad de alejamiento, ¿qué expresión algebraica usarían para encontrar la velocidad de alejamiento a partir de la distancia? ____________

Comparen sus respuestas.

126

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las literales.
Antecedentes
En secuencias anteriores los alumnos han expresado algebraicamente reglas de sucesiones numéricas y fórmulas geométricas. En esta secuencia van a expresar algebraicamente relaciones entre dos cantidades que varían.

Propósitos de la secuencia
Analizar en situaciones problemáticas la presencia de cantidades relacionadas y representar esta relación mediante una tabla y una expresión algebraica.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*La expansión del universo* Analizar y representar algebraicamente la relación de dependencia en una relación funcional de la forma $y = ax$.	Video *La expansión del Universo*
2	*Los husos horarios* Analizar y representar algebraicamente la relación de dependencia en una relación funcional de la forma $y = x + ab$.	
3	*Cocina navideña* Analizar y representar algebraicamente la relación de dependencia en una relación funcional de la forma $y = ax + b$.	Aula de medios "Cocina navideña" (Hoja de cálculo)
4	*El recibo de teléfono* Identificar la expresión algebraica correspondiente a una relación funcional de la forma $y = a(x - b) + c$.	

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para encontrar la velocidad con la que se alejan algunas galaxias a partir de las distancias a las que se encuentran.

Distancia (en megaparsecs)	Velocidad de alejamiento (en km/s)
1	50
2	100
3	150
4	200
5	250
6	300
7	350
8	400
9	450
10	500
15	750
20	1000
25	1250
30	1500

a) Para encontrar la velocidad de alejamiento se multiplica la distancia por un número, ¿cuál es ese número? ______

b) Completen la siguiente expresión algebraica para encontrar la velocidad de alejamiento v a partir de la distancia d:

$$v = \boxed{} \times d$$

Comparen sus expresiones algebraicas y comenten:

La velocidad de alejamiento es directamente proporcional a la distancia a la que está la galaxia, ¿cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar la velocidad de alejamiento a partir de la distancia?

II. Usen la expresión algebraica que encontraron para hacer los siguientes cálculos:

a) Si la distancia es igual a 50 megaparsecs, ¿cuál es la velocidad de alejamiento v (en km/s)? ______

b) Si d = 600 megaparsecs, ¿cuál es la v (en km/s)? ______

c) Si d = 100 megaparsecs, ¿cuál es la v (en km/s)? ______

Respuestas. Para hallar los datos faltantes se multiplica la distancia por 50. Si se conoce la velocidad, se divide ésta entre 50.

a) 50

b) $v = 50 \times d$

También se puede poner $v = 50d$

3

Sugerencia didáctica. En este momento puede ser útil recordar el concepto de constante de proporcionalidad que los alumnos trabajaron en la secuencia 15.

Respuestas. La constante de proporcionalidad que se busca permite encontrar la velocidad de alejamiento a partir de la distancia. Por ejemplo, para obtener la velocidad de alejamiento de una galaxia que está a 3 megaparsecs se multiplica por el número 50 y se obtiene que la velocidad es 150 km/s. El número 50 corresponde a la constante de proporcionalidad.

Respuestas.

$v = 50 \times d$

a) $v = 50 \times 50$
v = 2 500 km/s

b) $v = 50 \times 600$
v = 30 000 km/s

c) $v = 50 \times 100$
v = 5 000 km/s

Respuestas.

a) Centauro, porque está más lejos de la Tierra.

b) A 0.1 megaparsecs (también puede decirse: a $\frac{1}{10}$ megaparsecs).

c) A 0.02 megaparsecs (también puede decirse: a $\frac{1}{50}$ megaparsecs).

d) La expresión es $d = 50 \div v$.

Posibles dificultades. Es común que los alumnos vean las fórmulas $v = 50d$ y $d = v \div 50$ como expresiones que no están relacionadas, y por consiguiente, se las aprendan de manera separada. Analice con ellos ambas fórmulas para que puedan relacionarlas.

Sugerencia didáctica. Escriba en el pizarrón la expresión que permite encontrar la velocidad conociendo la distancia ($v = 50d$) y la que permite hallar la distancia conociendo la velocidad de alejamiento ($d = v \div 50$) y analícenlas.

Propongan distintas variables (tanto velocidades de alejamiento como distancia) y utilicen las expresiones algebraicas para hallar la otra variable.

Pregunte a los alumnos en qué se parecen y en qué son distintas las 2 expresiones y si creen que están relacionadas o no.

>>> A lo que llegamos

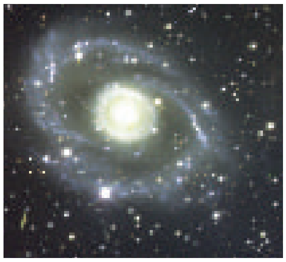
Recuerden que:
Por convención,
$v = 50 \times d$
se escribe
$v = 50d$

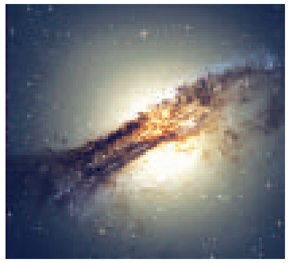
En la expresión algebraica $v = 50d$, conocida como Ley de Hubble, la velocidad de alejamiento **depende** o **está en función** de la distancia. Según dicha fórmula, para encontrar la velocidad de alejamiento se multiplica la distancia por 50. Se dice entonces que entre la velocidad y la distancia hay una **relación funcional**. En este caso, la relación funcional es una relación de proporcionalidad.

III. Contesten las siguientes preguntas:

a) Si la galaxia Centauro se encuentra a 1.31 megaparsecs y la galaxia Andrómeda a 0.7 megaparsecs, ¿cuál de las dos se aleja más rápidamente de la Tierra?

____





b) Si una galaxia se aleja a 5 km/s, ¿a qué distancia estará? ______________

c) ¿A qué distancia estará una galaxia que se aleja a 1 km/s? ______________

d) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite encontrar la distancia (d) a partir de la velocidad de alejamiento (v)? Subráyenla.

$d = 50v$ $\quad$ $d = 50 \div v$ $\quad$ $d \div 50 = v$ $\quad$ $d = v \div 50$

Comparen sus respuestas. Usen la expresión algebraica para verificarlas.

>>> A lo que llegamos

En las relaciones funcionales hay cantidades que **varían** y otras que **no varían**. En la relación funcional dada por la **Ley de Hubble**:

- La distancia d a la que se encuentra cada galaxia **varía**.
- La velocidad v con la que se aleja una galaxia **varía**, dependiendo de la distancia.
- El **número 50** por el que se multiplica la distancia para encontrar la velocidad **no varía**.

A las cantidades que varían se les llama **variables**, y a las que no varían se les llama **constantes**. En este caso:

- **50** es la **constante de proporcionalidad** que permite encontrar la variable v a partir de la variable d.
- $\frac{1}{50}$ es la **constante de proporcionalidad** que permite encontrar la variable d a partir de la variable v.

>>> Lo que aprendimos

1. Un atleta corre la tercera parte de un kilómetro por minuto.

a) Completen la siguiente tabla para calcular la distancia que recorre el atleta en diferentes momentos de una carrera.

Tiempo (en minutos)	Distancia recorrida (en kilómetros)
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3}$
3	1
4	$\frac{4}{3}$
5	$\frac{3}{5}$
6	2
10	$\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$
11	$\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$
60	20

b) Si d es la distancia que recorre el atleta y t el tiempo transcurrido, escriban una expresión algebraica para calcular la distancia que recorre el atleta al variar el tiempo.

____

c) Utilicen la expresión algebraica para responder las siguientes preguntas:

- Si $t = 10$ minutos, ¿cuánto es d en kilómetros? _______________
- Si $t = 12$ minutos, ¿cuánto es d en kilómetros? _______________
- Si $t = 22$ minutos, ¿cuánto es d en kilómetros? _______________

En esta relación funcional:

d) ¿Cuáles son las **variables**? _______________ y _______________

e) ¿Cuál es la **constante de proporcionalidad** que permite encontrar la distancia a partir del tiempo? _______________

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a las actividades de esta sección.

Respuestas.

b) $d = \frac{1}{3}t$

(podrían escribirlo como $d = \frac{1}{3} \times t$).

Hay que fijarse en la tabla, la distancia siempre es una tercera parte del tiempo.

c) $\frac{10}{3}$

$\frac{12}{3}$

$\frac{22}{3}$

Puede pedirles que las escriban como números mixtos.

d) El tiempo (t) y la distancia (d).

e) La distancia que recorre en un minuto, $\frac{1}{3}$ km.

Propósito de la sesión. Analizar y representar algebraicamente la relación de dependencia en una relación funcional de la forma $y = x + ab$.

Organización del grupo. En la sesión hay trabajo individual, en parejas y en equipo.

3

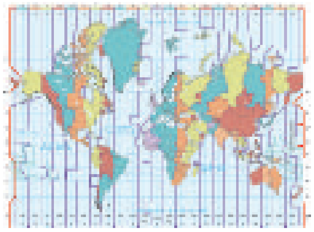
Sugerencia didáctica. Puede aprovechar esta actividad para comentar con los alumnos sobre las distintas maneras de escribir la hora. Por ejemplo:

- Después de la medianoche viene la 1 de la mañana, las 2, 3, etc. Después del mediodía viene la 1 de la tarde, las 2, 3… hasta llegar nuevamente a la medianoche.
- En vez de decir “1 de la mañana” también suele decirse “1 a.m.”. Las letras “a.m.” significan “antes del meridiano”, es decir, antes del mediodía. Después del mediodía se dice “p.m.” que significa “pasado meridiano”.
- También se cuentan las horas empezando por las 0:00 h (medianoche). Se va aumentando de una en una hasta las 23:00 h, y la que sigue es otra vez las 0:00 h. Por eso, después de las 12 de la tarde siguen las 13:00 h (la 1 de la tarde), las 14:00 h (las 2 de la tarde), y así sucesivamente.

SESIÓN 2

LOS HUSOS HORARIOS

>>> Para empezar



Debido al movimiento de rotación de la Tierra, hay diferencias de horario. ¡Esto quiere decir que mientras en un lugar del mundo son las 12 del día, en otro son las 12 de la noche!

Por ejemplo, cuando en la ciudad de Nueva York en EEUU son las 7:00 h (7 de la mañana), en la ciudad de Chihuahua en México son las 6:00 h (6 de la mañana).

Para calcular las horas, el planeta Tierra se ha dividido en 24 franjas llamadas **husos horarios**. A cada uno de los husos horarios le corresponde una hora distinta, de manera que en el planeta hay 24 horas distintas al mismo tiempo. Así, cuando en Nueva York son las 00:00 h (12 de la noche) en Chihuahua son las 23:00 h (11 de la noche).

Es importante notar que es común decir 24:00 h o 12 de la noche en lugar de 0:00 h. En el momento en que se completan 24 horas de un día se reinicia el conteo a 0:00 h (un minuto después de las 23 h con 59 min vienen otra vez las 0:00 h), por lo tanto, las 0:00 h y las 24:00 h son dos formas de escribir la misma hora.

>>> Consideremos lo siguiente

Comenten el siguiente problema:

María vive en la ciudad de Chihuahua y su papá en la ciudad de Nueva York. Si el papá de María trabaja de 7 de la mañana (7:00 h) a 3 de la tarde (15:00 h), ¿creen que María encontrará a su papá en casa si lo llama a las 6 de la mañana (hora de Chihuahua)?

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para calcular la hora en la ciudad de Nueva York a partir de la hora en Chihuahua.

Hora en Chihuahua	Hora en Nueva York
6	7
7	8
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	

a) ¿Qué hora es en Nueva York si en Chihuahua son las 15:00 h?

b) Si el papá de María hace una hora cuarenta y cinco minutos en el trayecto del trabajo a su casa, ¿a partir de qué hora (de Chihuahua) puede hablarle María para encontrarlo de regreso en casa?

c) ¿De qué hora a qué hora de Chihuahua, María no va a encontrar a su papá? ¡Cuidado: la respuesta no es de 7 de la mañana a 3 de la tarde!

130

Propósito de la actividad. La intención es que al llegar al inciso c) los alumnos expresen algebraicamente la relación entre la hora de Chihuahua y la hora de Nueva York. Déles tiempo para trabajar la situación y no les proporcione la respuesta.

Respuestas. Para conocer la hora de Nueva York hay que aumentar una hora a la de Chihuahua.

a) Las 16:00 h.

b) A partir de las 15:45 de Chihuahua. El papá sale a las 15:00 h (hora de Nueva York), y tras 1 hora y 45 minutos de trayecto, llega a su casa a las 16:45 (de Nueva York), que son las 15:45 de Chihuahua.

c) De las 4:15 de la mañana a las 15:45 (hora de Chihuahua), tomando en cuenta los trayectos de ida y vuelta.

II. Llamen x a la hora en Chihuahua y y a la hora en Nueva York. Si la hora en Chihuahua está entre las 00:00 h y las 23:00 h, ¿cuál de las siguientes expresiones permite calcular la hora de Nueva York a partir de la hora de Chihuahua? Subráyenla.

a) $x = y + 1$ b) $y = x - 1$ c) $y = x + 1$ d) $x = y - 1$

Comparen sus expresiones algebraicas.

III. Si la hora en Chihuahua está entre 23:00 h y 24:00 h, por ejemplo las 23:30 h, la expresión algebraica $y = x + 1$ NO permite encontrar la hora en Nueva York (y) a partir de la hora en Chihuahua (x), pues se pasa de las 24:00 h.

a) Cuando la hora en Chihuahua está entre las 23:00 h y las 24:00 h, ¿qué cálculos hay que hacer para obtener la hora en Nueva York a partir de la hora en Chihuahua?

____

b) Escriban una expresión que nos permita encontrar la hora de Nueva York (y) a partir de la hora en Chihuahua (x), cuando la hora en Chihuahua está entre las 23:00 h y las 24:00 h. ____________________

Comparen sus expresiones.

IV. Para obtener la hora de Nueva York a partir de la hora de Chihuahua, cuando en Chihuahua pasan de las 23:00 horas, se resta 23 a la hora de Chihuahua. Por ello, la expresión es $y = x - 23$. Usando la expresión algebraica $y = x + 1$ (o bien, la expresión $y = x - 23$), contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Qué hora es en Nueva York si en Chihuahua son las 23:45 h? 0:45 h

b) ¿Qué hora es en Chihuahua si en Nueva York son las 0:30 h? 23:30 h

c) ¿Qué hora es en Nueva York si en Chihuahua son las 22:59 h? 23:59 h

d) ¿Qué hora es en Nueva York si en Chihuahua son las 0:00 h? 1:00 h

>>> A lo que llegamos

En la expresión algebraica $y = x + 1$, la variable y **depende** o **está en función** de la variable x. Al número **1**, que siempre hay que sumar a la x para obtener la y, se le llama **constante**.

V. Cuando en Los Ángeles son las 4:00 h, en Chihuahua son las 6:00 h y en Tokio (la capital de Japón) son las 21:00 h. Completen la siguiente tabla para calcular las horas en Los Ángeles y Tokio a partir de la hora en Chihuahua.

Posibles dificultades. Los estudiantes podrían sentirse confundidos porque la expresión $y = x + 1$ no permite encontrar la hora de Nueva York. Explíqueles que cuando se usa esta expresión se pasa de las 24:00 h y que, pasadas las 24:00 h se reinicia el conteo de horas. Por ejemplo, en lugar de ser las 24:30, en Nueva York son las 00:30.
En el inciso a) es posible que digan que la operación que se hace es sumar 1 y quitarle el 24. Eso es correcto, pero no es una operación algebraica. No los corrija, y permítales pasar al inciso b).
En el inciso b) necesitarán interpretar el "quitarle el 24" como un resto 24. Si no surge en el grupo, dígaselos.
Al final, los alumnos deberán conjugar esta última observación con el sumar 1 y así obtener: $y = x - 23$

Respuestas. La hora de Los Ángeles es igual a la hora de Chihuahua menos 2. La hora de Tokio es igual a la hora en Chihuahua más 15.

a) Las 18:00 h.

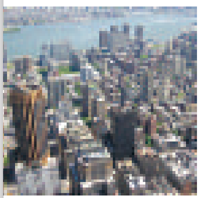
b) Las 17:00 h.

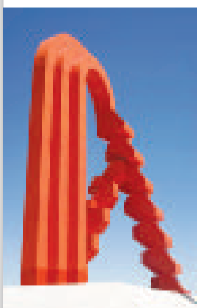
c) $y = x - 2$

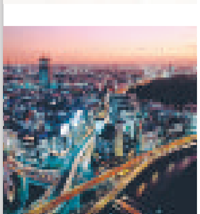
d)

i) $z = x + 15$

ii) $z = x - 9$







Hora en Los Ángeles	Hora en Chihuahua	Hora en Tokio
4	6	21
5	7	22
	8	
	9	
	10	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	18	
	19	

a) ¿Qué hora es en Los Ángeles cuando son las 20 h en Chihuahua? ______

b) ¿Qué hora es en Tokio cuando son las 0 h en Los Ángeles? ______

c) Escriban una expresión algebraica para encontrar la hora en Los Ángeles a partir de la hora en Chihuahua, cuando la hora en Chihuahua está entre las 02:00 h y las 24:00 h. Llámenle x a la hora en Chihuahua y y a la hora en Los Ángeles.

______

d) Llamen x a la hora en Chihuahua y z a la hora en Tokio. Escriban una expresión algebraica para encontrar la hora en Tokio a partir de la hora en Chihuahua en cada caso:

i) Cuando la hora en Chihuahua está entre las 00:00 h y las 9:00 h.

______

ii) Cuando la hora en Chihuahua está entre las 09:00 h y las 24:00 h.

______

Comparen sus expresiones algebraicas.

VI. Contesten las siguientes preguntas, usando las expresiones algebraicas que encontraron.

a) Si en Chihuahua son las 24:00 h, ¿qué hora es en Los Ángeles? ______

b) Si en Chihuahua son las 3:00 h, ¿qué hora es en Los Ángeles? ______

c) Si en Chihuahua son las 9:00 h, ¿qué hora es en Tokio? ______

d) Si en Tokio son las 24:00 h, ¿qué hora es en Chihuahua? ______

>>> A lo que llegamos

En la expresión algebraica $y = x - 2$, la variable y depende o está en función de la variable x. El número 2, que siempre hay que restar a la x para obtener la y, es la constante de la relación funcional.

VII. La expresión algebraica $z = x + 15$ describe una relación funcional entre la hora en Chihuahua (x) y la hora en Tokio (z).

a) ¿Cuáles son las **variables** en esta relación funcional?

b) ¿Cuál es la **constante** en esta relación funcional?

>>> Lo que aprendimos

1. Luis tiene tres hermanos: Rocío, Juan y Fernanda. Completen la siguiente tabla con las edades de los hermanos de Luis.

Edad de Luis (años)	Edad de Rocío (años)	Edad de Juan (años)	Edad de Fernanda (años)
6	10	8	1
7	11	9	2
8	12	10	3
10		12	5
12	16	14	
13		15	8
14	18		
20			
25		27	

a) Cada integrante del equipo escoja a uno de los hermanos de Luis y escriba en su cuaderno una expresión algebraica para calcular la edad del hermano que escogió a partir de la edad de Luis.

b) Verifiquen entre todos si las tres expresiones algebraicas (una para cada hermano) son correctas.

133

Respuestas.
a) 22:00 h.
b) 1:00 h.
c) 0:00 h.
d) 9:00 h.

Respuestas.
a) z (la hora de Tokio) y x (la hora de Chihuahua).
b) 15 (las horas de diferencia entre Chihuahua y Tokio).

Propósito de la actividad. Se espera que completar la tabla no sea difícil para los alumnos, el reto consiste en la escritura de las expresiones algebraicas.

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos una copia de sus respuestas a las actividades del número 1.

Posibles dificultades. Es común que los alumnos piensen que si se cambia la letra que representa a una variable la expresión será incorrecta. Es importante que sepan que se pueden poner letras distintas, siempre y cuando esté claro qué representa cada una. Usted puede escribir en el pizarrón las expresiones que hayan elaborado y cambiarles las letras para que ellos digan si es correcto o no.

Respuestas.
a) (r es Rocío, j es Juan, f es Fernanda y l es Luis).
Rocío: $r = l + 4$
Juan: $j = l + 2$
Fernanda: $f = l - 5$
c) r, j, f y l
(o las letras que ellos hayan usado).
d) 4, 2 y 5.

Respuestas.

a) 5 cm.

b) 9 cm.

c) $a = b - 3$

d) a y b.

e) 3

Posibles dificultades. Los alumnos podrían pensar que la expresión algebraica es $a = b - 3$, porque saben que la base es 3 cm mayor que la altura. Revise sus respuestas y si cometieron ese error pídales que la utilicen con los valores de los incisos a) y b) para que comprueben si es correcta.

Propósito de la sesión. Analizar y representar algebraicamente la relación de dependencia en una relación funcional de la forma $y = ax + b$.

Organización del grupo. La sesión se trabaja en parejas, habiendo momentos de discusión grupal.

Propósito de la actividad. Al igual que en la sesión anterior, lo que se pretende es que los alumnos escriban expresiones algebraicas que les permitan modelar la situación y encontrar los valores de las variables.

Respuestas.

a) 165 minutos.

b) 210 minutos.

c) 187.5 minutos.

d) Siendo t el tiempo de horneado (en minutos) y p el peso del pavo (en kilos), $t = 15p + 90$
Se leería "tiempo de horneado es igual a peso por 15 más 90".

c) En conjunto, en las expresiones que encontraron hay cuatro **variables** distintas, ¿cuáles son?

_____________ , _____________ , _____________ y _____________

d) ¿Cuáles son las **constantes** en estas relaciones funcionales?

_____________ , _____________ y _____________

2. La longitud de la base de un rectángulo es 3 cm más grande que su altura.

a) ¿Cuánto medirá la base si la altura mide 2 cm? _____________

b) Y si la base midiera 6 cm, ¿cuánto mediría la altura? _____________

c) Encuentra una expresión algebraica para calcular la medida de la altura a partir de la medida de la base. _____________

d) ¿Cuáles son las variables en esta relación funcional? _____________

e) ¿Cuál es la constante? _____________

SESIÓN 3

COCINA NAVIDEÑA

>>> Para empezar

Existen muchos problemas prácticos en los que interviene una relación funcional. En esta sesión abordaremos algunos de ellos.

>>> Consideremos lo siguiente

En un libro de cocina aparece la siguiente receta para cocinar un pavo:

PAVO AL HORNO

Envuelva el pavo en papel aluminio;
hornee el pavo 15 minutos
por cada kilogramo de pavo y
sume a esto 90 minutos extras.

a) ¿Cuánto tiempo de horneado requiere un pavo de 5 kg?

____

b) ¿Cuánto tiempo de horneado requiere un pavo que pesa 8 kg? _____________

c) ¿Cuánto tiempo de horneado requiere un pavo que pesa 6.5 kg? _____________

d) Escriban una expresión algebraica para calcular el tiempo de horneado de un pavo de cualquier peso.

____

Comparen sus expresiones algebraicas.

134

Posibles respuestas. Para responder el inciso d) los alumnos podrían escribir cosas como "Se multiplica el peso por 15 y al resultado se le suma 90", que si bien son correctas, no son expresiones algebraicas. Permítales esas respuestas siempre y cuando sean correctas, y cuando terminen de resolver el apartado *Manos a la obra* dígales que las expresen algebraicamente.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para calcular el tiempo de horneado que requiere un pavo con diferentes pesos:

Peso del pavo (kg)	Tiempo de horneado (min)
1	105
2	120
2.5	127.5
3	135
4	150
4.5	157.5
6	180
6.5	187.5
7	195
10	240

a) En esta relación funcional hay un número por el cual se multiplica cada kilogramo de pavo, ¿cuál es ese número? ______

b) ¿Cuál es el número que hay que sumar siempre para obtener el tiempo total de horneado? ______

c) Completen la siguiente expresión algebraica para encontrar el tiempo *t* a partir del peso *p*:

$$t = \boxed{} \times p + \boxed{}$$

II. Comparen sus expresiones algebraicas y comenten.

a) ¿Cuáles son las variables en esta relación funcional?

b) ¿Cuáles son las constantes en esta relación funcional?

III. Usen la expresión algebraica que encontraron para calcular los tiempos de horneado de pavos con los siguientes pesos:

a) Si el pavo pesa 2.5 kg, ¿cuántos minutos debe hornearse? ______

b) Si $p = 3.75$ kg, ¿cuánto vale *t* (en minutos)? ______

c) Si $p = 8.4$ kg, ¿cuánto vale *t* (en minutos)? ______

Respuestas.
a) 15
b) 90
c) $t = 15p + 90$

Respuestas.
a) El tiempo de horneado *t* y el peso del pavo *p*.
b) 15 y 90.

Integrar al portafolios. Guarde las respuestas de los alumnos a la actividad III y valórelas para ver si han comprendido.

Respuestas. Cuando se conoce el peso, se multiplica éste por 15 y se le suma 90. Cuando se conoce el tiempo de horneado, se le resta 90 y se divide entre 15.

Posibles dificultades. La expresión (algebraica o no) que los alumnos escribieron en la sección anterior funciona para cuando se quiere hallar el tiempo de horneado conociendo el peso del pavo. Sin embargo, en la tabla se les plantea también el caso inverso: averiguar el peso del pavo conociendo el tiempo de horneado.

Si lo cree conveniente, repasen juntos la expresión original $t = 15p + 90$ (o equivalentes), y analicen de qué manera podrían averiguar el peso. Puede preguntarles: "Si sabemos que el tiempo de horneado es de 105 minutos, ¿cómo pueden estar seguros de que el pavo pesa 1 kg?". Trabajar con valores que ya conocen para las variables puede ser de ayuda para resolver la cuestión.
Otra dificultad que está asociada a lo anterior es la de desconocer en qué orden deben hacerse las operaciones.

Saben que el tiempo de horneado es igual al peso por 15 más 90, pero conociendo el tiempo de horneado ¿qué debe hacerse primero, restar los 90 minutos o dividir entre 15? Si los alumnos tuvieran esa duda, repasen juntos la expresión que escribieron antes.

Sugerencia didáctica. Cuando terminen de llenar la tabla, pida a los alumnos que expresen los tiempos de horneado en horas, minutos y segundos, especialmente en los casos en que el resultado es un número como 157.5 minutos.

Respuestas.

a) Necesita 90 minutos más, porque la diferencia es de 6 kg, entonces $6 \times 15 = 90$.

b) No es cierto, hay que tener en cuenta la otra constante: añadir 90 minutos al tiempo de horneado. Esto puede verse en el ejemplo anterior, mientras que para el pavo de 3 kg el tiempo de horneado es de 135 minutos, para el de 9 kg es de 225 minutos; 9 es el triple de 3, pero el tiempo de horneado no es el triple.

Posibles dificultades. Es un error común confundir una constante (multiplicativa) con una constante aditiva. Sugiera a los alumnos que lean con cuidado las 2 expresiones algebraicas para que analicen qué es lo que hacen el 80 y el 16 en cada caso.

En la primera el tiempo de horneado se obtiene así: cada kilo de pavo se multiplica por 80 minutos y luego se añaden 16 minutos. Aquí el 80 es una constante (se multiplica) y el 16 es una constante aditiva (se suma).

En la segunda el tiempo de horneado se obtiene de esta manera: cada kilo de pavo se multiplica por 16 y luego se añaden 80 minutos. Aquí el 16 es una constante (se multiplica) y el 80 es una constante aditiva (se suma). Ésta es la expresión correcta.

Si los alumnos no notan la diferencia o tienen dificultades para elegir la expresión correcta, pídales que primero calculen el tiempo de horneado de un pavo de 7 kg a partir de la receta y luego, utilizando cada una de las expresiones algebraicas.

SECUENCIA 27

IV. Comparen sus respuestas y contesten las siguientes preguntas:

a) Si un pavo pesa 9 kg y otro pesa 3 kg, ¿cuánto tiempo de horneado más necesita el pavo de 9 kg? __________

b) Si un pavo pesa el triple que otro, ¿será cierto que el tiempo de horneado que requiere el más chico es la tercera parte de lo que requiere el mayor? __________

¿Por qué? __________

>>> A lo que llegamos

La expresión algebraica $t = 15\,p + 90$ es una **relación funcional**: el valor de la variable t **depende** del valor de la variable p.

La **variable** p se multiplica por **15** y al resultado se le suma **90**. Ambos números, el **15** y el **90**, son **constantes**.

V. En otra receta se sugiere hornear 16 minutos por cada kilogramo de pavo y agregar 80 minutos extras. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permitiría encontrar el tiempo total de horneado (t) para cualquier cantidad de kilogramos de pavo (p)?

Recuerden que:
Se acostumbra suprimir el símbolo **×** (por) para no confundirlo con la **x** (equis).

- $t = 80\,p + 16$
- $t = 16\,p + 80$

a) ¿Cuáles son las variables en esta relación funcional? ______ y ______

b) ¿Cuáles son las constantes? ______ y ______

>>> Lo que aprendimos

En la expresión algebraica $y = 3\,x + 1$

a) ¿Cuáles son las variables? ______ y ______

b) ¿Cuáles son las constantes? ______ y ______

c) Completen la tabla de la derecha usando la expresión algebraica:

x	y
1	4
1.5	5.5
2	7
5	16
10	31
11.6	35.8
20	61
21	76

136

Respuestas.

a) *y*, *x*.

b) 3, 1.

c) x se multiplica por 3 y se suma 1.

Para hallar el valor de x cuando y es igual a 76 deben realizarse las operaciones inversas y en orden contrario: primero restar 1 y luego dividir entre 3, o bien, plantear la ecuación $3x + 1 = 76$ y resolverla.

EL RECIBO DE TELÉFONO

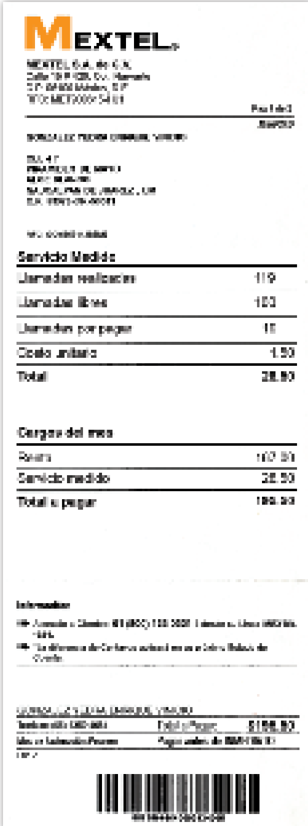
SESION 4

Propósito de la sesión. Identificar la expresión algebraica correspondiente a una relación funcional de la forma $y = a(x - b) + c$.

Organización del grupo. La sesión se resuelve en parejas, con momentos para comentarios grupales, a excepción del último apartado, que es individual.

>>> Para empezar

En esta sesión continuarás con el estudio de las relaciones funcionales. Estudiarás un problema práctico: el costo mensual del servicio telefónico. El costo del servicio telefónico depende de la renta fija y de la cantidad de llamadas que se realicen en el mes.



>>> Consideremos lo siguiente

La renta mensual del servicio telefónico es de \$167.00. Esta renta incluye 100 llamadas. Por ejemplo, si en el recibo aparecen 125 llamadas realizadas, se paga: la renta mensual más el costo de las 25 llamadas adicionales. El costo de cada llamada adicional es de \$1.50.

a) ¿Cuál es el costo mensual del servicio si se hacen 125 llamadas?

b) Completen la siguiente tabla para calcular el costo mensual del servicio telefónico a partir del número de llamadas.

Total de llamadas realizadas	Costo mensual (en pesos)
100 o menos	167
101	168.50
110	182
119	195.50
120	197
121	198.50
125	204
150	242
168	269
175	279.50
180	287

c) ¿Cuál es el mayor número de llamadas que se pueden hacer con \$200.00?

Respuesta. 122 llamadas. Quitando la renta quedan \$33, con los que se pueden pagar 22 llamadas adicionales.

Comparen sus resultados y comenten sus procedimientos.

¿Qué operaciones hicieron para encontrar los costos a partir del número de llamadas?

137

Respuesta.

a) \$ 204.50. Se hicieron 25 llamadas adicionales y cada una cuesta \$1.50, así que son \$ 37.50 de las llamadas más los \$167 de la renta.

Propósito de la pregunta. Se espera que los alumnos describan el procedimiento que utilizaron para llenar la tabla con la intención de que esa descripción les sirva para escribir posteriormente una expresión algebraica. Por ello es muy importante que comenten varios procedimientos (qué operaciones hicieron, con cuáles cantidades y en qué orden) y que revisen si son equivalentes o no.

Respuestas.

a) Entre 0 y 100 llamadas.
b) $1.50 por una llamada, $168.50 en total.
c) $3.00 por las 2 llamadas, $170 en total.
d) 81 llamadas adicionales y hay que pagar $ 288.50 de costo mensual.

Sugerencia didáctica. La frase que los alumnos escribieron sobre las operaciones realizadas para llenar la tabla les será de utilidad para elegir la opción correcta, pero si eligen otra no los corrija. Las actividades que se les proponen más adelante les ayudarán a darse cuenta del error.

Respuestas.
La primera opción es incorrecta porque se multiplican todas las llamadas realizadas por $1.50, pero hay que recordar que ese es el costo de las llamadas adicionales, es decir de aquellas llamadas que excedan las 100 incluidas en la renta mensual.
La segunda también es incorrecta porque se cambia de lugar a las 2 constantes. Considera a 167 como una constante (que se multiplica), cuando en realidad es una constante aditiva (se suma), y viceversa.
La tercera opción es correcta porque es la que considera que al número total de llamadas (***x***) hay que restarle 100 (las que incluye la renta mensual) y al resto multiplicarlo por 1.50 y sumarle 167.

Posibles dificultades. Para algunos alumnos la tercera opción puede resultar difícil de interpretar por el uso del paréntesis. Explíqueles que el paréntesis sirve para no confundir el orden en el que deben efectuarse las operaciones en la expresión (en este caso, la multiplicación y la resta). Lo que va dentro del paréntesis debe resolverse primero, así que la expresión puede leerse como "el costo mensual es igual al número total de llamadas menos 100, el resultado se multiplica por 1.50 y a eso se le suman 167".

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas:

a) Si sólo se pagan $167.00 (la renta mensual), ¿cuántas llamadas se han hecho?

____

b) ¿Cuánto hay que pagar de costo mensual por 1 llamada adicional? ________.

c) ¿Cuánto hay que pagar por 2 llamadas adicionales? ________.

d) Si se hacen 181 llamadas en total, ¿cuántas llamadas adicionales se han hecho? ________ ¿Cuánto hay que pagar de costo mensual? ________.

II. ¿Con cuál de las siguientes expresiones algebraicas se puede calcular el costo mensual del servicio telefónico cuando se hacen más de 100 llamadas? En estas expresiones se usa la letra ***x*** para representar el total de llamadas y la letra ***y*** para representar el costo mensual del servicio telefónico.

El paréntesis de la expresión $y = 1.50\ (x - 100) + 167$ *indica que primero hay que restar* **100** *al número* ***x*** *y, después, multiplicar el resultado por* **1.50**

$y = 1.50\,x + 167$

$y = 167\,x + 1.50$

$y = 1.50\ (x - 100) + 167$

a) Comparen las expresiones algebraicas que escogieron y comenten por qué creen que son correctas.

b) Con la expresión que escogieron calculen el costo mensual del teléfono, si en el recibo estuvieran registrados los siguientes números totales de llamadas:

$x = 100$, $y =$ 167

$x = 121$, $y =$ 198.50

$x = 125$, $y =$ 204

$x = 175$, $y =$ 279.50

$x = 200$, $y =$ 317

$x = 250$, $y =$ 392

c) Comparen sus resultados con los que obtuvieron en la tabla, y comenten:

Si el número de llamadas aumenta al doble, ¿también aumentará al doble el costo mensual?

Sugerencia didáctica. Permita que los alumnos utilicen la expresión algebraica que hayan elegido, aunque sea incorrecta. Después comparen los resultados, si hubo alumnos que eligieron una expresión algebraica incorrecta se toparán con respuestas distintas. Ayúdelos a analizar las expresiones algebraicas para encontrar la correcta y corrijan los resultados de esta parte.

Respuesta.
La relación funcional entre el costo mensual y el número total de llamadas realizadas no es de proporcionalidad directa. Sugiera a los alumnos que analicen los siguientes ejemplos con los costos que acaban de calcular, en los que al doble de llamadas no corresponde el doble de costo mensual:

- Por hacer 100 llamadas se pagan $167; por hacer 200 se pagan $317.
- Por hacer 125 llamadas se pagan $204; por hacer 250 se pagan $392.

III. El costo mensual del teléfono depende del número total de llamadas que se realizan. Ésta es una relación funcional. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las variables? ______ ______

b) En esta relación funcional hay tres constantes, ¿cuáles son?

______ ______ ______

>>> Lo que aprendimos

Un bebé nació pesando 3 kg. Durante su primer año de vida su peso aumentó 0.5 kg cada mes.

Completa la siguiente tabla para calcular el peso del bebé.

Edad del bebé (meses)	Peso del bebé (kilogramos)
Al nacer	3
1	3.5
2	4
3	4.5
4	5
5	5.5
6	6
7	6.5
8	7
9	7.5

a) Si se representa con la letra y el peso del bebé y con x la edad del bebé (en meses), escribe una **expresión algebraica** para calcular el peso del bebé durante su primer año de vida. ______

b) Utiliza la expresión algebraica para calcular el peso del bebé a partir de las siguientes edades:

$x = 7$ (meses), $y =$ 6.5 kilogramos

$x = 8$ (meses), $y =$ 7 kilogramos

$x = 9$ (meses), $y =$ 7.5 kilogramos

$x = 12$ (meses), $y =$ 9 kilogramos

>>> Para saber más

Sobre la expansión del Universo consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Concepción Ruiz y Sergio de Régules. *Crónicas algebraicas*. México: SEP/ Santillana, Libros del Rincón, 2002, pp. 44-45.

También puedes consultar:
http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/01/html/sec_11.html
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Respuestas.
a) x (cantidad total de llamadas) y y (costo mensual).
b) 1.50 (costo por cada llamada adicional), 167 (renta mensual) y 100 (las llamadas que se incluyen en la renta mensual).

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de todo el apartado *Lo que aprendimos* y dígales que también anoten cuáles son las constantes en este caso y de qué tipo son, y cuáles son las variables.

Sugerencia didáctica. Aunque en este caso los datos sobre el peso del bebé muestran un aumento constante de 0.5 kg por mes, regularmente no sucede así. Coméntelo con los alumnos.

Respuestas. El bebé aumenta cada mes 0.5 kg, entonces tendríamos que su peso es igual a su edad en meses por 0.5; pero hay que agregar los 3 kg que pesó al nacer, por lo tanto la expresión sería: $y = 0.5x + 3$

Propósito de la sesión. Trazar un círculo, dados 2 puntos. Identificar cuántos círculos se pueden trazar bajo esas condiciones.

Organización del grupo. Se sugiere que la sesión se trabaje en parejas.

Materiales. Regla y compás.

Propósito de la actividad. Hay dos aspectos centrales en la resolución de este problema:

- Que los alumnos tracen 2 circunferencias distintas y verifiquen que cumplan con la condición de que cada una de ellas pase por ambos puntos (A y B).
- Que describan el procedimiento que siguieron para encontrar el centro de ambas circunferencias.

Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, aclare a los alumnos que el pasar por los 2 puntos no significa tomar uno como centro y el otro como radio, sino que ambos puntos deben ser parte de la circunferencia.

Posibles procedimientos. Una forma de resolver es por ensayo y error, esto es, abrir el compás haciendo una estimación del radio, probar si con ese radio es posible trazar una circunferencia que pase por los 2 puntos. Si no es así, cerrar o abrir más el compás, según lo requieran, hasta aproximarse lo más posible a la circunferencia buscada. El trazo de la segunda circunferencia podría llevarse a cabo de la misma manera.
Una forma más sistemática de trazar la primera circunferencia es la que se presenta en la actividad II del apartado *Manos a la obra*. La segunda circunferencia puede resultarles más complicada de encontrar, pues necesitan situar un punto que esté a la misma distancia de los puntos A y B. Esto puede hacerse trazando la mediatriz que ya estudiaron en la secuencia 12, pero es poco probable que los alumnos recurran a ello.

SECUENCIA 28

Construcción de círculos y circunferencias

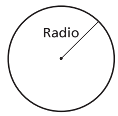
En esta secuencia construirás círculos que cumplan condiciones dadas a partir de diferentes datos.

SESIÓN 1

LAS CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR DOS PUNTOS

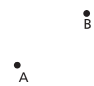
>>> Para empezar

Una **circunferencia** está formada por todos los puntos que están a la misma distancia, llamada **radio**, de un punto fijo llamado **centro.**



>>> Consideremos lo siguiente

Tracen dos circunferencias que cumplan la siguiente condición: pasar por los dos puntos siguientes.



Escriban en su cuaderno cómo encontraron los puntos que utilizaron como centro de cada circunferencia.

Comenten en grupo sus procedimientos.

140

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Formas geométricas.
Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos aprendieron a construir círculos a partir de la medida del radio. Asimismo, aprendieron a ubicar el centro de una circunferencia utilizando 2 recursos: por medio del punto en el que se cruzan los ejes de simetría, y mediante el trazo de perpendiculares de cuerdas no paralelas. En esta secuencia aprenderán otras formas de construir círculos, y para ello requerirán apoyarse en el trazo de mediatrices que trabajaron en la secuencia 12.

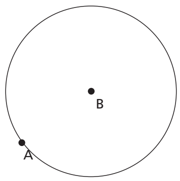
Propósitos de la secuencia
Construir círculos que cumplan condiciones dadas a partir de diferentes datos.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*Las circunferencias que pasan por dos puntos* Trazar un círculo, dados dos puntos. Identificar cuántos círculos se pueden trazar bajo esas condiciones.	Video *Las circunferencias que pasan por dos puntos*
2	*Cuerdas y circunferencias* Identificar en qué casos es posible trazar un círculo dadas dos cuerdas.	Interactivo "Construcción de circunferencias"
3	*Tres puntos y una circunferencia* Identificar en qué casos es posible trazar un círculo dados tres puntos.	Interactivo "Construcción de circunferencias con la mediatriz" Aula de medios "Tres puntos y una circunferencia" (*Geometría dinámica*)

>>> Manos a la obra

I. Rosa consideró los dos puntos de la siguiente manera:

- Tomó como centro el punto B y trazó la circunferencia tomando como radio la distancia del punto A al punto B.



¿Por qué esta circunferencia **no** cumple la condición pedida? ____________

____

____

Respuesta. Porque no pasa por el punto B, pues se tomó a éste como centro.

II. Para hallar las dos circunferencias, Guillermo hizo lo siguiente.
Para la primera circunferencia:

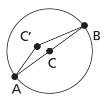
- Trazó el segmento que une los dos puntos, obtuvo el punto medio del $\overline{AB}$ (punto C) y trazó la circunferencia tomando como radio la distancia del punto C al punto A.

Comenten en equipo, ¿por qué esta circunferencia **sí** cumple la condición pedida?

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que hagan los mismos trazos que hizo "Guillermo", una vez que hayan obtenido la circunferencia, invítelos a comentar por qué esta circunferencia sí cumple con la condición dada.
Enfatice las ideas que se sugieren en seguida para enriquecer los argumentos de los alumnos:

- Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son radios de la circunferencia.
- $\overline{AC} = \overline{BC}$, es decir, ambos radios miden lo mismo.
- Dado que los dos radios son iguales, entonces los puntos A y B son parte de la circunferencia, y ésta cumple la condición de pasar por los puntos A y B.

Para hallar el centro de la segunda circunferencia, Guillermo tomó un punto C' muy cerca de C.



a) Midan la distancia del punto A al punto C': ____________

b) Midan la distancia del punto B al punto C': ____________

Comenten en equipo, ¿por qué el punto C' **no** es el centro de la circunferencia?

141

Respuestas. Las medidas de las distancias en ambos incisos no son las mismas: AC' ≠ BC'.

Sugerencia didáctica. Una vez que los alumnos hayan expresado sus argumentos, enfatice lo siguiente:

- El punto C' se colocó de manera arbitraria.
- Los segmentos $\overline{AC'}$ y $\overline{BC'}$ tienen medidas distintas.
- Dado que son segmentos desiguales, no son radios de la circunferencia (todos los radios miden lo mismo), por lo tanto el punto C' no es centro de la circunferencia que pasa por los puntos A y B.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos:

- Utilicen la propiedad de la mediatriz que consiste en que todos los puntos que la conforman equidistan de los extremos del segmento.
- Identifiquen que el segmento que une el punto A con cualquiera de los centros (puntos sobre la mediatriz),es igual al segmento que une al punto B con cualquiera de los centros (puntos sobre la mediatriz); por lo tanto, la circunferencia sí cumple la condición de pasar por los puntos A y B.

Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, pida a los alumnos que revisen la secuencia 12 para que recuerden el procedimiento para trazar la mediatriz.

Respuesta. Las distancias de A y B al punto E son las mismas: AE = BE. Las distancias de A y B al punto F son las mismas: AF = BF.

Respuesta. La distancia de los nuevos puntos sobre la mediatriz hacia A y B es la misma (aunque diferente a las del inciso f).

III. A continuación se explica una manera de trazar las circunferencias que pasan por A y B. Tracen primero el segmento que une los puntos A y B:

*Recuerden que: El conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento forma una recta llamada **mediatriz** del segmento.*

a) En la secuencia 12 estudiaron cómo trazar la mediatriz de un segmento. Tracen la mediatriz del $\overline{AB}$.

b) Ubiquen un punto sobre la mediatriz, llámenlo D.

c) Midan lo siguiente:

Distancia del punto A al punto D. ________________

Distancia del punto B al punto D. ________________

d) Tracen una circunferencia con centro en D y que pase por A y por B.

e) Ubiquen otros dos puntos sobre la mediatriz (llámenlos E, F) y tracen las circunferencias con esos puntos como centro, y que pasen por A y por B.

f) En las dos circunferencias que acaban de trazar midan las siguientes distancias:

Distancia de A a E. ________ Distancia de B a E. ________

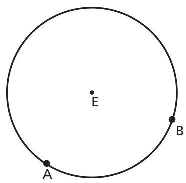
Distancia de A a F. ________ Distancia de B a F. ________

g) Tomen otro punto sobre la mediatriz, ¿cómo son las distancias de ese punto a los puntos A y B? ________________

Comenten en grupo la siguiente pregunta:

¿Habrá algún otro punto de la mediatriz del $\overline{AB}$ que no sea centro de una circunferencia que pase por A y por B?

IV. En la siguiente circunferencia que pasa por los puntos A y B está marcado su centro (punto E).



a) Tracen el $\overline{AB}$ y su mediatriz.

b) ¿Cómo son las distancias del punto E al punto A y del punto E al punto B? ________________

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen que cualquier punto de la mediatriz es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos A y B; por lo tanto, pueden trazarse distintas circunferencias que pasen por los puntos A y B, y el centro de cada una de ellas siempre será un punto de la mediatriz.

Como el punto E equidista de los puntos A y B, entonces está sobre la mediatriz del $\overline{AB}$.

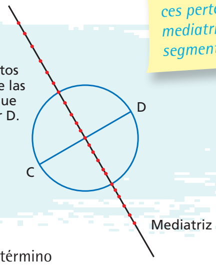
c) Observen que al trazar la mediatriz del $\overline{AB}$, el centro está sobre dicha mediatriz.

d) ¿Cuántas circunferencias pasan por los puntos A y B? ______

Recuerden que: *Si un punto cualquiera equidista de los extremos del segmento, entonces pertenece a la mediatriz del segmento.*

>>> A lo que llegamos

Cada punto de la mediatriz de un segmento $\overline{CD}$ es el centro de una circunferencia que pasa por C y D, y cada circunferencia que pasa por C y D tiene su centro sobre la mediatriz del segmento $\overline{CD}$.



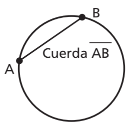
Vean el video *Las circunferencias que pasan por dos puntos* y al término del mismo escriban en su cuaderno, con sus propias palabras, cuántas circunferencias se pueden trazar que pasen por dos puntos dados: C y D.

CUERDAS Y CIRCUNFERENCIAS

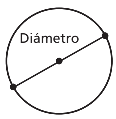
SESIÓN 2

>>> Para empezar

Los segmentos de recta que unen a dos puntos de una circunferencia se llaman **cuerdas**. En la ilustración 1 los puntos A y B están unidos por la cuerda $\overline{AB}$.



El diámetro de una circunferencia es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.



143

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos que tracen dos puntos cualesquiera (puntos P y Q), y que tracen dos circunferencias que pasen por esos dos puntos. Si identifica que los alumnos tienen dificultades, repase con ellos la actividad III del apartado *Manos a la obra.*

Propósito del video. Visualizar la construcción de la familia de circunferencias que pasan por los extremos de un segmento dado.

Propósito de la sesión. Identificar en qué casos es posible trazar un círculo dadas 2 cuerdas.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en parejas durante toda la sesión y que luego, en grupo, comparen resultados.

Materiales. Regla y compás.

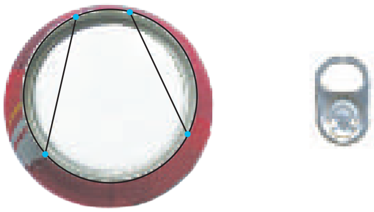
Sugerencia didáctica. Es importante que lea y comente esta información con los alumnos, pues se les presenta un nuevo término que deberán incorporar a su vocabulario matemático. Puede pedir a una pareja de alumnos que elabore un cartel con esta información para que esté a la vista de todo el grupo.

Posibles procedimientos. Algunos alumnos podrían tratar de ubicar el centro de la circunferencia "a ojo", trazando dos "diámetros" que se corten perpendicularmente. Si es así, pregunte a esos alumnos cómo pueden estar seguros de que ese es el centro, y pregúnteles si las 2 cuerdas que se indican en el dibujo podrían servirles de algo para encontrar el centro de la circunferencia.
Otra forma más sistemática de resolver, es trazar la mediatriz de cada una de las cuerdas; el punto en el que se cruzan las mediatrices es el centro de la circunferencia, y es donde debe colocarse el remache.

SECUENCIA 28

>>> Consideremos lo siguiente

Una maquiladora de latas de refresco debe colocar la "lengüeta" exactamente en el centro de la tapa. En el dibujo se muestra una tapa sin la lengüeta, las líneas sirven de guía para poner la lengüeta y son dos cuerdas de la circunferencia.



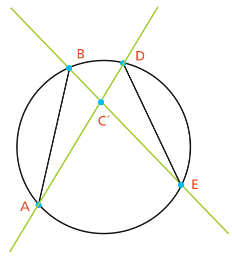
Encuentren el punto de la tapa donde debe colocarse el remache de la lengüeta.

>>> Manos a la obra

I. Veamos dos procedimientos:

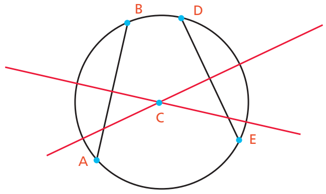
Procedimiento 1

- En el equipo 1 unieron los extremos de las cuerdas y tomaron como centro de la tapa el punto de intersección C'. Dijeron que el remache de la lengüeta debería colocarse en el punto C'.



Procedimiento 2

- En el equipo 2 trazaron las mediatrices de la cuerdas y dicen que el punto de intersección de las mediatrices es donde debe ponerse el remache de la lengüeta.



a) ¿Cuánto miden las distancias del punto C' a los extremos de cada cuerda? Mídanlas y completen:

Distancia de C' a A. ____________ Distancia de C' a B. ____________

Distancia de C' a D. ____________ Distancia de C' a E. ____________

b) ¿Cuánto miden las distancias del punto C a los extremos de cada cuerda?

Completen:

Distancia de C a A. ____________ Distancia de C a B. ____________

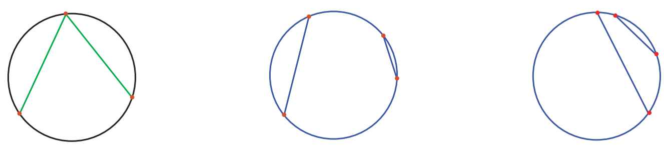
Distancia de C a D. ____________ Distancia de C a E. ____________

Comparen sus respuestas y comenten:

- ¿Por qué el punto C' **no** es el centro de la circunferencia?
- ¿Por qué el punto de intersección C de las dos mediatrices **sí** es el centro de la circunferencia?

II. En las siguientes circunferencias:

a) Encuentren su centro.



Circunferencia 1 Circunferencia 2 Circunferencia 3

Propósito del interactivo. Mostrar los casos posibles para construir una circunferencia.

Sugerencia didáctica. Una vez que los alumnos hayan expresado sus argumentos, subraye lo siguiente:

- En el caso del procedimiento 1, si el punto C' fuera el centro de la circunferencia, los segmentos $\overline{BC}'$, $\overline{AC}'$, $\overline{DC}'$ y $\overline{EC}'$ tendrían la misma medida, y serían radios de la circunferencia.
- El punto C' no es el centro de la circunferencia dado que las distancias BC', AC', DC' y EC' no miden lo mismo.

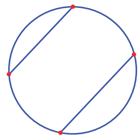
Los alumnos pueden comprobar lo anterior si trazan una circunferencia con centro en C' y como radio cualquiera de los cuatro puntos (A, B, D, E); podrán ver que esa circunferencia no pasa por los cuatro puntos.

En cambio, en el procedimiento 2, cualquier punto de cada mediatriz equidista de los extremos del segmento correspondiente, y el punto de intersección de las mediatrices equidista de los cuatro extremos; por lo tanto, los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ y $\overline{EC}$, son radios de la circunferencia. Los alumnos pueden comprobarlo trazando la circunferencia tomando como centro el punto C y como radio cualquiera de los 4 puntos (A, B, D, E).

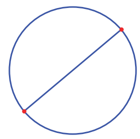
5

Sugerencia didáctica.
Pida a una pareja de alumnos que elabore un cartel con esta información y que lo pegue en el salón de clases. Los alumnos pueden copiar esta información en sus cuadernos e ilustrarla con ejemplos.

b) Encuentren su centro.



Circunferencia 4



Circunferencia 5

c) En la circunferencia 5 la cuerda dada es un diámetro, ¿cómo obtuvieron su centro?

____

d) En las circunferencias 4 y 6, ¿las mediatrices de las cuerdas se intersectan en un punto, son la misma recta o son rectas paralelas? _______________

e) La mediatriz que trazaron corta a la circunferencia 4 en dos puntos, llámenlos A y B; obtengan el punto medio de la cuerda $\overline{AB}$ y llámenlo D.

f) ¿Cómo son las distancias del punto D a cada extremo de la cuerda $\overline{AB}$? Mídanlas y completen:

Distancia de D a A. _______________ Distancia de D a B. _______________

Comparen sus respuestas y comenten:

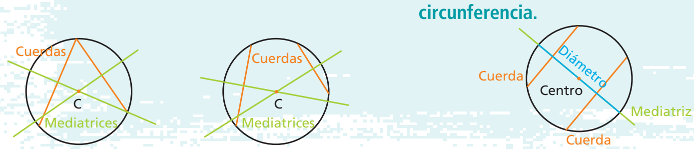
- ¿Por qué la cuerda $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia 4?
- ¿Por qué el punto D es el centro de la circunferencia 4?
- ¿Con este procedimiento podrán encontrar el centro de la circunferencia 6? Háganlo.

>>> A lo que llegamos

Para encontrar el centro de las circunferencias:

a) **Dadas dos cuerdas no paralelas**, se traza la mediatriz a cada cuerda y el punto de intersección de las mediatrices trazadas es el centro de la circunferencia.

b) **Dadas dos paralelas**, se traza la mediatriz a una de las cuerdas, se identifica el diámetro que está sobre la mediatriz, se obtiene el punto medio del diámetro, el cual es el centro de la circunferencia.



TRES PUNTOS Y UNA CIRCUNFERENCIA

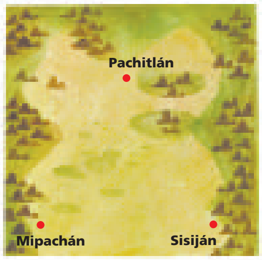
SESIÓN 3

>>> Para empezar

En la primera sesión de esta secuencia estudiaste cómo trazar circunferencias que pasen por dos puntos dados. En la segunda sesión estudiaron cómo obtener el centro de una circunferencia dadas dos cuerdas. En esta sesión aprenderás cómo trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente ilustración indica los lugares en que se ubican las comunidades de Pochitlán, Mipachán y Sisiján.

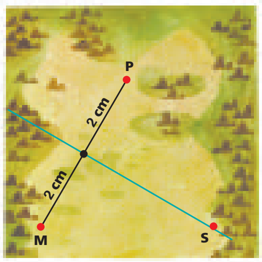


Se quiere construir un centro de salud que esté a la misma distancia de todas ellas. Encuentren el sitio donde se debería construir ese centro de salud.

>>> Manos a la obra

I. A continuación se explica una manera de encontrar un punto que equidiste de los tres pueblos.

a) En el siguiente dibujo los pueblos se representan con puntos. Ya se trazó la mediatriz del $\overline{MP}$. La distancia del punto M al punto C (cualquier punto de la mediatriz) es la misma que la distancia del punto P al mismo punto C.



b) Tracen la mediatriz de $\overline{MS}$ y $\overline{PS}$.

c) Localicen el punto de intersección de las mediatrices y llámenlo D. Midan la distancia de D a cada uno de los pueblos:

Distancia de D a M. ____________

Distancia de D a P. ____________

Distancia de D a S. ____________

Recuerden que:
El conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento forman una recta llamada mediatriz del segmento.

147

Propósito de la sesión. Identificar en qué casos es posible trazar un círculo dados 3 puntos.

Organización del grupo. Se recomienda trabajar la sesión en parejas; si lo considera conveniente, el apartado *Lo que aprendimos* puede resolverse de manera individual.

Materiales. Regla y compás.

Posibles procedimientos. Los alumnos resolvieron un problema similar en la sesión 3 de la secuencia 12, por lo que es posible que utilicen el mismo procedimiento que usaron en aquel problema: unir los 3 puntos mediante segmentos, trazar la mediatriz de cada segmento y ubicar al punto en el que se cortan las mediatrices como el lugar donde debe construirse el Centro de Salud.
Otra forma en que los alumnos podrían plantear el problema, aunque también utilicen las mediatrices para resolverlo, es trazando segmentos que representan las cuerdas de una circunferencia. Lo que deben buscar es el centro de esa circunferencia.

Respuesta. La distancia es la misma en los tres casos.

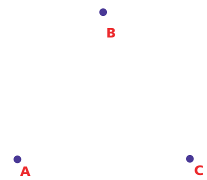
Respuesta. Es suficiente el trazo de dos mediatrices.

Comparen sus resultados y comenten:

a) ¿Es conveniente construir el centro de salud en el punto D?

b) ¿Para encontrar un punto que equidiste de los puntos M, P y S será necesario trazar las tres mediatrices o será suficiente con trazar dos de ellas?

En el siguiente dibujo tracen dos de las tres mediatrices



a) Llamen F al punto de intersección de las dos mediatrices.

b) ¿Cuáles son las distancias del punto F a los puntos A, B y C?

Distancia de F a A. ______

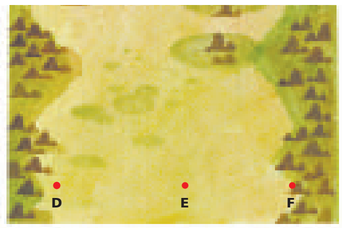
Distancia de F a B. ______

Distancia de F a C. ______

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen en qué casos no es posible trazar una circunferencia dados 3 puntos, y esto es cuando los puntos no son colineales. Es importante que los alumnos logren expresar las razones por las cuales no puede trazarse la circunferencia en ese caso.

II. En la siguiente ilustración se muestran los lugares en donde se ubican otras tres comunidades: D, E y F. Encuentren un punto que esté a la misma distancia de los tres pueblos.

Cuando tres puntos están en una misma recta se dice que son colineales.



a) Unan los puntos mediante segmentos.

b) Tracen las mediatrices de los segmentos.

c) Encuentren la intersección de las mediatrices.

Respuesta. No hay intersección porque las mediatrices son líneas paralelas.

Comenten:

a) Estos tres puntos están en una misma recta, ¿por qué creen que no se intersectan las mediatrices de los segmentos que los unen?

b) ¿En qué lugar creen que sería más conveniente construir un centro de salud?

Respuestas.

a) No se intersecan porque son paralelas.

b) Dado que las mediatrices no se intersecan, no es posible ubicar un punto que esté a la *misma distancia* de los 3 pueblos. En todo caso, el lugar más conveniente para establecer el centro de salud sería a la mitad del segmento $\overline{DF}$.

III. En sus cuadernos dibujen tres puntos, los que quieran, pero que no sean colineales. Tracen una circunferencia que pase por los tres puntos que dibujaron.

Comparen los puntos que dibujaron y las circunferencias que trazaron. Comenten:

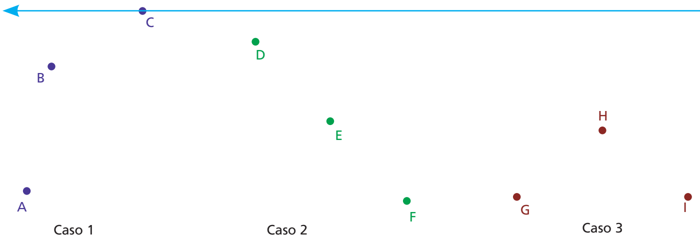
Dados tres puntos, ¿se podrá siempre trazar una circunferencia que pase por ellos?

>>> A lo que llegamos

- Dados **tres puntos que no son colineales** siempre se puede trazar una circunferencia que pase por ellos. El centro de la circunferencia que pasa por ellos es el punto de intersección de las mediatrices de $\overline{MP}$, $\overline{PS}$ y $\overline{MS}$.
- Cuando los **tres puntos son colineales** (están sobre la misma recta), no se puede trazar la circunferencia.

>>> Lo que aprendimos

1. En los siguientes casos, tracen una circunferencia que pase por los tres puntos.



2. ¿En cuáles de los tres casos pudieron trazar una circunferencia? ____________________

____

¿Por qué? ____________________________________

>>> Para saber más

Sobre círculo y circunferencia consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

De la Peña, José Antonio. *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

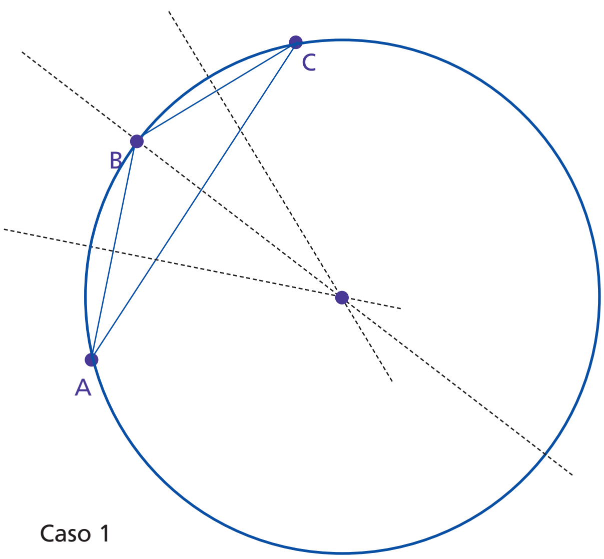
Hernández, Carlos. *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

149

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que copien esta información y que hagan trazos que ilustren cada uno de los casos.

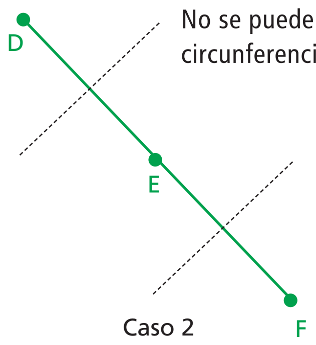
Integrar al portafolios. Sólo en el caso 2 no es posible trazar la circunferencia, pues los 3 puntos son colineales. En los casos 1 y 3 se le muestran a usted las 3 mediatrices, pero los alumnos podrían trazar sólo 2 de ellas, lo cual es correcto.
Si identifica que los alumnos tienen algunas dificultades con el caso 2 (por ejemplo, considerar erróneamente el punto E como el centro de la circunferencia), revise nuevamente con ellos la actividad II del apartado *Manos a la obra* y comente con ellos el apartado *A lo que llegamos* de esta sesión. Si identifica que tienen dificultades con los casos 1 y 3, revise con los alumnos nuevamente la actividad I de ese mismo apartado.

Propósito del interactivo. Mostrar la construcción de la circunferencia.

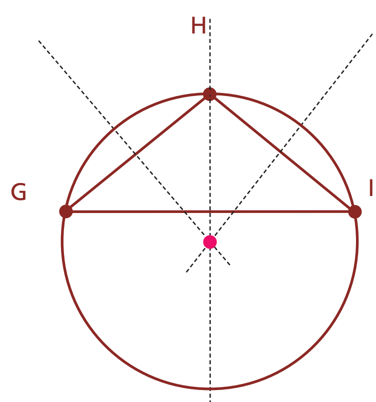


Caso 1

No se puede trazar la circunferencia



Caso 2



Caso 3

Propósitos de la sesión. Determinar el número π como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Resolver problemas de proporcionalidad que implican el cálculo del perímetro del círculo.

Organización del grupo. Los alumnos pueden trabajar en parejas, a excepción del apartado *Lo que aprendimos*, que puede resolverse de manera individual.

Materiales. Calculadora, regla, compás, tijeras y hojas blancas.

Propósitos de la actividad. Que los alumnos obtengan el perímetro de los círculos haciendo uso de recursos distintos a la utilización de la fórmula. Que identifiquen cuántas veces cabe el diámetro en la circunferencia.

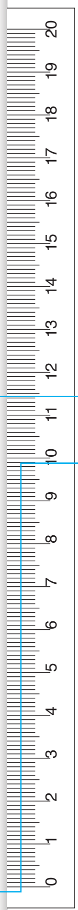
Sugerencia didáctica. Es posible que al girar los círculos sobre la regla haya algunas dificultades para medir su perímetro de manera exacta; por ello, pida a los alumnos que lo hagan lo más cuidadosamente posible y que utilicen medidas aproximadas.

Propósito del interactivo. Justificar el valor de π.

SECUENCIA 29

El número *Pi*

En esta secuencia determinarás el número *pi* como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Justificarás y usarás la fórmula para el cálculo de la longitud de la circunferencia.

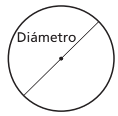


SESIÓN 1

LA RELACIÓN ENTRE CIRCUNFERENCIA Y DIÁMETRO

>>> Para empezar

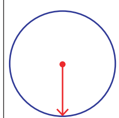
El diámetro de un círculo es una cuerda que pasa por su centro.



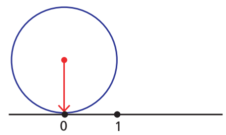
>>> Consideremos lo siguiente

I. En una hoja blanca tracen cinco círculos de distintos tamaños.

a) Recorten los círculos. En cada círculo dibujen una flecha del centro a uno de los puntos de la orilla del círculo, como se muestra en el dibujo.



b) Coloquen uno de los círculos sobre la regla graduada de esta página, haciendo coincidir la punta de la flecha con el cero de la regla.



c) Midan el perímetro del círculo rodándolo sobre la regla. Marquen cuando el círculo dé una vuelta completa.

d) Midan los perímetros de los otros cuatro círculos.

Recuerden que:
El perímetro del círculo es igual a la longitud de la circunferencia.

150

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Medida.
Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos identificaron el número π como el número de veces que el diámetro cabe en la circunferencia; asimismo, aprendieron a calcular el perímetro de un círculo aplicando la fórmula. En este grado de la educación secundaria profundizarán en el estudio de la relación que existe entre la circunferencia y el diámetro en diversas situaciones problemáticas.

Propósitos de la secuencia
Determinar el número π como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro.
Justificar y usar la fórmula para el cálculo de la longitud de la circunferencia.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*La relación entre circunferencia y diámetro* Determinar el número π como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Resolver problemas de proporcionalidad que implican el cálculo del perímetro del círculo.	Video *Relación entre circunferencia y diámetro* Interactivo "¿De dónde salió *pi*?" "El número *pi*"
2	*Perímetro del círculo* Obtener una fórmula para calcular el perímetro del círculo. Resolver problemas de proporcionalidad que implican al número π y a la fórmula del perímetro de un círculo.	Video *Temperaturas ambientales* Interactivo "Temperaturas"

e) Completen la siguiente tabla:

Perímetro del círculo (cm)	Diámetro del círculo (cm)	Perímetro entre diámetro

Comenten:

De acuerdo con la tabla que llenaron, ¿cuántas veces cabe la medida del diámetro en la medida del perímetro de cada uno de los círculos que recortaron?

>>> A lo que llegamos

El número que se obtiene al dividir el perímetro de un círculo entre la longitud de su diámetro siempre es el mismo, se llama *pi* y se simboliza con la letra griega π. Una aproximación a ese número es 3.1416

Vean el video *Relación entre circunferencia y diámetro*, y al término del mismo midan cinco objetos circulares que encuentren en su salón, su diámetro y su perímetro (ya sea con un hilo o bien rodándolos sobre una regla). Verifiquen lo mostrado en el video.

II. Usando una calculadora, completen la siguiente tabla:

Diámetro del círculo (cm)	Perímetro del círculo (cm)	Perímetro entre diámetro
10	31.416	3.1416
2	6.2832	3.1416
5	15.708	3.1416
4	12.5664	3.1416
20	62.832	3.1416
6	18.8496	3.1416

Propósito del interactivo. Mostrar que la relación entre el perímetro y el diámetro de un círculo es siempre igual al valor de π, independientemente del tamaño del círculo.

Sugerencia didáctica. Se espera que al dividir el perímetro entre el diámetro los alumnos interpreten el cociente como el número de veces que cabe una medida en la otra; en este caso, el diámetro en el perímetro. Apoye a sus alumnos con preguntas como las siguientes: ¿Cuál es el dividendo? ¿Cuál es el divisor? ¿Qué representa el resultado de la división o cociente?

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que copien esta información en el cuaderno, pueden ilustrarla pegando algunos de los círculos que recortaron y con los datos de la tabla anterior.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos profundicen en la relación entre el diámetro y el perímetro: para conocer el perímetro se debe multiplicar 3.1416 por el diámetro, y dividir el perímetro entre 3.1416 para conocer el diámetro.

Propósito del video. Mostrar la obtención del número π como el cociente de la división del perímetro de cualquier círculo entra la longitud de su diámetro.

Sugerencia didáctica. Además de comparar los resultados, enfatice las relaciones entre el diámetro y el perímetro planteando las siguientes preguntas:
Si conocemos el diámetro, ¿cómo obtenemos el perímetro?
Si conocemos el perímetro, ¿cómo obtenemos el diámetro?

Propósito de la actividad. Que los alumnos identifiquen cómo varía el perímetro en función del diámetro, y que utilicen esa relación para resolver problemas; por ejemplo, si el diámetro disminuye a la mitad, el perímetro varía en la misma proporción.

Sugerencia didáctica. Si lo considera conveniente, antes de que los alumnos resuelvan los incisos b) y c), puede pedirles que hagan una estimación sobre cuántas vueltas tendría que dar la rueda delantera para recorrer 94 m. La finalidad de esa estimación es que se percaten de que la distancia es en metros, no en centímetros. Recomiéndeles que cada uno de ellos elija la unidad con la que quieren trabajar (metros o centímetros), para que antes de que empiecen a resolver, hagan las conversiones necesarias.

Respuestas.
b) 100 vueltas.
c) 200 vueltas.

Comenten en grupo cómo completaron la tabla.

>>> Lo que aprendimos

III. En la mayoría de los triciclos, la rueda delantera es más grande que las dos traseras.

En un triciclo, el diámetro de la rueda delantera mide 30 cm y la rueda trasera mide la mitad del diámetro de la rueda delantera. Para simplificar sus cálculos, usen **3.14** como valor aproximado de π.

a) Completen la siguiente tabla:

Rueda	Diámetro del círculo (cm)	Perímetro del círculo (cm)	Perímetro entre diámetro
Delantera	30	94.2	3.14
Trasera	15	47.1	3.14

b) ¿Cuántas vueltas completas tiene que dar la rueda delantera para que el triciclo avance 94 m? ______

c) ¿Cuántas vueltas completas tienen que dar las ruedas traseras para que el triciclo avance 94 m? ______

PERÍMETRO DEL CÍRCULO

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En esta sesión veremos cómo calcular el perímetro del círculo, o sea la longitud de la circunferencia, mediante una fórmula.

>>> Consideremos lo siguiente

a) Completen en la tabla 1 las medidas del diámetro y del perímetro de algunos círculos.

Diámetro (cm)	Perímetro (cm)
4	12.56
8	25.12
12	37.69
3	9.45
100	314
15	47.1
1	3.14
50	157

Tabla 1

Para simplificar los cálculos pueden utilizar 3.14 como valor aproximado de π.

b) ¿Cuánto aumenta el perímetro de un círculo cuando el diámetro aumenta al triple? ____________

c) ¿Cuánto disminuye el diámetro de un círculo cuando el perímetro disminuye a la mitad? ____________

d) La tabla 1 es una tabla de proporcionalidad, ¿cuál es la **constante de proporcionalidad**? ____________

153

Propósitos de la sesión. Obtener una fórmula para calcular el perímetro del círculo.
Resolver problemas de proporcionalidad que implican al número π y a la fórmula del perímetro de un círculo.

Organización del grupo. Se sugiere que la sesión se trabaje en parejas. Si lo considera conveniente, el apartado *Lo que aprendimos* puede resolverse de manera individual, o en parejas, como se indica.

Materiales. Calculadora.

Posibles procedimientos. Se espera que los alumnos identifiquen la tabla 1 como una tabla de proporcionalidad y la resuelvan como tal, sin necesidad de utilizar la fórmula $P = \pi \times d$. No obstante, es posible que algunos alumnos apliquen directamente la fórmula, lo cual es correcto, sin atender las relaciones de proporcionalidad (por ejemplo, si el diámetro aumenta al doble o al triple, el perímetro aumenta en la misma proporción). También puede suceder que en los casos en los que la variación proporcional es evidente, se apoyen en algunas propiedades de la proporcionalidad (por ejemplo, al doble corresponde el doble), y que en otros apliquen la fórmula.

Respuestas.

b) Aumenta el triple. Puede verse en la tabla con los diámetros de 4 y 12 y con los de 1 y 3.
c) Disminuye a la mitad. Puede verse con los perímetros de 25.12 y 12.56, y con los de 314 y 157.
d) La constante de proporcionalidad es π.
e) Perímetro = Diámetro × π

Sugerencia didáctica. Tal vez algunos alumnos utilicen los números 3.14 o 3.1416 para expresar la fórmula para calcular el perímetro, sin embargo, lo correcto es que lleguen a la conclusión de que el perímetro es diámetro por π y no diámetro por 3.14 o 3.1416.
Es importante que en distintos momentos de la clase usted haga esa aclaración, para que no se queden con la idea de que la constante de proporcionalidad es la cantidad 3.1416 o 3.14. Lo correcto es que la constante de proporcionalidad es π, y por eso el perímetro se calcula multiplicando el diámetro por π (sin importar el valor aproximado que se tome de π).

Sugerencia didáctica. Reproduzca la tabla en el pizarrón para que algunas parejas pasen a poner sus respuestas. Aproveche el momento para enfatizar algunas de las propiedades de la proporcionalidad apoyándose en la tabla. Por ejemplo: si el diámetro aumenta al doble o al triple, ¿qué sucede con el perímetro?, ¿en qué casos a la suma de los diámetros le corresponde la suma de los perímetros?, ¿por cuánto debe multiplicarse cada una de las medidas del diámetro para obtener el perímetro que le corresponde?

Respuestas.

a) El equipo 1 expresó la relación que hay entre el perímetro y el diámetro mediante una aproximación del valor de π. El equipo 2 expresó una fórmula para encontrar el perímetro. Es importante subrayar con los alumnos que lo correcto es decir *Perímetro = diámetro por la constante de proporcionalidad,* o bien, *Perímetro = diámetro por* π, y que como fórmula no es correcto decir *Perímetro = diámetro por 3.14 o 3.1416*, dado que estas cantidades son aproximaciones de π.

b) La constante de proporcionalidad en la tabla 1 es π (sin importar la aproximación de su valor que se tome).

c) Porque el equipo 1 utilizó la relación que hay del perímetro entre el diámetro y una de las aproximaciones del valor de π, y el equipo 2 utilizó la fórmula para calcular el perímetro de un círculo.

e) Encuentren una fórmula para obtener el perímetro de un círculo. ______

Comparen sus tablas y sus fórmulas. Comenten cómo llenaron la tabla y cómo obtuvieron sus fórmulas.

>>> Manos a la obra

I. En otra escuela, dos equipos propusieron las siguientes fórmulas para obtener el perímetro de un círculo.

- En el equipo 1 dicen que la fórmula es:

$$\frac{\textit{Perímetro}}{\textit{Diámetro}} = 3.14$$

- En el equipo 2 dicen que la fórmula es:

Perímetro = diámetro por la constante de proporcionalidad

El valor aproximado de π que utilizó el equipo 2 fue 3.14

Comenten:

a) ¿Están de acuerdo con alguna de las dos fórmulas?, ¿por qué?

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad a la que se refiere el equipo 2?

c) Los equipos 1 y 2 obtuvieron los mismos resultados en la tabla 1, ¿por qué?

d) Entre todos obtengan una fórmula para calcular el perímetro de un círculo.

>>> A lo que llegamos

El diámetro es directamente proporcional al perímetro del círculo, es decir, en la misma proporción en que aumenta o disminuye el diámetro, aumenta o disminuye el perímetro del círculo. La constante de proporcionalidad es el número π. Una aproximación de este número es 3.14

II. Utilicen la fórmula que encontraron para completar la siguiente tabla:

Para simplificar los cálculos pueden utilizar 3.14 como valor aproximado de π.

Diámetro (cm)	Perímetro (cm)
1	
2.5	
25	
50	

154

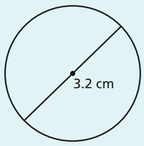
Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos esta información, enfatice que la constante de proporcionalidad es el número π y no el valor aproximado de π, el cual podría ser 3.14, 3.1416, 3.141598, o cualquier otra aproximación. Pida a los alumnos que copien esta información en el cuaderno y que den algunos ejemplos en los que se muestre cómo el diámetro y el perímetro del círculo varían proporcionalmente.

>>> A lo que llegamos

- El perímetro de un círculo se calcula multiplicando la medida de su diámetro por el número π.

  Por ejemplo: para calcular el perímetro de un círculo de diámetro 3.2 cm y tomando 3.1416 como valor aproximado de π, entonces

$$\text{Perímetro} = 3.2 \text{ cm} \times 3.1416 = 10.05 \text{ cm}$$



- Es decir, podemos obtener el perímetro de cualquier círculo con la fórmula:

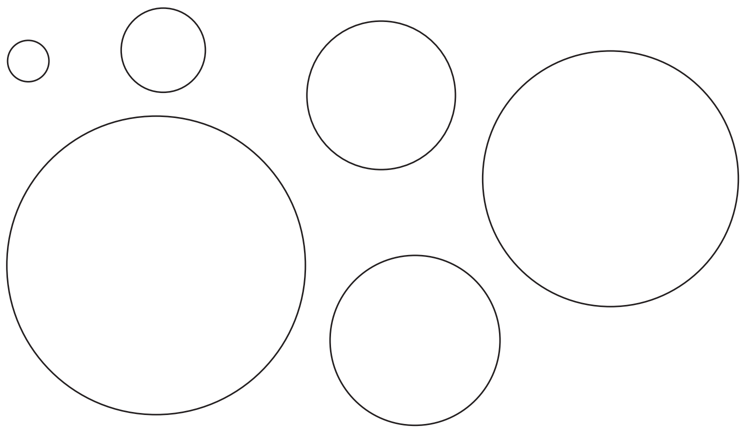
$$\text{Perímetro} = \pi \text{ por diámetro}$$

  Si se llama ***P*** al perímetro y ***d*** al diámetro, entonces puede escribirse:

$$P = \pi \times d \quad \text{o} \quad P = \pi\, d$$

>>> Lo que aprendimos

1. Midan la longitud de los diámetros y obtengan los perímetros de los siguientes círculos:



5

Sugerencia didáctica. Pida a una pareja de alumnos que elabore un cartel con esta información, para que se cuelgue o se pegue en una de las paredes del salón de clases.

Posibles procedimientos. Los alumnos no necesitan realizar los cálculos en cada una de las circunferencias, bastará con que una vez obtenidas todas las medidas de los diámetros calculen el perímetro de una de ellas y, por medio de la proporcionalidad, obtengan las demás. Esto es posible porque los diámetros son proporcionales, miden 1, 2, 4, 6, 7 y 3.5 cm respectivamente.
Si los alumnos se sienten inseguros con el uso de la proporcionalidad, pueden comprobar sus resultados haciendo las operaciones directas para cada circunferencia.

Respuestas. La medidas *aproximadas* de los perímetros, son: 3.14, 6.28, 10.99, 12.56, 18.84 y 21.98 (de menor a mayor).

Integrar al portafolios. Igual que en el ejercicio anterior, es suficiente con que los alumnos obtengan el perímetro de 28″ y 24,″ y a partir de ellos, el de 14″ (es la mitad de 28″) y el de 12″ (es la mitad de 24″).

Respuestas.

- Para encontrar el diámetro se multiplica la rodada por 2.54.
- Para encontrar el perímetro se multiplica el diámetro por 3.14.
- Para encontrar el número de vueltas es necesario considerar que 100 m equivale a 10 000 cm, entonces hay que dividir 10 000 entre el perímetro. Para que sean vueltas completas, las cantidades pueden redondearse al entero siguiente: 45, 90, 53 y 105, respectivamente.

Si los alumnos muestran dificultades en el cálculo de los perímetros, revise nuevamente con ellos el último apartado *A lo que llegamos* de esta sesión. Si nota que tienen dificultades para identificar la relación proporcional que existe entre las bicicletas de adulto y de niño, y entre las bicicletas de montaña y la infantil, haga preguntas similares a las que se le sugieren para el apartado *Consideremos lo siguiente* de esta sesión.

2. Se tienen cuatro bicicletas: una de adulto rodada 28, una de niño rodada 14, una de montaña rodada 24 y una infantil rodada 12. La rodada significa la medida en pulgadas del diámetro de las ruedas; es decir, que las ruedas de una bicicleta rodada 28 tienen un diámetro de 71.12 cm.

Recuerden que:
1 pulgada equivale aproximadamente a 2.54 cm.

a) Completen la siguiente tabla:

Bicicleta	Rodada	Diámetro del círculo (cm)	Perímetro del círculo (cm)	Número de vueltas en 100 m
Adulto	28″	71.12	223.3168	44.77
Niño	14″	35.56	111.6584	89.55
Montaña	24″	60.96	191.4144	52.24
Infantil	12″	30.48	95.7072	104.48

Para simplificar los cálculos pueden utilizar 3.14 como valor aproximado de π.

b) ¿Cuántas vueltas completas tiene que dar la rueda delantera para que la bicicleta de adulto avance 100 m? ____________

c) ¿Cuántas vueltas completas tiene que dar la rueda delantera para que la bicicleta de niño avance 100 m? ____________

d) ¿Cuántas vueltas completas tiene que dar la rueda delantera para que la bicicleta de montaña avance 100? ____________ ¿Y cuántas vueltas tiene que dar la infantil? ____________

3. En el quiosco de una plaza se va a construir un barandal para que puedan jugar los niños. El quiosco es de forma circular y su radio mide 2 m. El barandal se desea poner en distintos niveles, como se muestra en la imagen. Cada metro de barandal cuesta $150.00

a) ¿Cuánto costará el primer nivel del barandal?

b) ¿Cuántos niveles se pueden pagar con $9 500.00?

c) Al final del trabajo se pagaron $7 539.84, ¿cuántos niveles se pusieron?

d) Todos los niveles están a la misma distancia uno del otro, ¿cuánto costará poner un barandal del doble de altura que el del inciso c)?

Para simplificar los cálculos pueden utilizar 3.14 como valor aproximado de π.

Respuestas.

a) El primer nivel costará $1 884.00. Este resultado se obtuvo de la siguiente manera: el perímetro es de 12.56 m (tomando a π como 3.14), se multiplica eso por el costo por metro y se obtiene el precio total del primer nivel.

b) Se pueden pagar 5 niveles. Esto es, se divide 9 500 entre 1 884.

c) Se pusieron 4 niveles. Esto es, se divide 7 539.84 entre 1 884.

d) Costará $15 079.68. Esto es, se multiplica 7 539.84 por 2.

>>> Para saber más

Consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

De la Peña, José Antonio. "¿De dónde sale el famoso número π?", en *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Marván, Luz María. "Números de cuento y de película", en *Representación numérica*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Hernández, Carlos. "Perímetro del círculo", en *La geometría en el deporte*. México: SEP/ Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Sobre el número π consulten:

http://www.interactiva.matem.unam.mx

[Fecha de consulta 23 de agosto de 2007].

Ruta: Secundaria ⟶ Cuadratura del círculo (dar clic en el dibujo de un círculo y un cuadrado) ⟶ Avanzar tres páginas y llegar a "Definición de π"

Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, UNAM.

Propósito de la sesión. Identificar la fórmula del área de un círculo a través de la fórmula del área de un polígono regular y calcular algunas áreas.

Organización del grupo. Se sugiere que trabajen en parejas durante toda la sesión.

Materiales. Calculadora y regla.

Posibles procedimientos. No se espera que los alumnos resuelvan correctamente el problema, sino que hagan uso de sus propios recursos para diseñar una estrategia que les permita aproximarse a la solución. Una posibilidad es que dividan el círculo en figuras que ya conocen, por ejemplo, que lo dividan en varios triángulos iguales, que calculen el área de cada uno de ellos y después las sumen. De manera similar, pueden formar un polígono regular con un número de lados que ellos decidan, aunque entre mayor número de lados tenga el polígono, más se aproximará a la medida real del área del círculo.
Si observa que tienen dificultades para establecer una estrategia de solución, usted puede sugerirles que dividan al círculo en figuras que ya conocen.

Sugerencia didáctica. Mientras las parejas resuelven, observe qué procedimientos utilizan para que en el momento de la comparación de resultados usted pueda elegir a 2 o 3 parejas que hayan empleado procedimientos distintos que se aproximen al área del círculo (por ejemplo, alguna que haya utilizado la triangulación, otra que haya trazado un pentágono y otra que haya trazado un polígono con un mayor número de lados). Pregunte al grupo qué procedimiento consideran que permite obtener un resultado más aproximado al área del círculo y por qué.

SECUENCIA 30

El área de los círculos

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen calcular el área y el perímetro de un círculo.

SESIÓN 1

ÁREA DEL CÍRCULO

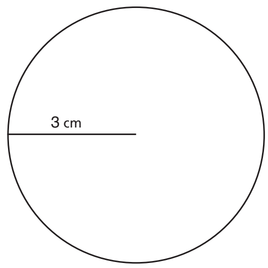
>>> Para empezar

En la secuencia 14 de *Matemáticas I*, viste que el área de un triángulo se obtiene multiplicando la base del triángulo por su altura y el resultado se divide entre 2. El área de un paralelogramo se calcula multiplicando su base por su altura.

En la vida cotidiana se encuentran diversos objetos circulares, de los cuales a menudo se necesita calcular su área, por ejemplo: la superficie de una mesa para hacerle un mantel, la superficie del asiento de una silla para tapizarla, el área de un piso para saber la cantidad de losetas necesarias para cubrirlo, entre otras cosas.

>>> Consideremos lo siguiente

En pareja, planeen una estrategia para calcular el área del siguiente círculo y llévenla a cabo. ¿Cuál es el área del círculo? ______________________



Comenten con otros equipos su procedimiento y resultado.

Eje

Forma, espacio y medida.

Tema

Medida.

Antecedentes

En la escuela primaria los alumnos aproximaron áreas de círculos y de figuras curvas mediante el conteo de cuadrículas. En este grado de la educación secundaria los alumnos aprenderán a calcular el área del círculo mediante el uso de la fórmula. Para ello, se apoyarán en el cálculo de áreas de paralelogramos y de polígonos regulares que estudiaron en la secuencia 14.

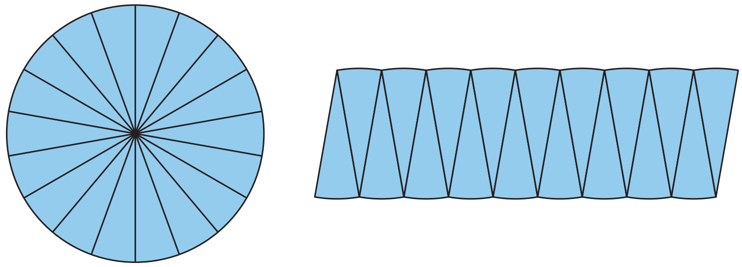
Propósitos de la secuencia
Resolver problemas que impliquen calcular el área y el perímetro del círculo.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*Área del círculo* Identificar la fórmula del área de un círculo a través de la fórmula del área de un polígono regular y calcular algunas áreas.	Video *Área del círculo* Interactivo "Cálculo del área del círculo de Arquímedes" "Área del círculo" Aula de medios "Área del círculo" (*Geometría dinámica*)
2	*Áreas y perímetros* Resolver problemas que impliquen calcular el área y el perímetro del círculo.	

>>> Manos a la obra

I. En una escuela encontraron el área de las siguientes maneras:

Procedimiento 1. Un equipo recortó el círculo en 18 partes y las colocó como se muestra a continuación.



¿Observaron que la figura se parece a un paralelogramo?

Supongan que esta figura es un paralelogramo y contesten las siguientes preguntas:

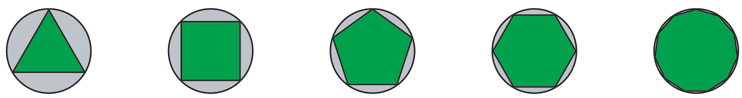
a) ¿Cuánto mide su altura? ____________________

b) ¿Cuánto mide su base? ____________________

Observen que la altura del paralelogramo es aproximadamente igual a la medida del radio del círculo y que su base es aproximadamente igual a la mitad de la longitud de la circunferencia.

c) ¿Cuál es el área aproximada del paralelogramo? ____________________

Procedimiento 2. Otro equipo notó que, si hacía polígonos regulares inscritos en una circunferencia, entre más lados tuviera el polígono más se parecía al círculo.



Propósito de las actividades. Ofrecer a los alumnos 2 procedimientos que les permitan aproximarse al área del círculo haciendo uso de los conocimientos que ya tienen para calcular el área de paralelogramos y de polígonos regulares.

Propósito del interactivo. Mostrar una justificación de la fórmula para calcular el área del círculo.

Respuestas.

a) Base × altura.
(Si no lo recuerdan, los alumnos pueden repasar la secuencia 14.)

b) 3 cm aproximadamente.

c) 9.4 cm aproximadamente.

d) 28.3 cm^2 aproximadamente.

NOTA: Para los incisos c) y d) se utilizó $\pi = 3.14$.

Propósito del interactivo. Mostrar 2 procedimientos de aproximación al área de un círculo. Uno es numérico y el otro es simbólico.

Con ayuda del profesor, comenten con sus compañeros:

a) ¿Qué pasa con el perímetro del polígono y el perímetro de la circunferencia cuando aumenta el número de lados del polígono regular?

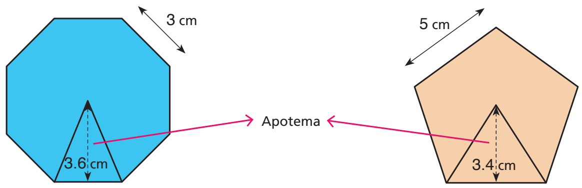
b) ¿Qué pasa con la apotema del polígono regular y el radio de la circunferencia cuando aumenta el número de lados del polígono regular?

c) ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un polígono regular?

d) ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro del círculo?

e) Calcula el área del círculo usando la discusión anterior. El área del círculo es:

Recuerda que: Apotema se le llama a la altura de los triángulos iguales en los que se divide un polígono regular.



>>> A lo que llegamos

Observaste que el área de un círculo puede ser aproximada con la fórmula del área de un polígono regular.

$$\text{Área de un polígono regular} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

Como el perímetro del círculo es π por diámetro y la apotema, cuando el número de lados aumenta, coincide con el radio, entonces:

$$\text{Área de un círculo} = \frac{\pi \times \text{diámetro} \times \text{radio}}{2}$$

Y como el diámetro es 2 veces el radio: área de un círculo $= \dfrac{\pi \times 2 \times \text{radio} \times \text{radio}}{2}$

Simplificando: Área del círculo = π × radio × radio

Si se llama A al área y r al radio, entonces puede escribirse: $A = \pi r^2$

Vean el video *Área del círculo* y, al término del mismo, en su cuaderno dibujen un círculo cuyo diámetro mida 15 cm y realicen el procedimiento mostrado en el video.

Propósito de la actividad. Es importante que los alumnos concluyan que entre mayor sea el número de lados del polígono inscrito:

a) Su área es más cercana al área del círculo.

b) La apotema coincide con el radio del círculo.

c) Por lo tanto, si sustituimos los datos en la fórmula del área de un polígono y se hacen algunas simplificaciones, tenemos que el área del círculo se puede calcular como si fuera un polígono regular: Área del círculo = π × radio × radio

Respuestas.

a) El perímetro del polígono se acerca más al perímetro de la circunferencia. Haga notar a los alumnos que mientras más lados tenga el polígono su perímetro será mayor.

b) La longitud del apotema se acerca más a la longitud del radio. También, mientras más lados tenga el polígono, su apotema será mayor. Recuerde a los alumnos que la apotema va del centro del polígono al punto medio de uno de los lados.

c) $\text{Área} = \dfrac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$

d) π por diámetro.

e) 28.26 cm^2

Es posible que no todos los alumnos puedan elaborar conclusiones a partir de las preguntas anteriores; no obstante, es importante que intenten establecer relaciones y elaborar argumentos. Si tienen dificultades no se preocupe, este procedimiento se detalla en el apartado *A lo que llegamos*. Una forma de establecer relaciones entre las preguntas anteriores, es la siguiente:

- Cuando aumenta el número de lados del polígono, su área se parece más a la del círculo y la apotema se parece más al radio. El área del polígono es:

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

- En el caso del círculo, el perímetro es igual a π × diámetro, o π × 2 veces el radio, o 2 π × radio. (las tres fórmulas son equivalentes).
- Entonces,

$$\frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2} = \frac{2\pi \times \text{radio} \times \text{radio}}{2} = \pi \times \text{radio} \times \text{radio}$$

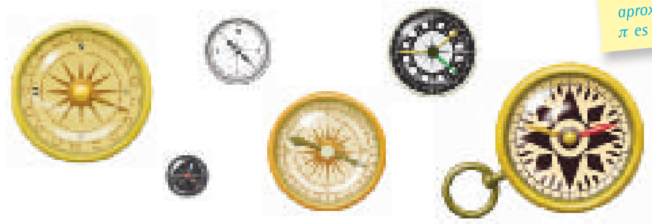
Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos esta información y posteriormente pídales que vuelvan al problema inicial del apartado *Consideremos lo siguiente* y que verifiquen, aplicando la fórmula, el área del círculo.

Propósito del video. Mostrar la obtención de la fórmula del área del círculo mediante una aproximación por triangulaciones.

>>> Lo que aprendimos:

En sus cuadernos obtengan el área del vidrio que cubre las siguientes brújulas.

Recuerden que: Un valor aproximado de π es 3.14



ÁREAS Y PERÍMETROS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Ahora ya sabes calcular el área y el perímetro de un círculo. En esta sesión tendrás la oportunidad de aplicar estos conocimientos en la resolución de problemas diversos.

>>> Consideremos lo siguiente

El vidrio para una mesa cuadrada de un metro por lado cuesta \$300. El vidrio para una mesa circular cuesta \$150.00

¿Cuál es la medida aproximada del radio de la mesa circular si los costos son proporcionales a la cantidad de vidrio, sin importar si el vidrio es rectangular o circular? ______

Pueden usar calculadora.

Comparen sus procedimientos y resultados con sus compañeros.

>>> Manos a la obra

I. Completen los siguientes procedimientos cuando haga falta y discutan con su pareja cuál es el correcto.

Procedimiento 1.

Como \$150 es la mitad de \$300, entonces la mesa circular tiene por radio la mitad de 1 m, es decir, $\frac{1}{2}$m.

- *¿Cuál es el área de la mesa cuadrada?* ______
- *¿Cuál es el área de una mesa circular cuyo radio mide $\frac{1}{2}$m?* ______
- *Compara las áreas de ambas mesas.*
- *¿Consideras correcto este resultado?* ______
- *¿Por qué?* ______

161

Respuesta. En cada caso se debe medir el radio. El área se obtiene con la fórmula: $\pi \times r^2$

Aproximadamente:

Radio	Área
0.4 cm	0.5 cm^2
0.75 cm	1.77 cm^2
0.85 cm	2.29 cm^2
1.25 cm	4.91 cm^2
1.5 cm	7.07 cm^2
1.5 cm	7.07 cm^2

Propósito de la sesión. Resolver problemas que impliquen calcular el área y el perímetro del círculo.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en parejas, y que el apartado *Lo que aprendimos* se resuelva de manera individual.

Materiales. Calculadora.

Propósito de la actividad. Utilizar sus conocimientos sobre proporcionalidad, áreas y perímetros para resolver un problema que implica el cálculo del área de un círculo.

Respuesta. La mesa cuadrada tiene 1 m^2 de área; si la mesa circular cuesta la mitad, entonces tiene la mitad del área de la mesa cuadrada; es decir, tiene medio metro cuadrado de área (0.5 m^2).
Por lo tanto, hay que encontrar un radio para el que se cumpla $\pi \times r^2 = 0.5$. Esa medida es de 0.4 m *aproximadamente.*

Posibles procedimientos. Dado que la mesa circular es la mitad del área de la mesa cuadrada y ésta tiene 1 m por lado, algunos alumnos podrían pensar, erróneamente, que el radio de la mesa circular es de 0.5 m. Otros alumnos podrían establecer la relación de manera correcta, pero es poco probable que tengan una forma sistemática de encontrar la medida del radio, por lo que seguramente probarán con una medida y se irán aproximando poco a poco, a través de varios intentos, hasta encontrar el número que multiplicado por sí mismo y por π, dé 0.5 m^2 o una medida cercana.

Respuestas.
Procedimiento 1. El resultado no es correcto. Si el radio mide 0.5 m, su área es: π x 0.5 x 0.5 = 0.7854 m². Pero el área debe ser la mitad del área de la mesa cuadrada, esto es 0.5m². *Procedimiento 2.* El área de la mesa cuadrada es de 100 cm x 100 cm = 10 000 cm². Entonces la mesa redonda tiene un área de 5 000 cm². Este procedimiento es correcto porque el área de la mesa circular sí es la mitad del área de la mesa cuadrada.
El área se calcula con la fórmula $\pi \times r^2$. Una buena aproximación para el número que buscamos es 40 cm: $3.1416 \times 40 \times 40 = 5\,024$.
Los alumnos pueden continuar buscando con números decimales, una mejor aproximación es 39.9 cm o 39.89 cm. En metros el resultado es 0.4 m o 0.39 m.

Procedimiento 2.

Calculamos en centímetros cuadrados el área de la mesa cuadrada, esto es:

_____ *cm x* _____ *cm =* _____ *cm²*

Como el vidrio para la mesa redonda costó la mitad, entonces el área de la mesa redonda es la mitad del área de la mesa cuadrada, es decir:

$$\text{Área de la mesa circular} = \frac{\text{Área mesa cuadrada}}{2} = \_\_\_\_\_ \text{ cm}^2$$

Como el área de un círculo se calcula con la fórmula:

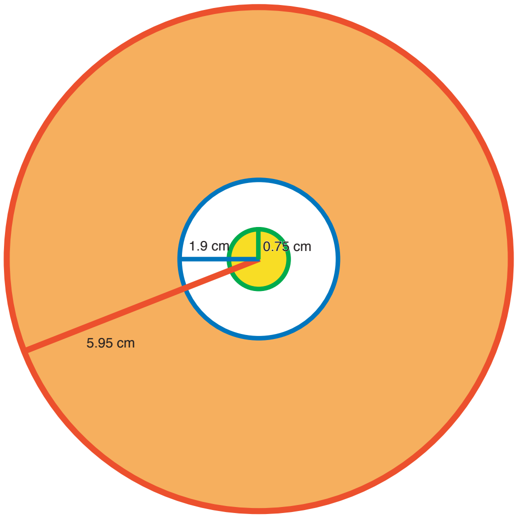
____

buscamos, con ayuda de la calculadora, un número que multiplicado por sí mismo y después por 3.14 *nos dé el área de la mesa circular. Ese número es:* _____

- *¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, de una mesa circular cuyo radio tiene esta última medida?* _____
- *Compara las áreas de ambas mesas.*
- *¿Consideras correcto este resultado?* _____
- *¿Por qué?* _____

Comparen y comenten sus respuestas con sus compañeros de grupo.

II. La siguiente figura es un disco compacto. Las áreas anaranjada y blanca se llaman coronas circulares.



a) El área de la corona circular anaranjada, que es la parte del disco compacto donde se graba la información, mide: __________

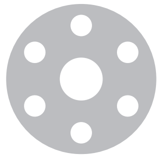
b) El área de la corona circular blanca, que es la protección del disco compacto, mide: __________

c) En su cuaderno escriban cómo obtuvieron el área de ambas coronas circulares.

Comparen en grupo los procedimientos de cada equipo y escriban en sus cuadernos un procedimiento general para obtener el área de una corona circular.

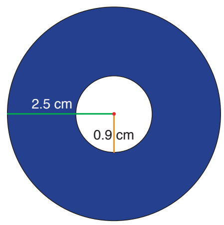
>>> Lo que aprendimos

1. ¿Cuánto medirá, aproximadamente, el radio de una ventana circular si el área del vidrio mide 2 827.44 cm²? __________



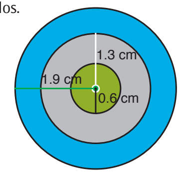
2. ¿Cuánto medirá el diámetro de un carrete, como el de la ilustración, si su perímetro es igual a 11 cm? __________

3. Obtengan el área de la corona circular azul.



4. Calculen el área de la parte sombreada de color verde. El punto verde es el centro del círculo verde y el punto negro es el centro del círculo blanco.

5. Calcula el área de la parte sombreada en color gris de la siguiente figura. El punto negro es el centro de los círculos.



>>> Para saber más

Sobre el área del círculo consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Hernández, Carlos. *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Sobre el área del círculo consulta: **http://www.interactiva.matem.unam.mx** [Fecha de consulta 23 de agosto de 2007]. RUTA: Secundaria → Cuadratura del círculo → dar clic en el dibujo de un círculo y un cuadrado.

Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, UNAM.

163

Respuestas.

a) El área de la corona anaranjada es aproximadamente de 99.83 cm². Una manera de resolver es la siguiente: se calcula el área total del círculo delimitado por la circunferencia roja y se le resta el área delimitada por la circunferencia azul. La primera circunferencia tiene un área de 11.16 cm², y la segunda circunferencia tiene un área de 11.33 cm², entonces al hacer la resta nos da el área de la corona circular anaranjada: 99.83 cm². Todos los resultados son aproximados, porque estamos tomando un valor aproximado para π igual a 3.14.

b) El área de la corona circular blanca es aproximadamente de 9.56 cm². Se resta el área delimitada por la circunferencia azul, menos el área delimitada por la circunferencia verde: 11.33 – 1.77 = 9.56 cm².

Sugerencia didáctica. Una vez que el grupo haya llegado a un acuerdo sobre los procedimientos correctos, pida a los alumnos que intenten describir uno de esos procedimientos en su cuaderno. En general, el procedimiento consiste en calcular el área del círculo mayor y restarle el área del círculo menor.

Respuestas.

1. El radio mide 30 cm aproximadamente. Se debe buscar un radio que al aplicar la fórmula $\pi \times r^2$, se obtenga 2 827.44 cm².
2. El diámetro mide 3.5 cm aproximadamente. La fórmula para el perímetro es $\pi \times$ diámetro, entonces debe buscarse el número que multiplicado por π dé 11.
3. El círculo mayor tiene un área aproximada de 4.9 cm², el círculo menor tiene un área aproximada de 2.54 cm². Se calcula la diferencia entre ambas áreas para obtener el área de la corona circular azul, que es aproximadamente de 2.36 cm².
4. El procedimiento es el mismo que el anterior: se debe restar el área del círculo mayor, menos el área del círculo menor. El resultado es: 2.36 cm².
5. Se necesita calcular el área del círculo de radio 1.3 cm y el área del círculo de radio 0.6 cm. Se restan ambas áreas y el resultado es de 4.17 cm².
   Es importante que los alumnos lleguen a establecer que el hecho de mover el círculo interno en las figuras no altera el procedimiento para obtener el área de una corona circular.

Integrar al portafolios. Considere los ejercicios 4 y 5 para el portafolios de los alumnos. Si identifica que los alumnos tienen dificultades para establecer una estrategia que les permita resolver el problema, revise nuevamente con ellos el problema que resolvieron en la actividad II del apartado *Manos a la obra* de esta sesión, y comente con ellos cuál es la estrategia general para hallar el área de coronas circulares.

Propósitos de la sesión. Solucionar problemas sencillos de conversión entre dos tipos de moneda para determinar e interpretar la expresión algebraica o relación funcional asociada al problema.
Construir tablas para usar técnicas de proporcionalidad directa en la búsqueda de la expresión algebraica.

Organización del grupo. Hay momentos de trabajo en grupo, de parejas e individual.

Propósito del video. Contextualizar a lo largo de la historia el problema del cambio de monedas mediante el establecimiento del “tipo de cambio”.

SECUENCIA 31

Relaciones de proporcionalidad

En esta secuencia aprenderás a formular la expresión algebraica que corresponde a la relación entre dos cantidades que son directamente proporcionales. También aprenderás a asociar los significados de las variables en la expresión $y = kx$, con las cantidades que intervienen en dicha relación.

SESIÓN 1

CAMBIO DE MONEDA

>>> Para empezar

Historia de la moneda

Los orígenes de la moneda como forma de pago se remontan al siglo VII antes de Cristo, en la antigua Grecia. La moneda surge como una necesidad de superar las formas de intercambio como el trueque. Para ello, había que darle cierto valor a algo tan pequeño como un simple trozo de metal. La solución fue fabricar la moneda con metales preciosos como el oro y la plata.

Las monedas registran acontecimientos que ocurrieron hace miles de años y hechos que sólo se conocen a través de ellas.

Existen algunos emperadores romanos de los que se conoció su existencia por aparecer en las monedas que ellos mismos mandaron acuñar.

En la secuencia 21 de su libro de *Matemáticas I, volumen II* resolviste problemas de conversiones o de tipo de cambio del dólar respecto del peso: un dólar equivale a \$11.70.[1] El tipo de cambio entre la moneda de un país y la de otro es la cantidad de dinero que se recibe por la unidad en el otro tipo de moneda. En la actualidad hay negocios que se dedican a cambiar monedas de un país por monedas de otro. Estos negocios se llaman **casas de cambio**.

En esta sesión aprenderás a realizar conversiones entre la moneda de México y las monedas de distintos países.

[1] Tipo de cambio vigente al 24 de noviembre de 2005.

164

Eje
Manejo de la información.
Tema
Análisis de la información.
Antecedentes
En secuencias anteriores los alumnos han trabajado tanto situaciones de proporcionalidad directa como situaciones en las que deben expresar algebraicamente sucesiones numéricas, relaciones geométricas y entre cantidades que varían. En esta secuencia los alumnos estudiarán la representación algebraica de una variación específica: la proporcionalidad directa.

Propósitos de la secuencia
Formular la expresión algebraica que corresponde a la relación entre dos cantidades que son directamente proporcionales. Asociar los significados de las variables en la expresión $y = kx$ con las cantidades que intervienen en dicha relación.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*Cambio de moneda* Solucionar problemas sencillos de conversión entre dos tipos de moneda para determinar e interpretar la expresión algebraica o relación funcional asociada al problema. Construir tablas para usar técnicas de proporcionalidad directa en la búsqueda de la expresión algebraica.	Video *Historia de la moneda* Interactivo “Variación proporcional 6”
2	*Expresiones algebraicas y relaciones de proporcionalidad en distintos contextos* Encontrar la expresión algebraica o la relación funcional cuando se aplican sucesivamente dos constantes de proporcionalidad. Una vez encontrada la expresión algebraica, hallar la inversa y notar las similitudes y diferencias entre estas dos expresiones algebraicas.	

>>> Consideremos lo siguiente

La tabla 1 muestra algunas conversiones que se hicieron en una casa de cambio con monedas de distintos países respecto del peso mexicano.

País	Nombre de la moneda	Cantidad en la moneda correspondiente	Cantidad recibida en pesos mexicanos
Estados Unidos de América	Dólar estadounidense	10	117
España	Peseta española	100	7.48
Inglaterra	Libra esterlina	200	3 666
Japón	Yen japonés	200	17.8
Guatemala	Quetzal guatemalteco	150	210

Tabla 1

Vicente fue de viaje a los Estados Unidos de América y a Guatemala. A su regreso, cambió las monedas que le sobraron: 13 dólares estadounidenses y 8 quetzales guatemaltecos.

Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué cantidad en pesos recibió Vicente por los 8 quetzales guatemaltecos?

b) ¿Qué cantidad en pesos recibió Vicente por los 13 dólares estadounidenses?

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para encontrar la cantidad en pesos que equivale a 8 quetzales guatemaltecos.

Cantidad de quetzales guatemaltecos	Cantidad recibida en pesos mexicanos
150	210
50	70
5	7
1	1.4
8	11.2

Tabla 2

165

Sugerencia didáctica. Comente a los alumnos que la peseta española fue la moneda oficial en ese país hasta 1999. Tras su incorporación a la Unión Europea la moneda oficial es el euro.

Posibles procedimientos. Los alumnos pueden utilizar distintas estrategias para hallar los valores que se les piden, por ejemplo, encontrar el valor unitario o hacer una tabla. Permítales utilizar cualquier procedimiento, incluso si es erróneo, más adelante tendrán oportunidad de verificar sus resultados.

Respuestas.

a) Por un quetzal se reciben 1.40 pesos (se divide 210 entre 150), entonces por 8 quetzales se reciben 11.20 pesos (1.4 por 8).

b) Por un dólar americano se reciben 11.70 pesos, por 13 dólares se reciben 152.10 pesos (11.7 por 13).

Propósito del interactivo. Deducir las expresiones algebraicas que corresponden a la relación entre dos cantidades que son directamente proporcionales.

Propósito de la actividad. En el apartado *Manos a la obra* se privilegia el uso de la constante de proporcionalidad para la resolución del problema, ya que se pretende que el alumno asocie la ecuación de la forma $y = kx$ a una relación de proporcionalidad directa.

Respuestas. Es conveniente que escriban las cantidades con números decimales. Si algunos alumnos ponen $\frac{7}{5}$ indíqueles que lo escriban como 1.4.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos cuántos pesos y cuántos centavos son $1.4, porque es común que piensen que equivale a un peso con cuatro centavos. Explíqueles que un décimo de peso (0.1) es igual a la décima parte, es decir, a 10 centavos, por lo tanto, 0.4 son 40 centavos. Si lo prefieren, pueden escribir $1.40 para no confundirse.

3

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos esta afirmación y pregúnteles:

- ¿Qué significa que los quetzales guatemaltecos y los pesos sean cantidades directamente proporcionales?
- ¿Ocurrirá lo mismo entre el yen japonés y el peso?
- ¿Y entre el yen japonés y la libra esterlina?

Sugerencia didáctica. Reconocer la constante de proporcionalidad es muy importante en esta secuencia para poder asociarle a la situación de cambio de moneda (y a otras que involucren relaciones de proporcionalidad directa) la expresión $y = kx$, por lo que vale la pena dedicarle un tiempo a esta pregunta si los alumnos tienen dificultades.

Respuesta. La constante de proporcionalidad es **1.4** pesos por cada quetzal guatemalteco.

2

Sugerencia didáctica. Permita que se discuta en grupo la expresión algebraica. Para iniciar, puede ser útil plantear a los alumnos algunas preguntas como:
¿Cuál es la constante en la expresión?
¿Es una constante de proporcionalidad o aditiva?
¿Cuáles son las variables?
¿Qué significa $1.4x$?
¿Alguien podría leer la expresión?
¿Alguien podría leer la expresión explicando el significado de las variables? (por ejemplo, "la cantidad de pesos y es igual a la cantidad de quetzales guatemaltecos x multiplicada por **1.4**").

Sugerencia didáctica. Si sus estrategias anteriores fueron correctas deben obtener el mismo resultado al utilizar la expresión algebraica. Si hay resultados distintos, corríjanlos y averigüen cuál fue el error.

Sugerencia didáctica. Puede ser de utilidad que encuentren la constante de proporcionalidad que permite saber a cuántos pesos equivale cierta cantidad de dólares americanos. Esa constante es **11.7** pesos por cada dólar americano.

Respuestas. Hay dos expresiones correctas ($11.70x = y$ y $y = 11.70x$). Si hay alumnos que tienen dificultad en reconocerlas puede pedirles que utilicen cada una de las seis expresiones para hallar la cantidad de pesos a los que equivalen , por ejemplo, 5 dólares (tendrían que obtener $y = 58.5$), para descartar aquellas que son erróneas.

Los quetzales guatemaltecos y los pesos son cantidades directamente proporcionales, ¿cuál es la constante de proporcionalidad que permite multiplicar cualquier cantidad de quetzales guatemaltecos y encontrar su equivalente en pesos? ____________

II. Un equipo de otra escuela hizo la siguiente observación:

Si llamamos x a la cantidad de quetzales guatemaltecos que se van a cambiar y llamamos y a la cantidad de pesos que se obtienen por el cambio, la siguiente expresión algebraica permite obtener la cantidad y de pesos:

$$y = 1.4x$$

Comenten:

a) ¿Están de acuerdo con la expresión algebraica que encontraron en el otro grupo?

b) Con esta expresión encuentren cuántos pesos obtienen si cambian 8 quetzales. ¿Obtuvieron el mismo resultado que al llenar la tabla?

III. Llamen x a la cantidad de dólares que se van a cambiar y llamen y a la cantidad de pesos que se obtiene por el cambio. ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas permiten obtener y a partir de x?

- $y = x$
- $11.70x = y$
- $11.70y = x$
- $x = y$
- $y = 11.70x$
- $x = 11.70y$

Comparen las expresiones que escogieron.

IV. Completen la siguiente tabla para encontrar las expresiones algebraicas que corresponden a las distintas situaciones de proporcionalidad de la tabla 1.

Relación proporcionalidad	Expresión algebraica
Cambio de dólar estadounidense (x) a pesos (y)	$y = 11.70x$
Cambio de quetzales guatemaltecos (x) a pesos (y)	$y = 1.4x$
Cambio de libra esterlina (x) a pesos (y)	
Cambio de peseta española (x) a pesos (y)	
Cambio de yen japonés (x) a pesos (y)	

Tabla 3

2

Sugerencia didáctica. Una vez que haya consenso sobre cuáles son las expresiones algebraicas correctas, escríbalas en el pizarrón y pida a los alumnos que las lean en voz alta y que expliquen en qué se parecen y en qué son diferentes. Como resultado de años de práctica con la aritmética, para muchos alumnos el signo igual (=) no significa que lo que está a la izquierda del signo sea equivalente a lo de su derecha, sino que lo de la derecha es el resultado de lo de la izquierda, es decir, el signo es unidireccional. Por eso es importante que se comenten casos como éste, en el que las expresiones son idénticas pero el término $11.70x$ aparece en uno u otro lado del signo igual.

Respuestas.
Por una libra esterlina obtenemos 18.33 pesos (se divide 3 666 entre 200).
Por una peseta obtenemos 0.0748 pesos (se divide 7.48 entre 100).
Por un yen obtenemos 0.089 pesos (se divide 17.8 entre 200).
Entonces las expresiones algebraicas son:
Libra a peso $y = 18.33x$
Peseta a peso $y = 0.0748x$
Yen a peso $y = 0.089x$

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que a partir de las expresiones algebraicas digan:

- Por cuál moneda extranjera (un dólar americano, un quetzal guatemalteco, etc.) dan más pesos al cambio.
- Por cada peso, de cuál moneda extranjera puede comprarse una mayor cantidad.

>>> A lo que llegamos

A las relaciones de proporcionalidad directa les corresponden expresiones algebraicas que permiten encontrar las cantidades multiplicando su correspondiente por la constante de proporcionalidad.

Por ejemplo, si la cantidad de dólares estadounidenses que se van a cambiar se representa como x, y la cantidad de pesos que se obtienen se representa como y, entonces la expresión algebraica

$$y = 11.70x$$

permite saber la cantidad de pesos (y) que se obtienes al cambiar cierta cantidad de dólares (x). La constante de proporcionalidad en este caso es: **11.70 pesos por cada dólar**.

Esta expresión es llamada la **expresión algebraica que corresponde a la relación de proporcionalidad directa**.

>>> Lo que aprendimos

1. Completa la siguiente tabla para encontrar las cantidades de pesos que se obtienen al cambiar distintas cantidades de dólares canadienses.

Cantidad de dólares canadienses	Cantidad recibida en pesos mexicanos
20	178
10	89
1	8.9

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite calcular la cantidad de pesos obtenidos al cambiar dólares canadienses? ______

b) ¿Cuál es la expresión algebraica para calcular la cantidad de pesos obtenidos al cambiar dólares canadienses? ______

Respuestas.

a) Es 8.9 pesos por cada dólar canadiense.

b) $y = 8.9x$
y son los pesos,
x son los dólares canadienses.

Sugerencia didáctica. Diga a los alumnos que investiguen las cotizaciones actualizadas de diversas monedas y realicen varios ejercicios de este tipo: encontrar la constante de proporcionalidad y la expresión algebraica que permiten realizar la conversión de una moneda a otra.

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos una copia de sus respuestas a esta actividad y valore sus resultados. Si tienen dificultades, realicen más cambios entre monedas, averigüen cuál es la constante de proporcionalidad y escriban sus expresiones algebraicas.

Propósito de la sesión. Encontrar la expresión algebraica o la relación funcional cuando se aplican sucesivamente dos constantes de proporcionalidad.
Una vez encontrada la expresión algebraica, hallar la inversa y notar las similitudes y diferencias entre estas dos expresiones algebraicas.

Organización del grupo. Se sugiere trabajar en parejas y de manera individual.

Propósito de la actividad. Se espera que los alumnos puedan llenar la tabla con facilidad porque las han utilizado anteriormente en los temas de proporcionalidad. El desafío al que van a enfrentarse en esta actividad consiste en escribir expresiones algebraicas que den cuenta de las relaciones de proporcionalidad implicadas en la situación cuando se componen dos constantes de proporcionalidad.

Respuestas.

a) El tamaño real se multiplica por 150 para obtener el tamaño final. Si llamamos w al tamaño final, y x al tamaño real, entonces $w = 150x$.

b) El tamaño real (x) se multiplica por 15 para pasar al tamaño de la primera lente (y).
$y = 15x$

c) El tamaño obtenido con la primera lente (y) se multiplica por 10 para obtener el de la segunda lente o tamaño final (w).
$w = 10y$

Recuerde que los alumnos pueden utilizar otras letras.

SESIÓN 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD EN DISTINTOS CONTEXTOS

>>> Para empezar

En esta sesión continuarás estudiando las expresiones algebraicas correspondientes a las situaciones de proporcionalidad.

En la secuencia 16 de tu libro de *Matemáticas I, volumen I* estudiaste la aplicación sucesiva de constantes de proporcionalidad en el cálculo de amplificaciones de imágenes con los microscopios ópticos compuestos.

>>> Consideremos lo siguiente

En el laboratorio de Ciencias hay algunos microscopios compuestos. Uno de ellos tiene una lente en el **objetivo** que aumenta 15 veces el tamaño de los objetos. Además, tiene una lente en el **ocular** que aumenta 10 veces.

Llenen la siguiente tabla para encontrar el tamaño con el que se verán las imágenes usando este microscopio.

	Tamaño real (micras)	Tamaño obtenido con la primera lente (micras)	Tamaño final (micras)
Bacteria 1	3	45	450
Espermatozoide humano	8	120	1 200
Cloroplasto	11	165	1 650
Glóbulo rojo	12	180	1 800
Glóbulo blanco	200	3 000	30 000

Tabla 1

En esta tabla hay varias relaciones de proporcionalidad. En sus cuadernos escriban la expresión algebraica que permite:

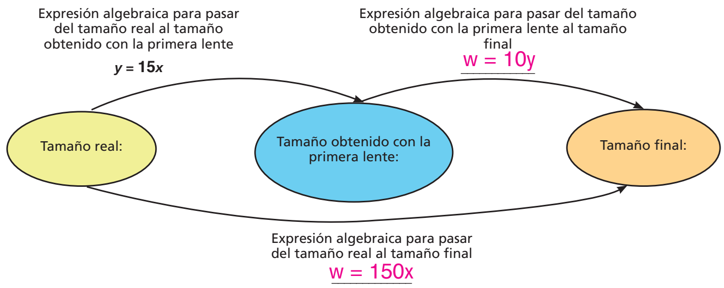
a) Pasar del tamaño real del objeto al tamaño final.

b) Pasar del tamaño real al tamaño obtenido con la primera lente.

c) Pasar del tamaño obtenido con la primera lente al tamaño obtenido con la segunda lente.

>>> Manos a la obra

I. En el siguiente diagrama se llama x al tamaño real, y al tamaño obtenido con la primera lente y w al tamaño final visto en el microscopio. Complétenlo:



Comparen las fórmulas que obtuvieron en el diagrama y comenten cómo las obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

Cuando se **aplican sucesivamente dos constantes de proporcionalidad** se obtienen varias relaciones de proporcionalidad. Para cada una de estas relaciones se puede encontrar una expresión algebraica.

Por ejemplo, en un microscopio con lentes de 20 y 30 veces de aumento, si se llama x al tamaño real, y al tamaño obtenido con la primera lente y w al tamaño final, se pueden obtener:

- La expresión que permite pasar del tamaño real al tamaño obtenido con la primera lente: $y = 20x$
- La expresión que permite pasar del tamaño obtenido con la primera lente al tamaño obtenido con la segunda lente: $w = 30y$
- La expresión que permite pasar directamente del tamaño real al tamaño final:

$$w = 600x$$

La constante de proporcionalidad de la última expresión se obtiene al multiplicar las constantes dadas por los aumentos de las lentes.

Sugerencia didáctica. Proponga a los alumnos otros ejemplos de microscopios compuestos para que practiquen la escritura de expresiones algebraicas y pídales que averigüen cuál es la constante de proporcionalidad que les permite pasar del tamaño real al tamaño final.

Respuestas.

a) 36 km (18 × 2).

b) 90 km (18 × 5).

c) La constante de proporcionalidad es 18 km por litro. Si la distancia recorrida (y) es igual al consumo de litros de gasolina por 18, entonces la expresión es $y = 18x$.

Sugerencia didáctica. Recuerde a los alumnos que pueden utilizarse otras letras, siempre y cuando se indique el significado de cada una. Por ejemplo:

$d = 18l$

$a = 18b$

$m = 18n$

Propósito de la actividad. Ahora los alumnos tienen que averiguar cuál es el consumo de gasolina conociendo la distancia recorrida, o sea, se invierte el lugar en el que se encuentra el dato a hallar. En las 3 preguntas anteriores la situación era:

A tantos litros de gasolina → ¿Qué distancia se recorre?

Como se plantea en la tabla 2 es:

A tantos kilómetros recorridos → ¿Cuántos litros de gasolina se consumen?

Ambos casos son parte de una misma relación de proporcionalidad directa, pero se invierte el conjunto de partida: en el primer caso es el consumo de gasolina y en el segundo la distancia recorrida.

Para los alumnos esto implica encontrar 2 constantes de proporcionalidad, una inversa de la otra:

18 km por litro y $\frac{1}{18}$ de litro por km.

II. En la secuencia 15 de su libro de **Matemáticas I** aprendieron que el rendimiento de un automóvil es el número de km recorridos por cada litro de gasolina.

Si el rendimiento de un automóvil es de 18 km por litro de gasolina,

a) ¿Cuántos km recorrerá ese automóvil con 2 ℓ de gasolina? ____________

b) ¿Y con 5 litros de gasolina? ____________

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular la distancia recorrida para cualquier cantidad de litros de gasolina? ____________

Completen la siguiente tabla para saber cuántos litros de gasolina consume el automóvil en las distintas rutas indicadas en la tabla.

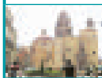
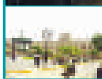
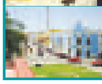
Ruta		Distancia recorrida (km)	Consumo de gasolina (ℓ)
	Morelia – Guanajuato	162	9
	Ciudad Victoria – Monterrey	288	16
	Ciudad de México – Guadalajara	576	32
	Aguascalientes – Campeche	1 818	101

Tabla 2

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar el consumo de gasolina a partir de la distancia que se recorre? ____________

e) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a esta situación de proporcionalidad? ____________

>>> A lo que llegamos

En la relación de proporcionalidad del rendimiento de gasolina encontraron dos expresiones algebraicas:

- **La que permite calcular los kilómetros que se pueden recorrer con cierta cantidad de litros de gasolina.**
- **La que permite calcular la cantidad de gasolina necesaria para recorrer cierta cantidad de kilómetros.**

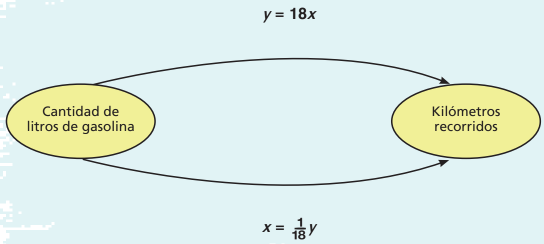
170

Respuestas.

d) Es $\frac{1}{18}$ de litro de gasolina por cada kilómetro recorrido (se multiplican los kilómetros recorridos por $\frac{1}{18}$ o se dividen entre 18).

e) El consumo de gasolina (x) es igual a los kilómetros recorridos (y) por $\frac{1}{18}$, entonces la expresión es $x = \frac{1}{18}y$.

El siguiente diagrama muestra la relación que existe entre estas dos expresiones:



Recuerden que:
Un número y su recíproco multiplicados dan 1. Por ejemplo:
$6 \times \frac{1}{6} = 1$

En este caso, las constantes de proporcionalidad son números recíprocos, es decir, la constante de proporcionalidad de la segunda expresión es el recíproco de la constante de proporcionalidad de la primera.

>>> Lo que aprendimos

Un microscopio tiene una lente en el objetivo que aumenta 30 veces el tamaño de los objetos y una lente en el ocular que aumenta 20 veces.

1. Encuentra:
   a) La expresión algebraica que permite pasar del tamaño real de un objeto a su tamaño final. ______
   b) La expresión algebraica que permite pasar del tamaño real a su tamaño obtenido con la primera lente. ______
   c) La expresión algebraica que permite pasar del tamaño obtenido con la primera lente al tamaño obtenido con la segunda lente. ______

2. Hay una célula que con este microscopio se ve de 3 milímetros de tamaño, ¿cuánto mide realmente? ______
   Encuentra la expresión algebraica que permite encontrar el tamaño real de un objeto si se sabe el tamaño final con el que se ve. ______

>>> Para saber más

Sobre el tipo de cambio entre monedas de distintos países consulta:
http://www.oanda.com/convert/classic?user=etravetware&lang=es
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Sugerencia didáctica. Copie en el pizarrón el diagrama y analícenlo juntos. Pregunte a los alumnos:

- Si se ve la relación que señala la flecha de arriba, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad inversa a la anterior (la relación que señala la flecha de abajo)?
- ¿Por qué el recuadro afirma que 18 y $\frac{1}{18}$ son números recíprocos? Si no lo saben, sugiérales que revisen la secuencia 10, sesión 4, en la que vieron el tema de los números recíprocos.

Integrar al portafolios. Guarde una copia de las respuestas de cada alumno a las preguntas de este apartado. Si después de revisarlas considera necesario hacer un repaso, vuelvan al apartado *Manos a la obra* de esta secuencia.

Respuestas.

1.
a) Los objetos aumentan 600 veces, así que la expresión es $y = 600x$ (y es el tamaño final y x el tamaño real).
b) $w = 30x$ (w es el tamaño obtenido con la primera lente).
d) $y = 20w$

2.
Hay que dividir $\frac{3}{600} = \frac{1}{200}$ de milímetro. Expresado como número decimal es 0.005 milímetros o 5 micras (una micra es 0.001 milímetros).
$x = \frac{1}{600}y$ (siguiendo la nomenclatura anterior).

Propósito de la sesión. Analizar y construir gráficas de variación directamente proporcional y no proporcional. Comparar gráficas de variación proporcional con otras gráficas.

Organización del grupo. A lo largo de la sesión se sugiere trabajo en equipos, en parejas e individual.

Propósito del video. Ejemplificar el uso de gráficas para el análisis y la representación de distintas situaciones problemáticas.

1

Propósito de la actividad. La presentación de esta gráfica tiene como objetivo introducir algunos conceptos (como el nombre de los ejes), y recordar otros (como la localización de un punto mediante ejes de coordenadas y el análisis de la información).
Como puede observarse, no presenta una relación de proporcionalidad. Se espera que al incluir gráficas que representan distintos tipos de relaciones entre sus datos, los alumnos noten las diferencias y distingan cuáles gráficas representan relaciones proporcionales.

SECUENCIA 32

Gráficas asociadas a situaciones de proporcionalidad

En esta secuencia aprenderás a explicar las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.

SESIÓN 1

GRÁFICAS Y SUS CARACTERÍSTICAS

>>> Para empezar

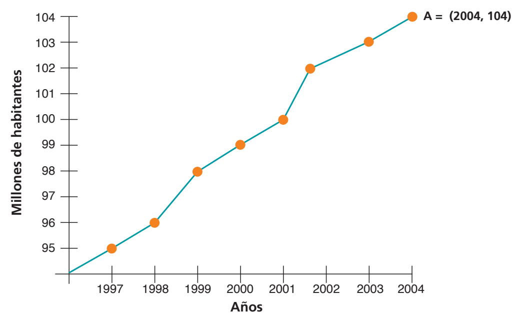
Gráficas

Mediante el uso de las gráficas se pueden interpretar y explicar situaciones diversas, por ejemplo:

- El crecimiento de la población en determinada región del país en un tiempo dado.
- La variación del peso de un bebé a lo largo de cierto tiempo.
- El índice de natalidad en un país a través del tiempo.

En la secuencia 7 **¿Cómo es y dónde está la población?** de su libro de *Geografía de México y del mundo, volumen I* estudiaron la distribución de la población en México. La siguiente es una gráfica que muestra el crecimiento de la población de nuestro país en los últimos 8 años.

Crecimiento de la población en los últimos 8 años



172

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Antecedentes
En esta secuencia se parte de los conocimientos con los que ya cuentan los alumnos sobre proporcionalidad directa y su expresión algebraica, para vincularlos con su representación en el plano cartesiano.

Propósitos de la secuencia
Explicar las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos	Vínculos
1	*Gráficas y sus características* Analizar y construir gráficas de variación directamente proporcional y no proporcional. Comparar gráficas de variación proporcional con otras gráficas.	Video *Gráficas*	*Geografía de México y el mundo* Secuencia 7
2	*Comparación de gráficas* Analizar las propiedades de las gráficas asociadas a cantidades directamente proporcionales.	Interactivo "Variación proporcional y gráficas"	

Para localizar e interpretar los puntos de una gráfica se hace uso de sus coordenadas. Las coordenadas del punto **A** son (2004,104), esto quiere decir que en el año 2004 había 104 millones de habitantes. En la primera coordenada del punto, llamada **abscisa**, van los años, y en la segunda coordenada del punto, llamada **ordenada**, el número de habitantes que hubo en ese año. El punto **A** tiene como abscisa a 2004 y como ordenada a 104.

De acuerdo con la información de la gráfica, respondan lo siguiente:

a) ¿En qué año había 102 millones de habitantes? ______

b) ¿En qué año había 95 millones de habitantes? ______

c) Localicen el punto que tiene ordenada 96. ¿Cuál es su abscisa? ______

¿A qué año corresponde este punto? ______ ¿Cuántos millones de habitantes hubo en ese año? ______

d) Completen la siguiente tabla para establecer el número de habitantes que hubo en los años que se indican.

Año	Número de habitantes (en millones)
1997	95
1998	96
1999	98
2000	99
2001	100
2002	102
2003	103
2004	104

Comenten:

¿Cómo se vería la gráfica si de un año a otro la población no hubiera crecido?

>>> Consideremos lo siguiente

A continuación van a construir las gráficas de dos situaciones que han estudiado en este libro.

- En la secuencia 27 de su libro de *Matemáticas I, Volumen II* analizaron que el peso de un bebé durante el primer año de vida aumenta aproximadamente 0.5 kg por mes. Elaboraron una tabla en la que se muestra cómo va cambiando el peso de un bebé mes con mes, hasta cumplido un año de edad, considerando que el bebé al nacer pesó 3 kg.

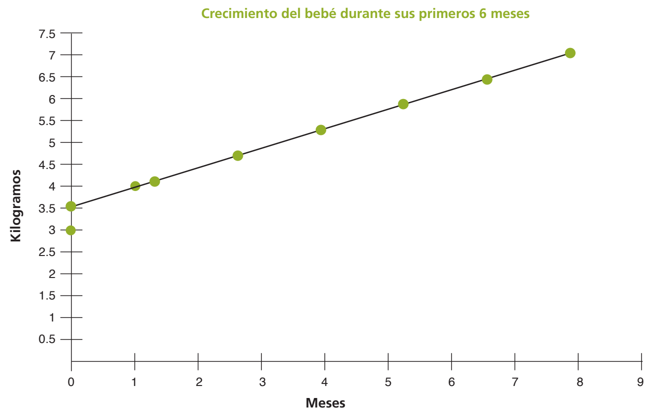
  a) En sus cuadernos copien la tabla que completaron en la secuencia 27.

  b) Con los datos de la tabla terminen la siguiente gráfica:

173

Respuestas.
a) En el 2002.
b) En 1997.
c) 1998

Sugerencia didáctica. Si los alumnos no conocen la respuesta, pídales que copien la gráfica en su cuaderno añadiendo en el eje de las abscisas los años 2005 y 2006, y suponiendo que el total de habitantes siguiera siendo el mismo que en el 2004, 104 000 000.



c) ¿En qué mes el bebé pesó 7.2 kg? ______

d) ¿En qué mes el bebé pesó 3.6 kg? ______

Respuestas.
c) Entre los 8 y 9 meses.
d) Entre el primero y segundo mes de edad.

- Las compañías fabricantes de automóviles hacen pruebas de velocidad a sus autos para verificar sus motores, frenos y sistemas de suspensión. Entre otras cosas, deben verificar que las velocidades a las que pueden viajar se mantengan constantes durante recorridos largos.

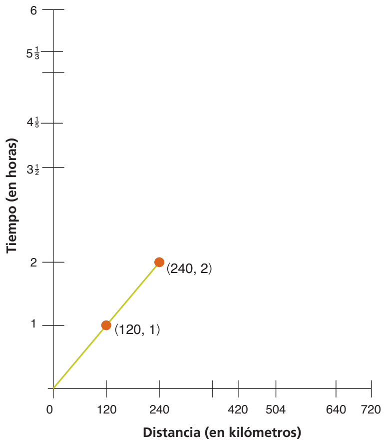
En la secuencia 6 de su libro de *Matemáticas I, volumen I* hicieron una tabla de la velocidad promedio de un automóvil. Supongan que, viajando en carretera, un automóvil va a 120 km por hora en promedio.

a) Completen la siguiente tabla para encontrar las distancias recorridas.

Sugerencia didáctica. Si los alumnos no recuerdan cómo multiplicar números fraccionarios, pídales que revisen la secuencia 10. También podrían averiguar a cuántos minutos equivale $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de hora, así sólo tendrían que multiplicar números naturales.

Tiempo de viaje (en horas)	Kilómetros recorridos
1	120
2	240
$3\frac{1}{2}$	420
$4\frac{1}{5}$	504
$5\frac{1}{3}$	640
6	720

b) Con los datos de la tabla anterior, completen la siguiente gráfica.



c) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer el automóvil 20 km? ____________

d) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer el automóvil 40 km? ____________

Respondan:

¿Cuál de las dos gráficas que acaban de construir, la del peso del bebé y la de la velocidad promedio del automóvil, corresponde a una situación de proporcionalidad? ____________

Comparen sus respuestas y sus gráficas.

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto pesó el bebé a los dos meses de nacido? ____________

b) ¿Cuánto pesó a los cuatro meses? ____________

c) A los 6 meses el bebé pesó 6 km. ¿Cuánto pesó a los 12 meses? ____________

175

Respuestas.
c) 20 km es la sexta parte de 120 km, así que los recorre en $\frac{1}{6}$ de hora o 10 minutos.
d) 20 minutos (el doble que lo que se tarda en recorrer 20 km).

3

Sugerencia didáctica. Organice un intercambio de ideas sobre esta pregunta. Trace en el pizarrón o en cartulina la gráfica correspondiente a la situación del peso del bebé y pregunte si es o no proporcional y pida que le expliquen por qué. Luego, haga lo mismo con la del automóvil. Compárenlas y pregunte a los alumnos qué es igual y qué es distinto en una con respecto de la otra. Si no llegan a un acuerdo, permítales seguir resolviendo la sesión, más adelante tendrán oportunidad de comentarlo.

Propósito de la pregunta. Es importante que los alumnos analicen en las gráficas qué caracteriza a una relación de proporcionalidad directa. Aunque la gráfica del peso del bebé da la impresión de ser directamente proporcional (porque cada mes aumenta 0.5 kg), cuando el bebé nace (tiene 0 meses) ya pesa 3 kg, por lo que la recta no pasa por el punto 0,0. En cambio, en la situación del automóvil a 0 horas de viaje corresponden 0 km de recorrido y la recta sí pasa por el punto 0,0.

Respuestas.
Si el peso del bebé es y y la edad x, se puede hallar el peso del bebé con la ecuación $y = 0.5x + 3$.
a) 4 kg.
b) 5 kg.
c) 9 kg.

Sugerencia didáctica. Comenten en el grupo su respuesta al inciso c). Posiblemente algunos alumnos respondieron que el bebé pesa 12 kg a los 12 meses, pero eso es incorrecto porque no es una relación de proporcionalidad directa.
Si existe confusión, recurra a lo que los alumnos aprendieron en otras secuencias. Saben que en las relaciones proporcionales hay una constante de proporcionalidad, pregúnteles si en esta situación es posible hallarla.

Respuestas.
a) $\frac{1}{6}$ de hora son 10 minutos.
b) Sí, 0 minutos.
c) 0 km.

Sugerencia didáctica. Después de leer esta información, pídales que regresen a la última pregunta del apartado *Consideremos lo siguiente* y corrijan si es necesario.

II. Completen la siguiente tabla para encontrar el número de kilómetros recorridos en las distintas fracciones de tiempo que se indican:

Tiempo de viaje (hs)	Kilómetros recorridos
1	120
$\frac{1}{2}$	60
$\frac{1}{3}$	40
$\frac{1}{4}$	30
$\frac{1}{5}$	24
$\frac{1}{6}$	20

Comenten:

a) ¿En qué fracción de tiempo se recorren 20 km?, ¿a cuántos minutos es equivalente esta fracción de tiempo?

b) ¿Hay un tiempo para el cual el automóvil recorre 0 km?

c) ¿Cuántos kilómetros se recorren en cero minutos?

>>> A lo que llegamos

- Las gráficas son de mucha utilidad para representar diversas situaciones que se quieran estudiar. Por ejemplo, la gráfica de la velocidad constante del automóvil es una **gráfica de proporcionalidad directa**, porque la distancia recorrida por el automóvil y el tiempo que tarda en recorrerla son cantidades directamente proporcionales.
- En las situaciones de proporcionalidad el punto **(0,0)** es parte de la gráfica (en 0 horas se recorren 0 km). Esto siempre sucede en las gráficas que representan relaciones de proporcionalidad.

>>> Lo que aprendimos

1. En la secuencia 31 de su libro de *Matemáticas I* encontraron que la expresión algebraica.

$$y = 11.70x$$

Permite encontrar la cantidad de pesos (y) que se obtienen al cambiar distintas cantidades de dólares (x).

En su cuaderno hagan la gráfica que corresponde a esta situación de proporcionalidad y contesten:

a) Si $x = 0$, ¿cuánto vale la y? ______

b) Si $x = 10$, ¿cuánto vale y? ______

c) Si $x = 30$, ¿cuánto vale y? ______

COMPARACIÓN DE GRÁFICAS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En la secuencia 6 del libro de *Matemáticas I, volumen I* estudiaste las propiedades de las cantidades directamente proporcionales y aprendiste que la cantidad de pintura es proporcional a su precio.

>>> Consideremos lo siguiente

Completen la tabla 1 para determinar los costos de varias cantidades de pintura azul y, en su cuaderno, hagan una gráfica correspondiente.

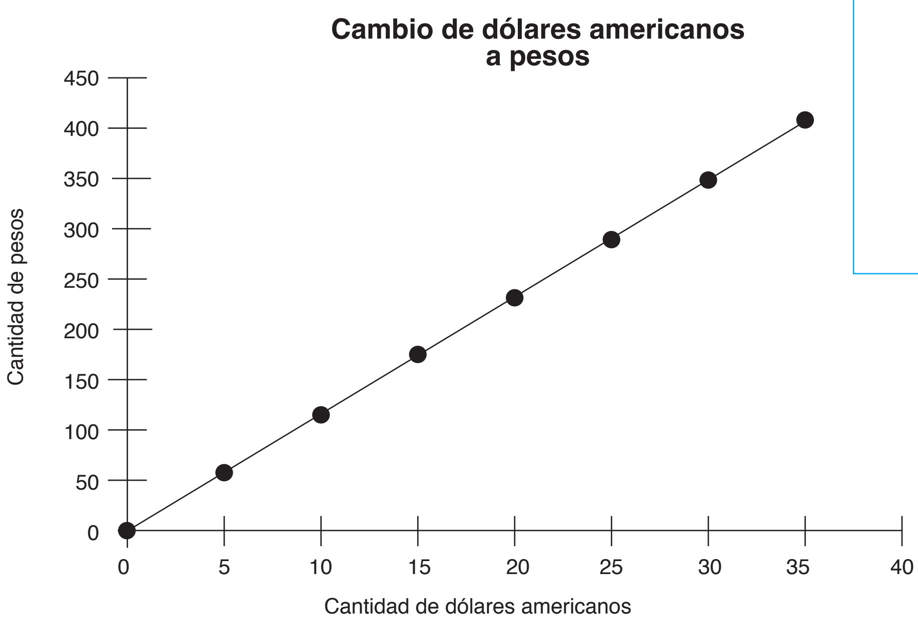
Cantidad de pintura azul (ml)	Costo de la pintura ($)
500	50
100	10
800	80
200	20
0	0
400	40
1 000	100

Tabla 1

a) ¿Qué cantidad de pintura se compra con $5? ______

b) ¿Qué cantidad de pintura se compra con $3? ______

177



Integrar al portafolios. Revise las gráficas y las respuestas de los alumnos. Si nota dificultades, pídales que regresen al apartado *Manos a la obra.*

Sugerencia didáctica. Si los alumnos tienen dificultades para trazar la gráfica puede darles algunas sugerencias, como:

- Primero hay que precisar qué información se pone en cada eje (por ejemplo, en el eje de las abscisas poner la cantidad de pesos).
- Luego hay que definir una escala conveniente para cada uno de los ejes.

Respuestas.

a) 0

b) 117

c) 351

Propósitos de la sesión. Analizar las propiedades de las gráficas asociadas a cantidades directamente proporcionales.

Organización del grupo. Se sugiere trabajar en parejas, y en el último apartado de manera individual.

Propósito de la actividad. Se espera que para los alumnos no sea difícil el llenado de la tabla porque lo han hecho anteriormente. Ahora el reto consiste en que, a partir de los datos de la tabla, elaboren una gráfica y la analicen para hallar otros datos (como la cantidad de pintura que se compra con $3).

Respuestas.

a) 150 ml.

b) 30 ml.

Propósito del interactivo. Relacionar la expresión algebraica que corresponde a la relación entre 2 cantidades que son directamente proporcionales con su representación gráfica y tabular.

Propósito de la actividad. La intención es que los alumnos sepan que la representación gráfica de una relación de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen, y que todos los valores asociados a dicha relación están en esa recta.
Por ello, cuando se conocen 2 puntos se puede trazar la recta y afirmar que en ella estarán todos los demás valores.

3

Sugerencia didáctica. Permítales discutir este punto. Si no están seguros de que el procedimiento de la otra escuela es correcto, sigan resolviendo la sesión, luego podrán aclararlo.

>>> Manos a la obra

I. En un equipo de otra escuela hicieron lo siguiente para construir la gráfica asociada a la tabla 1.

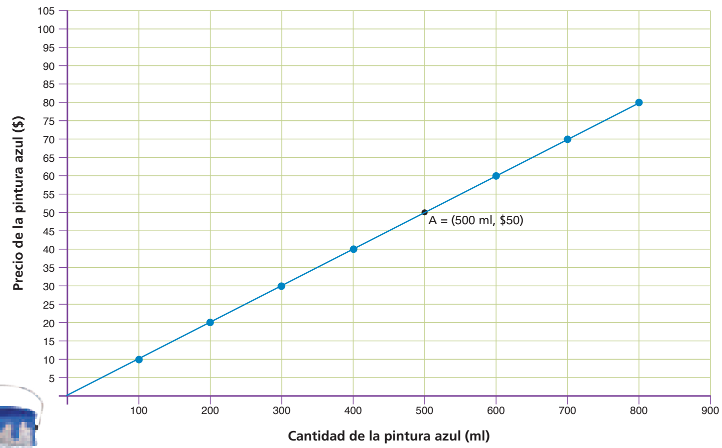
Primero determinaron dos puntos a graficar.

A = (500 ml, \$50)

B = (100 ml, \$10)

Luego localizaron los puntos **A** y **B** en el plano cartesiano. Finalmente, dijeron que como la gráfica era de proporcionalidad, entonces bastaba unir el punto **A** con el punto **B** y prolongar la recta que une a estos puntos y así obtener la gráfica asociada a la tabla 1.

En el siguiente espacio hagan el procedimiento que hizo el equipo de la otra escuela.



Comenten:

¿Están de acuerdo con el procedimiento que hicieron en la otra escuela? ¿Por qué?

Con los datos de la tabla 1 completen los siguientes datos para determinar algunos puntos más que pertenecen a la gráfica.

A = (500 ml, \$50)	**B** = (100 ml, \$10)	**C** = (800 ml, \$ ______)	**D** = (200 ml, \$ ______)
E = (0 ml, \$ ______)	**F** = (400 ml, \$ ______)	**G** = (1000 ml, \$ ______)	

Tabla 2

En la gráfica que completaron anteriormente localicen y dibujen los puntos de la tabla 2. ¿Cuáles de los puntos que dibujaron pertenecen a la gráfica? ______

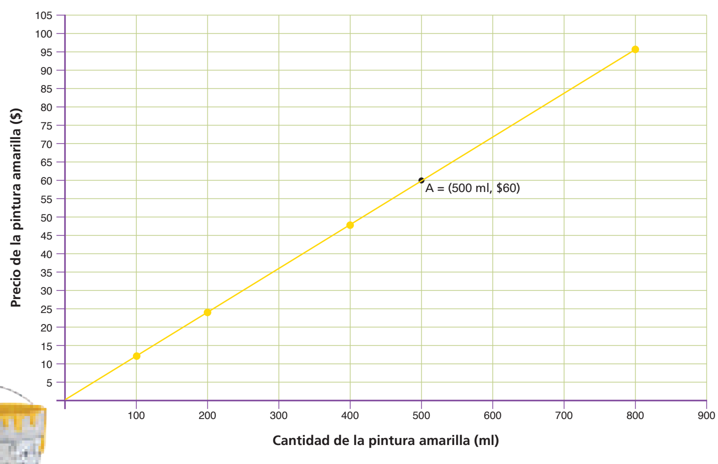
II. Completen las siguientes tablas, en las que vienen los precios de algunas cantidades de pintura amarilla y pintura verde.

Cantidad de pintura amarilla (ml)	Costo de la pintura ($)
500	60
100	12
800	96
200	24
0	0
400	48

Cantidad de pintura verde (ml)	Costo de la pintura ($)
500	65
100	13
800	104
200	26
0	0
400	52

Tabla 3 y 4

En el siguiente espacio hagan la gráfica asociada a las cantidades de pintura amarilla y su precio.



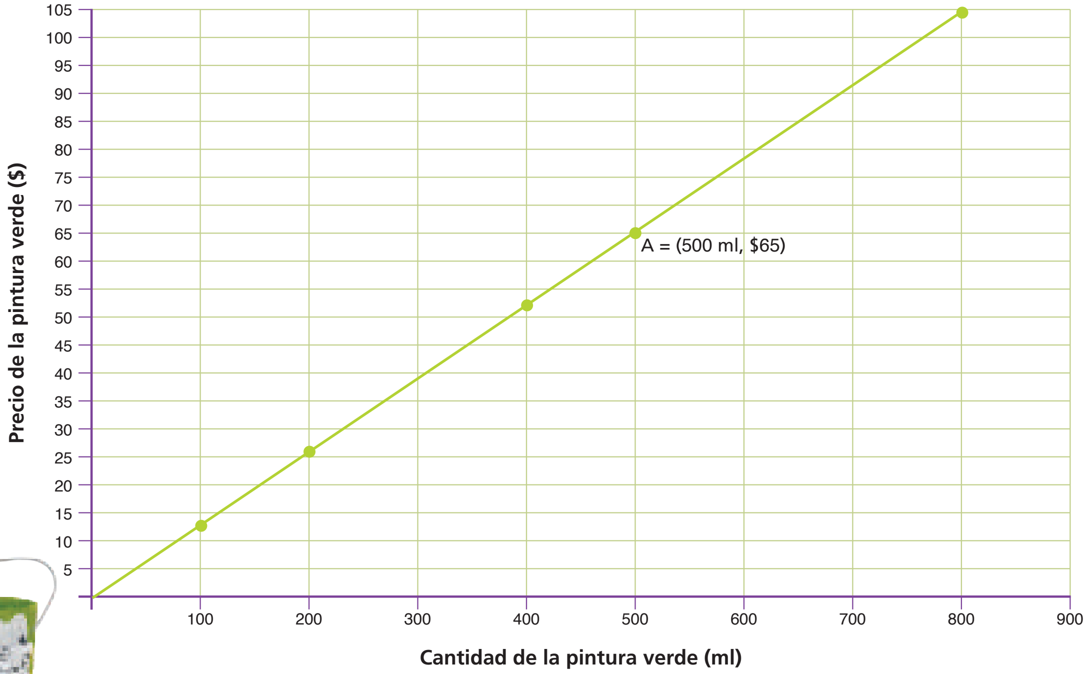
179

Respuestas. Todos los puntos deben quedar sobre la recta.

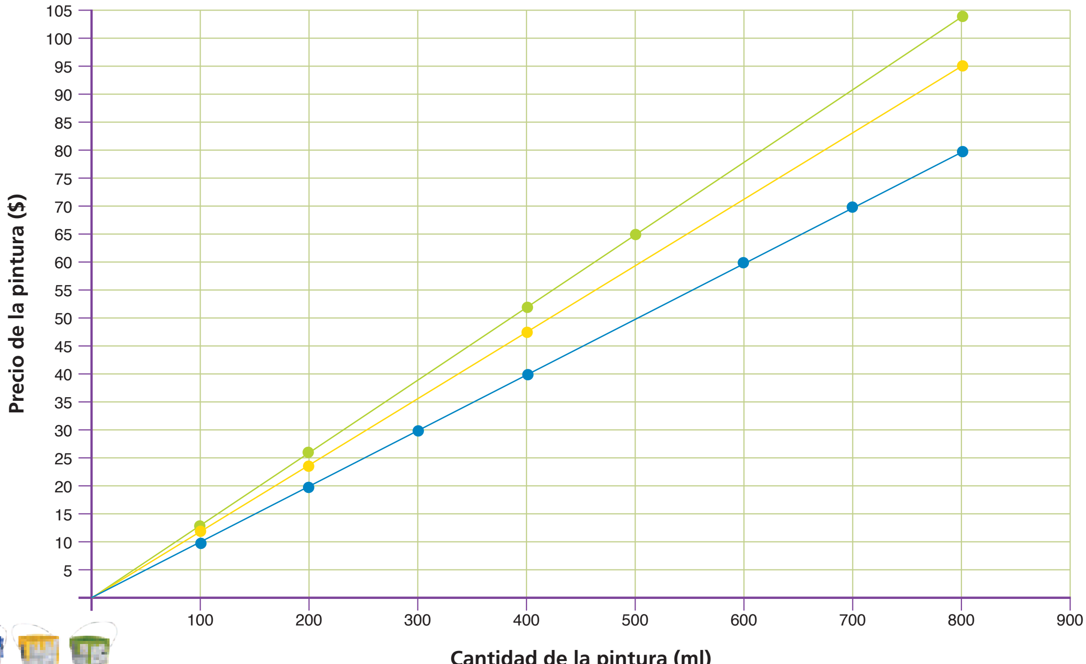
Sugerencia didáctica. Los alumnos ya tienen experiencia en el llenado de tablas de proporcionalidad directa. Antes de que empiecen a llenarlas, pregúnteles qué procedimiento les parece más económico en este caso y por qué: hallar el valor unitario, multiplicar por la constante de proporcionalidad, calcular el costo de 100 ml y a partir de éste los demás, u otros.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos hagan más gráficas de proporcionalidad directa y que constaten que siempre van a obtener rectas que pasan por el origen. También se espera que las comparen para obtener otras informaciones (como lo que significa la mayor o menor inclinación de la recta en este caso).

En el siguiente espacio hagan la gráfica asociada a las cantidades de pintura verde y su precio.



III. En el siguiente espacio dibujen las gráficas correspondientes a la tabla 1, la tabla 3 y la tabla 4 (usen el color azul para la 1, el amarillo para la 3 y el verde claro para la 4).



180

IV. Comenten lo siguiente:

a) El litro de pintura verde cuesta más que el litro de pintura azul. ¿Cómo se refleja esto en la gráfica que completaron anteriormente?

b) El costo del litro de pintura verde es mayor que el costo de pintura amarilla. ¿Cómo se refleja esto en la gráfica que completaron anteriormente?

Respuestas. La recta que representa a la pintura más cara estará por encima de las otras dos.

a) La recta verde va por encima de la azul.

b) La recta verde va por encima de la amarilla.

>>> A lo que llegamos

Una situación en la que estén involucradas cantidades directamente proporcionales (por ejemplo, la cantidad de pintura azul y su costo) tiene asociada una gráfica con dos características particulares:

- **Son puntos que están sobre una línea recta.**
- **Pasan por el origen, es decir, por el punto (0,0).**

De la comparación de gráficas puede obtenerse información sobre la relación de proporcionalidad. Por ejemplo, la gráfica de la pintura azul se encuentra entre la de la pintura verde claro y el eje horizontal. La interpretación de este hecho es que la pintura verde claro es más cara que la pintura azul, pues 500 ml de pintura verde claro cuestan \$65, mientras que 500 ml de pintura azul cuestan \$50.

Integrar al portafolios. Analice las respuestas de los alumnos y sus gráficas. Si lo considera necesario, revisen juntos el apartado *Manos a la obra* de esta sesión.

>>> Lo que aprendimos

En la secuencia 31 de su libro de *Matemáticas I* encontraron que la expresión algebraica

$$y = 8.9x$$

permite encontrar la cantidad de pesos (y) que se obtienen al cambiar distintas cantidades de dólares canadienses (x).

1. En sus cuadernos grafiquen esta situación de proporcionalidad y contesta:

   a) Si $y = 0$, ¿cuánto vale x?

   b) ¿Cuáles puntos de la gráfica están sobre una línea recta?

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que hagan esta gráfica sobre la de los dólares americanos que hicieron al final de la sesión 1.

Respuestas. Para elaborar la gráfica necesitan hallar al menos 2 puntos, por lo que deben encontrar otros valores de y.

a) 0

b) Todos.

2. Comparen la gráfica anterior con la gráfica correspondiente a la expresión $y = 11.70\,x$, que permite encontrar la cantidad de pesos que se obtienen al cambiar dólares americanos.

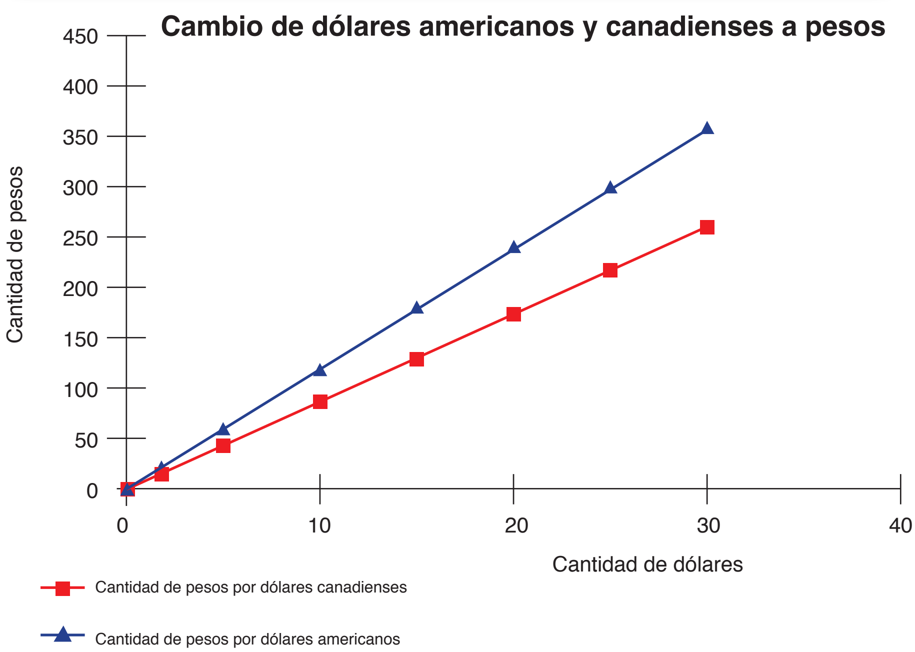
   a) ¿Cuál de las dos gráficas queda entre el eje horizontal y la otra gráfica? ¿Cómo interpretan esto?

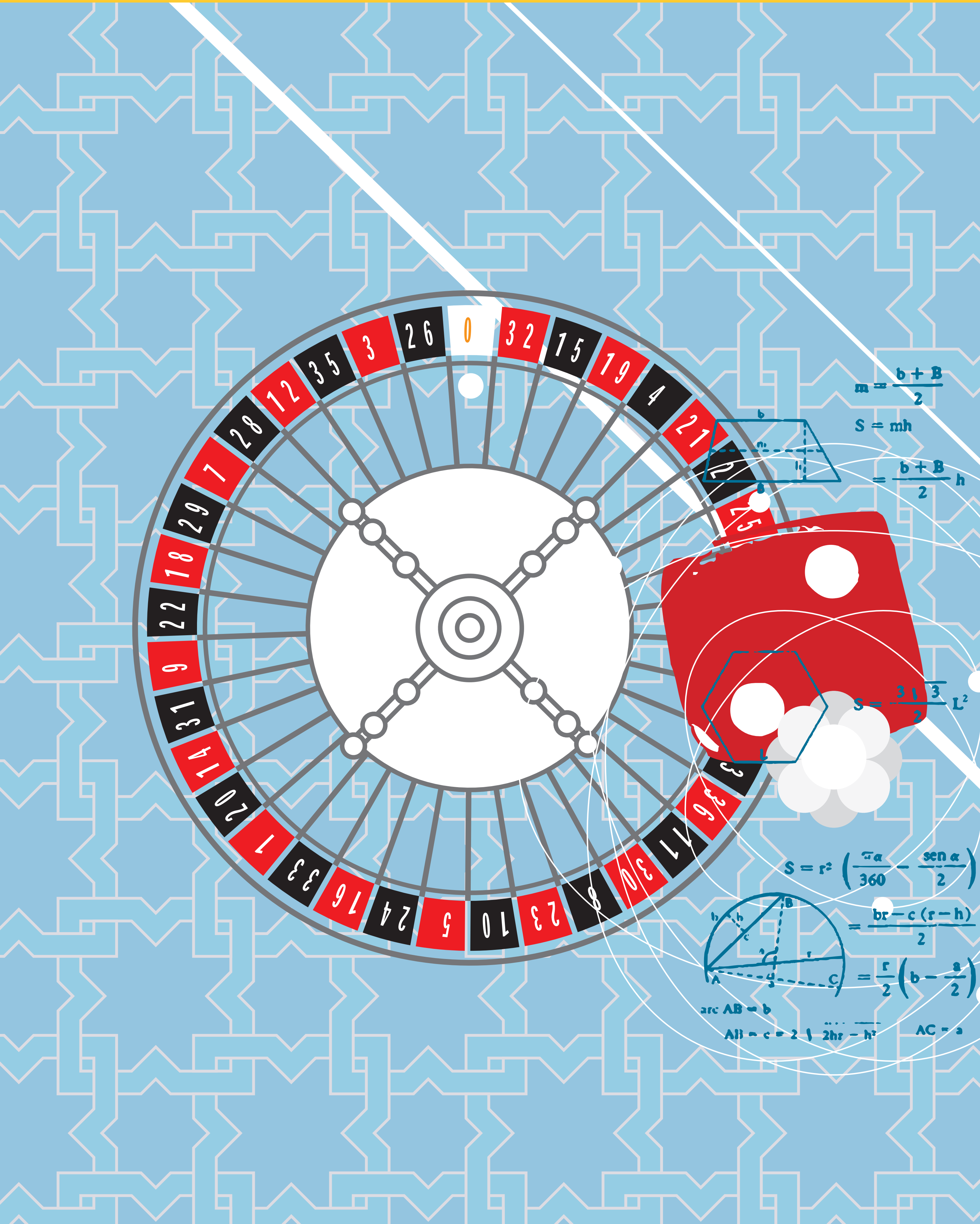
Comparen sus respuestas.

Respuestas. La gráfica correspondiente a los dólares americanos va por arriba de la de los dólares canadienses porque obtenemos más pesos al cambiar dólares americanos que dólares canadienses.

>>> Para saber más

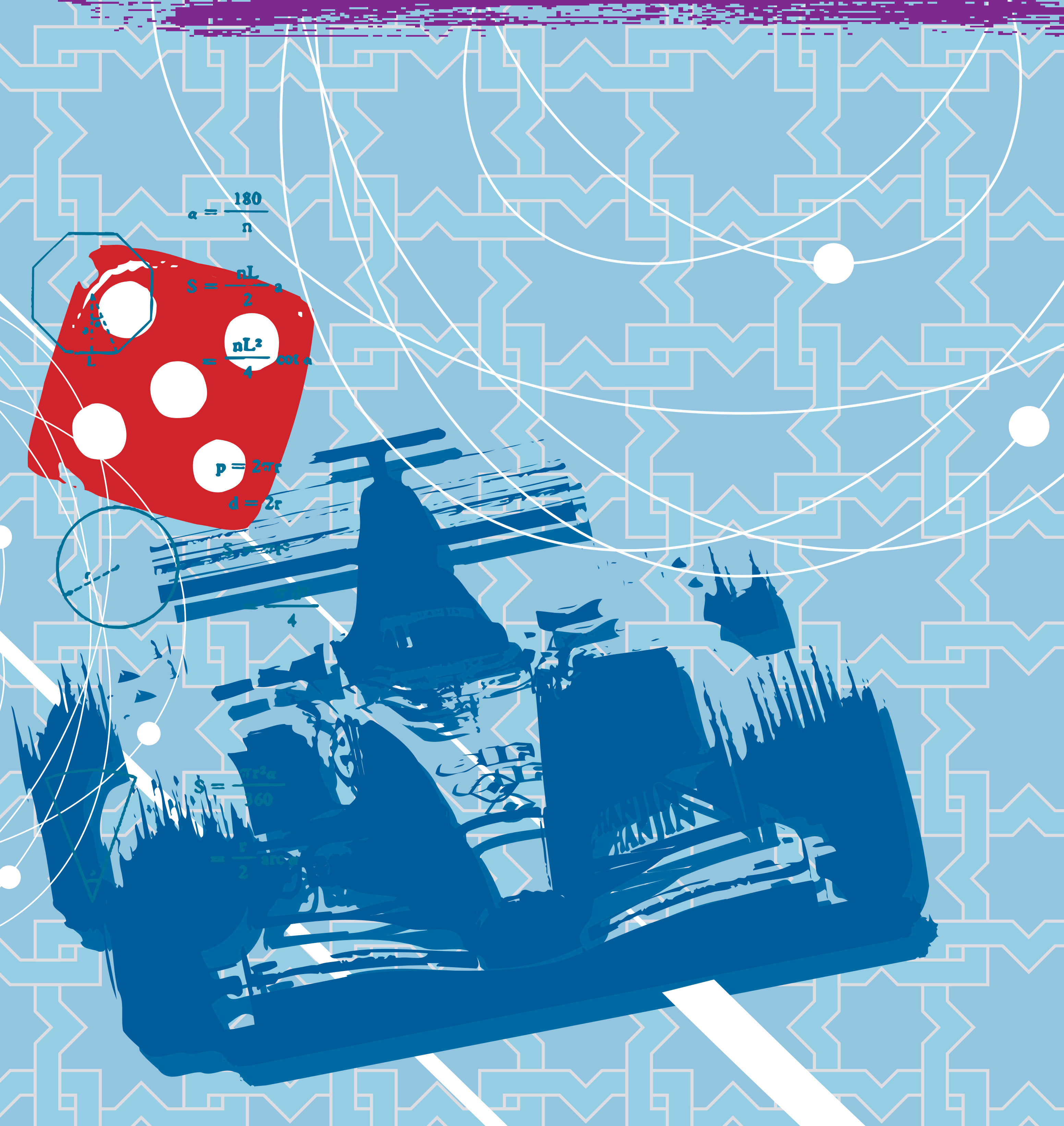
Sobre el crecimiento de la población en el país consulten:
http://www.cideiber.com/infopaises/Mexico/Mexico-02-01.html
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].





$m = \frac{b + B}{2}$
$S = mh$
$= \frac{b + B}{2} h$
$S = r^2 \left(\frac{\pi a}{360} - \frac{\text{sen}\, \alpha}{2} \right)$
arc AB = b
AC = a

BLOQUE 5



Propósito de la sesión. Resolver problemas de suma de números con signo mediante procedimientos informales.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en parejas y que el apartado *Lo que aprendimos* se resuelva de manera individual.

Sugerencia didáctica. Con esta información se presenta el contexto a partir del cual se explicarán las operaciones de números con signo. Usted puede darles tiempo para leer el texto y después comentarlo con todo el grupo. Algunas preguntas que pueden ayudar a los alumnos a recuperar la información más relevante, son: ¿qué partículas componen a los átomos y cuál es la carga de cada una de ellas? ¿Cómo se obtiene la carga total de un átomo? ¿Cómo se obtiene una carga 0?.

Propósito del video. Presentar los diferentes tipos de partículas y cargas que constituyen un átomo.

SECUENCIA 33

Cuentas de números con signo

En esta secuencia utilizarás procedimientos informales y algorítmicos de adición y sustracción de números con signo en diversas situaciones.

SESIÓN 1

LOS ÁTOMOS

>>> Para empezar

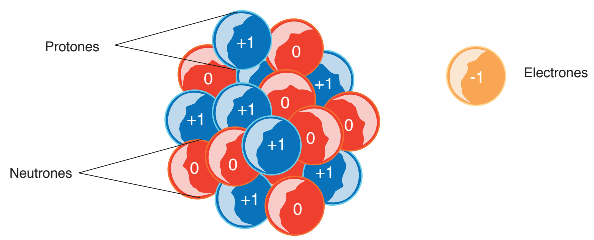
Los átomos

Una de las inquietudes más antiguas del hombre ha sido la de conocer de qué tipo de sustancias están hechas las cosas. Si bien se necesitaron muchos años de estudio para responder esta pregunta, ahora se sabe que toda sustancia está hecha de materia, que a su vez está formada por átomos. Asimismo, los átomos están compuestos por varios tipos de partículas, entre las que destacan las siguientes tres:

Los **neutrones**. No tienen carga eléctrica o su carga es nula, y forman parte del núcleo del átomo. La carga de un neutrón es **0**.

Los **protones**. Tienen carga eléctrica positiva y, junto con los neutrones, constituyen el núcleo del átomo. La carga de un protón es **+1**.

Los **electrones**. Tienen carga eléctrica negativa y giran alrededor del núcleo del átomo. La carga de un electrón es **–1**.



La **carga total** de un átomo depende del número de protones (cargas positivas) y de electrones (cargas negativas) que lo componen. Al juntar un protón y un electrón se obtiene una carga **0**, ya que la carga positiva del protón se cancela con la carga negativa del electrón. Así, la carga total de un átomo es el número de protones o electrones que resultan después de haber hecho todas las cancelaciones posibles.

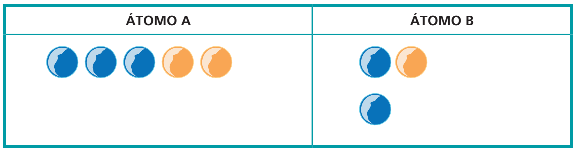
184

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Tema
Significado y uso de las operaciones.
Antecedentes
En la secuencia 25 los alumnos aprendieron a plantear y resolver problemas que implican números con signo. Identificaron el valor absoluto de los números así como el simétrico de un número. En esta secuencia resolverán problemas de suma y resta de números con signo utilizando tanto procedimientos informales como los algoritmos.

Propósitos de la secuencia
Utilizar procedimientos informales y algoritmos de adición y sustracción de números con signo en diversas situaciones.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*Los átomos* Resolver problemas de suma de números con signo mediante procedimientos informales.	Video *Los átomos* Interactivo "Los átomos 1"
2	*Sumas de números con signo* Resolver problemas de suma de números con signo mediante procedimientos convencionales. Sumar números decimales y fraccionarios con signo.	Interactivo "Los átomos 2"
3	*Restas de números con signo* Resolver problemas de resta de números con signo. Restar números decimales y fraccionarios con signo.	Interactivo "Los átomos 3"
4	*De todo un poco* Aplicar lo aprendido en la resolución de problemas de suma y resta de números con signo.	

Por ejemplo, los átomos A y B de la siguiente figura son distintos, pero ambos tienen carga total **+1**:



 Protones

 Electrones

Sugerencia didáctica. Pregunte al grupo por qué se afirma que estos 2 átomos tienen carga total +1.

>>> Consideremos lo siguiente

Propósito de la actividad. Que los alumnos apliquen el procedimiento para obtener la carga total de cada átomo haciendo las cancelaciones –de protones o de neutrones– necesarias.

Completen la siguiente tabla para calcular la carga total de distintos átomos:

Átomo	Partículas	Carga total
A		+2
B		+2
C		0
D		–1
I		+2
E		–1
F		–3
G		0
H		+3

Comparen sus tablas y comenten:

Aparte de los átomos con carga **+2** que aparecen en la tabla, ¿habrá otros átomos que tengan carga **+2**? Dibújenlos.

Sugerencia didáctica. Una vez que todo el grupo esté de acuerdo con el resultado, pida a cada pareja que proponga un ejemplo de átomos con carga +2 distintos a los de la tabla. Solicite a 2 o 3 parejas que pasen al pizarrón a dibujar sus ejemplos. En todos los casos debe haber 2 protones más que el número de electrones.

Respuesta. El átomo H tiene carga total +3, los demás sí tienen carga total +2.

Respuesta. En los átomos que dibujen debe haber 3 electrones más que los protones.

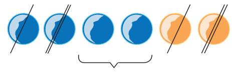
Sugerencia didáctica. En caso de que casi todos hayan dibujado el mismo átomo, pida al grupo que encuentren otros dos átomos con carga total de −3.

>>> Manos a la obra

I. En un equipo de otra escuela dijeron que los átomos **A**, **B**, **I** y **H** tienen carga total **+2**.

Explicaron lo siguiente:

La carga total del átomo **A** se puede obtener cancelando los pares protón-electrón que tiene:



+ 2

Cancelen los pares protón-electrón en los átomos **B**, **I** y **H** y verifiquen si tienen carga total **+2**.

Comenten: ¿Tienen carga total **+2** los átomos **A**, **B**, **I** y **H**?

a) En la tabla hay dos átomos con carga total **−1**, ¿cuáles son? ________ y ________

Verifiquen las cargas cancelando pares protón-electrón.

b) En la tabla, ¿cuáles átomos tienen carga **0**? ________

II. El átomo **F** tiene carga total **−3**. Dibujen dos átomos más con carga **−3**.

Comparen sus átomos y comenten:

a) ¿Cuántos átomos distintos, pero con carga **−3**, encontraron en el grupo?, ¿cuántos protones y cuántos electrones tienen?

b) En todos los átomos que encontraron hay más cargas negativas que positivas; ¿cuántas cargas negativas más hay que cargas positivas en cada átomo?

>>> A lo que llegamos

Un átomo tiene:

- **Carga positiva, si tiene más protones que electrones.**
- **Carga negativa, si tiene más electrones que protones.**

La carga total de un átomo es independiente del número de cargas 0 (neutrones) que tenga, ya que no aportan a la carga total.

III. Completen con los protones o electrones necesarios para que los siguientes átomos tengan carga total **0**.

ÁTOMO A	ÁTOMO B
	

a) ¿Cuántos protones tiene el átomo A? ______ ¿Y cuántos electrones debe tener para que tenga carga total **0**? ______

b) ¿Cuántos electrones tiene el átomo B? ______ ¿Y cuántos protones debe tener para que tenga carga total **0**? ______

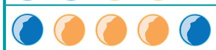
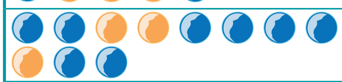
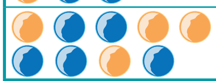
c) Si un átomo tiene carga total **0** y se sabe que tiene **25** protones, ¿cuántos electrones tiene? ______

>>> A lo que llegamos

Un átomo tiene carga 0 si tiene el mismo número de protones que de electrones, ya que la carga positiva de cada protón se anula con la carga negativa de cada electrón.

IV. El *valor absoluto* de la *carga de un átomo* es el número total de cargas que tiene, es decir, es el número de protones o electrones que quedan después de cancelar las parejas protón-electrón.

a) Encuentren el valor absoluto de las cargas de los siguientes átomos:

Partículas del átomo	Carga total	Valor absoluto de la carga total
	+2	2
	0	0
	−1	1
	+5	5
	+1	1

187

Respuesta. En el primer átomo hay que agregar 4 electrones. En el segundo átomo hay que agregar 2 protones.

Respuestas.

a) Tiene 4 protones, deben agregarse 4 electrones para que la carga total sea 0.

b) Tiene 2 electrones, deben agregarse 2 protones.

c) Tiene 25 electrones.

Sugerencia didáctica. Lea junto con los alumnos esta información y pídales que busquen en la tabla del apartado *Consideremos lo siguiente* ejemplos de lo que aquí se afirma.

Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, revise nuevamente con los alumnos la información de la secuencia 25, en la que se explica el valor absoluto de un número. Antes de que las parejas completen la tabla, usted puede resolver junto con todo el grupo el primer renglón, para que a todos les quede clara la distinción entre la carga total y el valor absoluto.

Propósito del interactivo. Explorar el modelo de átomos para sumar y restar números con signo.

Respuesta. Las partículas que dibujen los alumnos pueden tener carga positiva o negativa.

Sugerencia didáctica. Usted puede pedir a algunas parejas que pongan en el pizarrón un ejemplo de cada tipo: uno con carga total negativa y otro con carga total positiva.

Respuestas.

- En los átomos de la primera fila de la tabla se agregan 3 protones al primer átomo y 4 protones al segundo átomo.
- En los átomos de la segunda fila se agregan 2 protones al primer átomo y 2 protones al segundo.

Propósito del interactivo. Explorar el modelo de átomos para sumar y restar números con signo.

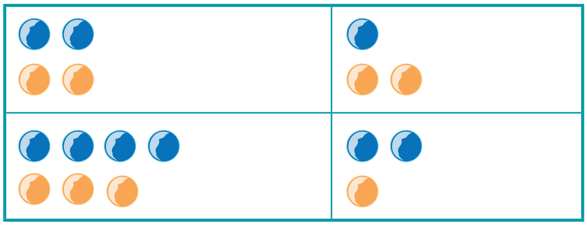
b) Dibujen en cada uno de los rectángulos un átomo que tenga el valor absoluto de la carga que se indica.

Partículas del átomo	Valor absoluto de la carga total
	4
	7
	0

Comparen sus átomos.

>>> Lo que aprendimos

1. Completa con los protones o electrones necesarios para que la carga de los átomos siguientes sea **+3**.



En todos los átomos que encontraste hay más cargas positivas que negativas, ¿cuántas cargas positivas más hay? ____________________

2. Encuentra cuatro átomos distintos en los que la carga sea –2.

a) En todos los átomos que encontraste hay más cargas negativas que positivas, ¿cuántas cargas negativas más hay? __________

b) ¿Cuál es el valor absoluto de la carga de estos átomos? __________

SUMAS DE NÚMEROS CON SIGNO

SESIÓN 2

>>> Para empezar

El proceso mediante el cual se agregan o se quitan cargas de un átomo se llama **ionización**. En esta sesión agregarás protones y electrones a algunos átomos y aprenderás a encontrar la carga final mediante la suma de números con signo.

>>> Consideremos lo siguiente

a) ¿Cuál es la carga final de un átomo que tiene originalmente carga total **+3** y se le agregan **2** electrones? __________

Pueden usar círculos azules y anaranjados para representar las partículas del átomo.

b) Esta ionización se puede representar mediante una suma de números con signo:

Se agregan partículas

$$\underbrace{(+3)}_{\text{Carga original del átomo}} + \underbrace{(-2)}_{\text{Carga de los 2 electrones}}$$

¿Cuál es el resultado de esta suma?

$$(+3) \quad + \quad (-2) \quad = \quad \_\_\_\_\_\_$$

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cuántos átomos distintos con carga **+3** dibujaron en el grupo para hacer la suma?

Respuestas. En todos los átomos que dibujen debe haber 2 electrones más que los protones.

a) 2 cargas negativas más.

b) 2

Propósito de la sesión. Resolver problemas de suma de números con signo mediante procedimientos convencionales. Sumar números decimales y fraccionarios con signo.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen organizados en parejas, y que el apartado *Lo que aprendimos* lo resuelvan de manera individual.

Respuesta. +1

Sugerencia didáctica. Si todos los alumnos, o casi todos, dibujaron el mismo átomo, pida al grupo que encuentren 2 ejemplos más con carga +3. Usted puede analizar con los alumnos qué pasa en cada caso si se agregan 2 electrones.

Respuesta. En los 3 casos deberá haber una carga final igual a +1.

Propósito del interactivo. Explorar el modelo de átomos para sumar y restar números con signo.

Sugerencia didáctica. Enfatice con sus alumnos que el valor de la suma que se indica no cambia: si tenemos un átomo con carga total igual a +3 y se agregan 2 electrones, la carga total es igual a +1.

Respuesta. Tiene carga total igual a −3.

Sugerencia didáctica. Si todos, o casi todos, dibujaron el mismo átomo, usted puede pedirle al grupo que encuentren otros 2 ejemplos con carga total igual a +5. A esos ejemplos deben agregar 8 electrones y ver cuál es su carga total al hacer esto.

Respuesta. Inciso b), no cambia.

Respuestas:

a) −8

b) +2

c) −14

d) 0

e) +5

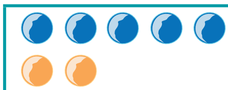
f) 0

g) −8

h) −41

>>> Manos a la obra

I. En la siguiente tabla se han dibujado distintos átomos con carga **+3**. Usando estos átomos encuentren la carga final cuando se le agregan **2** electrones.

	+		=	
	+		=	
	+		=	
(+3)	+	**(−2)**	=	______

Comparen sus tablas. Comenten:

¿Cambia el valor de la suma **(+3) + (−2)** si cambia el número de protones y electrones del átomo de carga **+3**?

II. En sus cuadernos, representen la siguiente ionización usando círculos azules y anaranjados para las cargas:

A un átomo que tiene originalmente carga total **+5** se le agregan **8** electrones, ¿cuál es la carga que tiene finalmente este átomo? ______

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuántos átomos distintos con carga **+5** dibujaron en el grupo para hacer la suma?

b) ¿Cambia el valor de la suma **(+5) + (−8)** si cambia el número de pares protón-electrón del átomo de carga **+5**?

III. Hagan las siguientes sumas de números con signo. Pueden representar las cargas usando círculos azules y anaranjados.

a) **(−9) + (+1) =** ______ b) **(+4) + (−2) =** ______

c) **(−5) + (−9) =** ______ d) **(−6) + (+6) =** ______

e) **(+3) + (+2) =** ______ f) **(+8) + (−8) =** ______

g) **(+25) + (−33) =** ______ h) **(−24) + (−17) =** ______

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cómo hicieron la suma **(+25) + (–33)**?, ¿dibujaron todas las partículas?

>>> A lo que llegamos

Las **cargas simétricas** o **números simétricos** tienen el mismo valor absoluto y están a la misma distancia del cero en la recta numérica. Por ejemplo: **+6** y **–6** son simétricos. Estos números al sumarse dan cero, es decir: **(–6) + (+6) = (+6) + (–6) = 0**

IV. La suma **(+100) + (–123)** representa la siguiente ionización: a un átomo de carga **+100** se le agregan **123** electrones. ¿Cómo harían la suma sin dibujar las partículas?

A continuación se presenta una manera de hacerlo:

a) Un átomo con carga total **+100** tiene más protones que electrones, ¿cuántos protones más tiene? ______

b) Al hacer la ionización, estos **100** protones del átomo se cancelan con **100** de los electrones que se le agregan. ¿Cuántos electrones quedan? ______

c) ¿Cuánto es **(+100)** + **(–123)**? ______

V. Resuelvan las siguientes sumas de números con signo. No usen dibujos.

a) **(+105) + (+10) =** ______

b) **(–110) + (–150) =** ______

c) **(–230) + (+525) =** ______

d) **(+125) + (–125)=** ______

Comenten sus resultados y sus procedimientos.

>>> A lo que llegamos

- Para sumar **dos números del mismo signo** se pueden sumar los valores absolutos de los números y el signo del resultado es el signo de los números que se suman.

  Por ejemplo, para sumar **+3** con **+2**:

  se suma $|+3|$ con $|+2|$: $|+3| + |+2| = 3 + 2 = 5$

  y el signo del resultado es "+": **(+3) + (+2) = +5**

  Para sumar **–5** con **–9**:

  se suma $|-5|$ con $|-9|$: $|-5| + |-9| = 5 + 9 = 14$

  y el signo del resultado es "–": **(–5) + (–9) = –14**

191

Respuesta. No es necesario dibujar todas las partículas: 25 protones se cancelan con 25 electrones. Quedan 8 electrones, por lo que el valor de la carga total es –8.

Sugerencia didáctica. Es importante que se revisen las respuestas entre todos. Si usted lo considera conveniente, puede pedir que hagan algunos ejercicios más, pero ahora sin dibujar los átomos.

No hay que perder de vista que el propósito es que los alumnos manejen correctamente las operaciones con números con signo, sin necesidad de estar dibujando los átomos cada vez.

Respuestas.

a) Tiene 100 protones más.

b) Quedan 23 electrones.

c) Es –23.

Sugerencia didáctica. Lo importante de esta actividad es que se realice sin recurrir al dibujo de las partículas de los átomos. Si usted lo considera conveniente puede poner algunos otros ejercicios.

Respuestas.

a) +115

b) –260

c) +295

d) 0

Sugerencia didáctica. Lea y comente esta información con sus alumnos. Recuérdeles la notación que se utiliza para indicar el valor absoluto de un número (lo vieron en la secuencia 25). Es importante considerar que la forma en que se desarrolla cada uno de los ejemplos que se presentan en este apartado tiene la finalidad de explicar el procedimiento para sumar números con signo. No se espera que los alumnos tengan que hacer todo el desarrollo cuando resuelvan las sumas, sino que apliquen las reglas que ahí se utilizan. Pida a los alumnos que copien en sus cuadernos las 2 reglas para sumar números con signo, y que propongan otros ejemplos en los que se utilicen estas reglas.

- Para sumar **dos números de signos distintos** se puede encontrar la diferencia de los valores absolutos de los números y el signo del resultado es el signo del número de mayor valor absoluto.

  Por ejemplo, para sumar **+3** con **−2**:

  se encuentra la diferencia de $|+3|$ y $|-2|$; es decir, $|+3| - |-2| = 3 - 2 = 1$

  y el signo del resultado es "+": $(+3) + (-2) = +1$

  Para sumar **−9** con **+1**:

  se encuentra la diferencia de $|-9|$ y $|+1|$; es decir, $|-9| - |+1| = 9 - 1 = 8$

  y el signo del resultado es "−": $(-9) + (+1) = -8$

VI. Los átomos no son útiles para representar números decimales ni fraccionarios, porque los electrones y los protones sólo tienen cargas **−1** y **+1**. Sin embargo, para sumar números decimales y números fraccionarios con signo se pueden usar las dos reglas que acaban de aprender.

Hagan las siguientes sumas usando las reglas anteriores:

a) **(−1.3) + (−1.7)** = ________________

Recuerden que $|-1.3| = 1.3$ y que $|-1.7| = 1.7$

b) Contesten las siguientes preguntas:

¿Cuánto es $\left|+\frac{1}{4}\right|$? __________

¿Cuánto es $\left|-\frac{3}{4}\right|$? __________

Encuentren la siguiente diferencia:

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$ __________

Hagan la siguiente suma de números con signo:

$\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) =$ __________

c) **(−20.5) + (+10.5)** = __________

Comparen sus resultados y procedimientos. Comenten:

En una telesecundaria dijeron que sumar **−1.3** y **−1.7** es como si a un átomo de carga total **−1.3** se agregara una partícula de carga **−1.7**. ¿Están de acuerdo con esta afirmación?, ¿cómo dibujarían estas partículas?

192

Respuestas.

a) Ambos números son negativos. Se suman y el resultado es negativo: −3.

b) $\frac{1}{4}$

$+\frac{3}{4}$

$\frac{2}{4}$

$-\frac{2}{4}$

c) −10.5

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que digan cuál de las reglas utilizaron en cada caso.

Respuesta. Puede dibujarse un electrón y $\frac{3}{10}$ de electrón, a esto se le agrega un electrón y $\frac{7}{10}$ de electrón. El resultado son 3 electrones. El resultado de sumar (−1.3) + (−1.7) es −3.

>>> Lo que aprendimos

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) **(–10) + (+101) =** ____________

b) **(–31)+ (+15) =** ____________

c) **(–1.6) + (–1.3) =** ____________

d) $\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) =$ ____________

2. Encuentra los simétricos de los siguientes números:

a) El simétrico de $-\frac{1}{4}$ es ____________

b) El simétrico de **+35** es ____________

c) El simétrico de **7.3** es ____________

d) El simétrico de **–10** es ____________

3. La carga total de un átomo se puede calcular mediante sumas de números con signo. El siguiente átomo tiene **3** electrones, **2** protones y **2** electrones.

Su carga total se puede calcular con la siguiente suma de números con signo:

$$\underbrace{(-3)}_{\text{Carga de 3 electrones}} + \underbrace{(+2)}_{\text{Carga de 2 protones}} + \underbrace{(-2)}_{\text{Carga de 2 electrones}}$$

¿Cuál es el resultado de esta suma?

(–3) + (+2) + (–2) = ____________

Integrar al portafolios. Solicite a los alumnos que en una hoja le entreguen los ejercicios 1 y 2. Si identifica que tienen dificultades para resolver las sumas, revise nuevamente con ellos la regla que debe aplicarse en cada uno de los casos: cuando se suman números del mismo signo y cuando se suman números de signo distinto.

Respuestas.
a) +91
b) –16
c) –2.9
d) 0

Respuestas.
a) $+\frac{1}{4}$
b) –35
c) –7.3
d) +10

Posibles dificultades. Este ejercicio es distinto a los que se hicieron. Es posible que tengan dificultades porque se está realizando la suma de 3 números con signo, pero no hay problema con el orden en que realicen las operaciones (porque sólo son sumas).

Respuestas. El resultado es –3. Quedan 3 electrones.

Propósito de la sesión. Resolver problemas de resta de números con signo. Restar números decimales y fraccionarios con signo.

Organización del grupo. Se sugiere que trabajen en parejas y que el apartado *Lo que aprendimos* lo resuelvan de manera individual.

Respuesta. Tiene carga −7.

Respuesta. El átomo debe tener al menos 5 protones para quitarlos.

Sugerencia didáctica. Usted puede pedir al grupo que encuentren 2 ejemplos de átomos que tengan carga −2 y que tengan al menos 5 protones. Al quitarle 5 protones se quedan con una carga de −7.

SESIÓN 3

RESTAS DE NÚMEROS CON SIGNO

>>> Para empezar

En esta sesión continuarás estudiando las operaciones de números con signo. Ahora realizarán **ionizaciones** quitando protones y electrones a algunos átomos. Aprenderás a encontrar la carga final mediante la resta de números con signo.

>>> Consideremos lo siguiente

A un átomo que tenía originalmente carga total **−2** se le quitaron **5** protones, ¿cuál es la carga que tiene ahora este átomo? ____________

Esta ionización se puede representar mediante la siguiente resta de números con signo:

$$\underbrace{(-2)}_{\text{Carga original del átomo}} \overset{\text{Se quitan partículas}}{-} \underbrace{(+5)}_{\text{Carga de los 5 protones}}$$

¿Cuál es el resultado de esta resta de números con signo?

(−2) − (+5) = ____________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuántos átomos distintos con carga **−2** dibujaron en el grupo para hacer esta resta?

b) ¿Se le pueden quitar **5** protones a un átomo de carga **−2**?

>>> Manos a la obra

I. El siguiente átomo tiene **2** electrones, **5** protones y **5** electrones.

Su carga total es **−2** y se puede calcular con la siguiente suma de números con signo:

$$\underbrace{(-2)}_{\text{Carga de 2 electrones}} + \underbrace{(+5)}_{\text{Carga de 5 protones}} + \underbrace{(-5)}_{\text{Carga de 5 electrones}}$$

Sugerencia didáctica. Usted puede comentar al grupo que los números están en color verde sólo para resaltar que son números simétricos.

a) ¿Cuál es el resultado de esta suma? ______

b) Quítenle **5** protones a este átomo, ¿cuál es su carga final? ______

c) Encuentren el resultado de las siguientes operaciones:

(−2) + (+5) + (−5) − **(+5)** = ______

Se quitan partículas

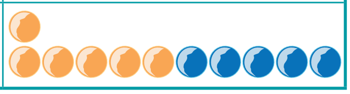
(−2) − **(+5)** = ______

Se quitan partículas

Comparen sus respuestas. Comenten:

La suma (+5)+(−5) = **0**, ¿será cierto que **(−2)**+(+5)+ (−5)−**(+5)** = **(−2)**−**(+5)**?

II. Los siguientes átomos tienen carga −1:

Átomo A	(−1) + (−4) + (+4)	Átomo B	(−1)
			
Átomo C	**(−1)** + (+1)+(−1)	**Átomo D**	**(−1)** + (−5) + (+5)
			

a) Algunos de estos átomos se pueden usar para quitar **4** protones, ¿cuáles son?

______ y ______

b) Quiten **4** protones de los átomos que escogieron. ¿Cuál es la carga de los átomos?

______

c) Encuentren el resultado de las siguientes operaciones:

(−1) + (−5) + (+5) − **(+4)** = ______

(−1) + (−4) + (+4) − **(+4)** = ______

d) ¿Cuánto es **(−1)** − **(+4)**?

(−1) − **(+4)** = ______

195

Respuestas.
a) −2
b) −7
c) −7 y −7

Sugerencia didáctica. Enfatice a los alumnos que los números que aparecen en verde indican los números simétricos que se cancelan, y que la finalidad de que aparezcan es para explicar el proceso. No se espera que al resolver las restas los alumnos tengan que hacer todo ese desarrollo, basta con que apliquen la regla que ya conocen (hacer la resta y poner el signo del número mayor).

Sugerencia didáctica. Resalte que esta operación corresponde a quitarle 5 protones al átomo.

Sugerencia didáctica. Usted puede dibujar el átomo en el pizarrón y poner la suma (−2) + (+5) + (−5). Puede preguntar al grupo por qué (+5) + (−5) = 0. (El resultado es 0 porque son números simétricos.)

Respuesta. Sí es cierto.

Sugerencia didáctica. Usted puede revisar con los alumnos lo que aquí se plantea con mayor cuidado. Podemos ir haciendo las operaciones una por una; recuerde las operaciones se efectúan de izquierda a derecha, por lo que primero se resuelve la suma (−2) + (+5):

(−2) + (+5) + (−5) − (+5) =
= (+3) + (−5) − (+5) =
= (−2) − (+5)

También podemos cancelar los números simétricos:

(−2) + (+5) + (−5) − (+5) =
= (−2) + 0 − (+5) =
= (−2) − (+5)

Propósito del interactivo. Explorar el modelo de átomos para sumar y restar números con signo.

Respuestas.
a) El A y el D.
b) La carga es −5.
c) En ambos casos la carga es −5.
d) Es −5.

Sugerencia didáctica. Haga notar que la primera operación corresponde a quitarle 4 protones al átomo D, la segunda corresponde a quitárselos al átomo A. Hay que recordar que la suma de números simétricos es 0.

Respuesta. Sí es lo mismo. Esto es porque se cancelan las sumas en verde:

(−5) + (+5) = 0

(−4) + (+4) = 0

Sugerencia didáctica. Usted puede plantear esta situación a los alumnos en términos de los átomos: se tiene un átomo con carga total +46 y se le van a quitar (restar) 18 electrones.
Las 2 últimas opciones son válidas. Por ejemplo, en la última opción la resta indica que vamos a quitar 18 electrones. Entonces el átomo tiene 18 electrones y 64 protones. Al quitar los electrones nos queda una carga total de +64. La primera opción también es correcta, pero no corresponde al modelo que se está siguiendo. Lo importante es resaltar que, cuando quitamos electrones, la carga se hizo más positiva.
Si lo considera necesario, usted puede sugerirles que hagan el dibujo correspondiente a la operación que consideren correcta.

Respuesta. Sí es cierto. Al quitar los 18 electrones nos quedamos con 64 protones. Es como si a un átomo con 46 protones le agregáramos 18 protones. Es decir: quitar 18 electrones es lo mismo que agregar 18 protones. Restar (−18) es lo mismo que sumar (+18).

Comparen sus respuestas. Comenten:

¿Es lo mismo **(–1)** + (–5) + (+5) **– (+4)** que **(–1)** + (–4) + (+4) **– (+4)**?

III. Hay que hacer la resta: **(+46) – (–18)**. ¿Cuál de las siguientes operaciones usarían para hacerla?

(+46) + (+18) – (+18) **– (–18)**

(+46) + (–46) + (+46) **– (–18)**

(+46) + (–18) + (+18) **– (–18)**

Hagan la resta.

(+46) – (–18) = ____________________

Comparen sus respuestas. Comenten:

En una escuela dijeron que al poner **18** electrones y quitar **18** electrones se cancelan. Para calcular **(+46) – (–18)** escribieron lo siguiente:

(+46) + $(-\cancel{18})$ **+ (+18) –** $(-\cancel{18})$ **= (+46) + (+18)**

¿Es cierto que **(+46) – (–18) = (+46) + (+18)**?

IV. Hay que hacer la resta: **(-10) – (-12)**. Contesten las siguientes preguntas para hacerla:

a) ¿Cuántos electrones tendrían que quitarle al átomo? ____________

b) ¿Cuál de las siguientes operaciones les sirve para hacer esta resta?

(-10) + (-10) + (+10) – (-12)

(-10) + (-12) + (+12) – (-12)

c) Completen los cálculos:

(-10) – (-12) = (-10) + ________ **+** ________ **– (-12) =** ____________

Comparen sus respuestas. Comenten:

¿Es cierto que **(-10) – (-12) = (-10) + (+12)**?

196

Respuestas.

a) Hay que quitar 12 electrones.
b) La segunda opción es la correcta, porque queremos que haya al menos 12 electrones para poder quitarlos.
c) (−10) − (−12) =
= (−10) + (−12) + (+12) − (−12) =
= (−10) + (+12)
Se cancelan los (−12)
El resultado es +2.
Restar (−12) es lo mismo que sumar (+12).

Respuesta. Sí es cierto, quitar 12 electrones es lo mismo que agregar 12 protones.

Sugerencia didáctica. Revise con el grupo cuáles números se cancelan al hacer las operaciones.

>>> A lo que llegamos

Para hacer **restas de números con signo** se puede **sumar el simétrico:**

Si **A** y **B** son dos números con signo, entonces,

$$A - B = A + (\text{simétrico de } B)$$

Ejemplos:

$$(+2) - (+5) = (+2) + \underbrace{(-5)}_{\text{Simétrico de } +5} = -3$$

$$(-3) - (-5) = (-3) + \underbrace{(+5)}_{\text{Simétrico de } -5} = +2$$

V. Usen la regla anterior para hacer las siguientes restas:

a) Hay que hacer la resta $\left(+\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)$. Contesten las siguientes preguntas para ayudarse:

¿Cuál es el simétrico de $-\frac{1}{4}$? ________________

¿Cuánto es $\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right)$? ________________

Hagan la resta:

$\left(+\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) =$ ________________

Recuerden que:
Para hacer sumas de números del mismo signo se suman los valores absolutos de los números y el signo del resultado es el signo de los números.

b) Hay que hacer la resta **(–20.5) – (+10.5)**. Contesten las siguientes preguntas para ayudarse:

¿Cuál es el simétrico de **+10.5**? ________________

¿Cuánto es **(–20.5) + (–10.5)**? ________________

Hagan la resta:

(–20.5)– (+10.5) = (–20.5) + (–10.5) = ________________

Sugerencia didáctica. Comente con los alumnos que, en el primer ejemplo, quitar 5 protones es lo mismo que agregar 5 electrones; mientras que en el segundo, quitar 5 electrones es lo mismo que agregar 5 protones. Pida a los alumnos que copien esta información en sus cuadernos escribiendo un ejemplo distinto al que se muestra.

Sugerencia didáctica. Aclare a los alumnos que se va a utilizar la misma regla para operar con fracciones.

Respuestas.
Es $+\frac{1}{4}$.

El resultado de la suma es $\frac{5}{12}$.

El resultado de la resta es $\frac{5}{12}$.

Respuestas.
El simétrico es −10.5.
Ambos números son negativos. El resultado de la suma es −31.

Respuestas. Los alumnos deben transformar cada resta en una suma.

a) $(-10) - (-30) =$
$(-10) + (+30) = +20$

b) $(+120) - (-17) =$
$(+120) + (+17) = +137$

c) $(-6) - (-9) =$
$(-6) + (+9) = +3$

d) $(-5.4) - (+10) =$
$(-5.4) + (-10) = -15.4$

e) $(+3.6) - (-1.3) =$
$(+3.6) + (+1.3) = +4.9$

f) $(+\frac{4}{3}) - (-\frac{1}{2}) = (+\frac{4}{3}) + (+\frac{1}{2}) =$
$= (+\frac{8}{6}) + (\frac{3}{6}) = +\frac{11}{6}\,9$

Propósito de la sesión. Aplicar lo aprendido en la resolución de problemas de suma y resta de números con signo.

Organización del grupo. Se sugiere que trabajen en parejas.

>>> Lo que aprendimos

Resuelve las siguientes operaciones

a) **$(-10) - (-30) =$** __________

b) **$(+120) - (-17) =$** __________

c) **$(-6) - (-9) =$** __________

d) **$(-5.4) - (+10) =$** __________

e) **$(+3.6) - (-1.3) =$** __________

f) $\left(+\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) =$ __________

SESIÓN 4

DE TODO UN POCO

>>> Para empezar

Las operaciones de números con signo pueden usarse para resolver problemas que aparecen en distintos contextos de la vida cotidiana: en las pérdidas y ganancias de una tienda, los goles a favor y en contra obtenidos en un torneo de futbol, etcétera.

En esta sesión usarás sumas y restas de números con signo para resolver este tipo de problemas.

>>> Lo que aprendimos

1. En la siguiente tabla se registran los goles a favor y en contra de varios equipos que participan en un torneo de futbol. La diferencia de goles de cada equipo se obtiene al hacer la resta: goles a favor menos goles en contra. Completen la tabla.

Equipo	Goles a favor	Goles en contra	Diferencia de goles
Gatos	5	2	3
Pandas	3	6	−3
Lobos	0	2	−2
Coyotes	4	4	0
Correcaminos	3	0	3
Perros	2	3	−1
Osos	6	1	5
Conejos	0	1	−1
Mapaches	3	3	0

2. La siguiente tabla reporta el balance de una tienda a lo largo de 7 meses de trabajo. El saldo por mes es la diferencia entre las ganancias y los gastos.

Completen la tabla:

Balance de una tienda de abarrotes

	Ganancias ($)	Gastos ($)	Saldo ($))
Enero	10 000.25	9 328.15	+672.10
Febrero	9 235.36	9 875.95	−640.59
Marzo	12 568.12	10 139.00	+ 2 429.12
Abril	1 765.00	5 328.90	− 3 563.90
Mayo	10 525.30	7 979.80	+2 545.50
Junio	8 000	8 328.00	−328.00
Julio	6 728.00	10 944	−4 216.00

3. Resuelvan las siguientes operaciones con números negativos y positivos:

a) **(−8) + (−30) =** ____________

b) **(+101) − (−17) + (−17)** = ____________

c) **(−21) + (−5) − (−10) =** ____________

d) **(−13) − (−8) − (−7) =** ____________

4. Resuelvan las siguientes operaciones:

a) **(−1.25) + (+7.43) =** ____________

b) **(+ 6.7) − (−2.1) =** ____________

c) $(+\frac{1}{4}) - (-\frac{1}{2}) =$ ____________

d) $(-\frac{1}{3}) - (+\frac{8}{5}) =$ ____________

>>> Para saber más

Sobre las operaciones con números positivos y negativos consulta:
http://www.conevyt.org.mx/cursos/enciclope/op_basicas.html
Ruta: entrar al acceso directo operaciones con números positivos y negativos.
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].
CONEVyT (Consejo Nacional de Educación para la Vida y el Trabajo).

Sugerencia didáctica. Este ejercicio puede revisarse en grupo. Sobre todo para que analicen las operaciones que tuvieron que hacer en cada caso.

Integrar al portafolios. Pida en una hoja los ejercicios 3 y 4 resueltos. Si identifica que los alumnos tienen dificultades con la suma de números con signo, revise nuevamente con ellos en el apartado *A lo que llegamos*, sesión 2. Si tienen dificultades para resolver las restas revise nuevamente las reglas que se aplican en la sesión 3.

Sugerencia didáctica. Es conveniente que resuelvan esta actividad y la siguiente (ejercicio 4) sin utilizar la calculadora.

Respuestas.
a) −38
b) +101
c) −16
d) +2

Respuestas.
a) +6.18
b) +8.8
c) $+\frac{3}{4}$
d) $-\frac{29}{15}$

Propósito de la sesión. Resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras formadas por rectas.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos resuelvan las actividades trabajando en parejas.

Materiales. Regla.

Propósito del video. Visualizar algunas de las creaciones artísticas árabes que han sido relevantes en la historia del pensamiento geométrico.

SECUENCIA 34

Áreas de figuras planas

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen el cálculo de áreas en diversas figuras planas.

SESIÓN 1

ÁREAS DE FIGURAS FORMADAS POR RECTAS

>>> Para empezar

A lo largo del curso has estudiado y trabajado con fórmulas para calcular distintas áreas; en esta secuencia resolverás problemas de cálculo de áreas de figuras formadas por rectas, círculos y semicírculos y aplicarás lo que aprendiste en algunas secuencias de geometría.

Geometría andaluza

Los árabes hicieron uso de las matemáticas para construir casas y edificios. Hermosos ejemplos son la Alhambra y el Alcázar en Andalucía, donde muchos de los pisos y paredes están hechos a partir de diseños geométricos.

>>> Lo que aprendimos

1. En la figura 1 está señalada una parte de un piso que aparece en la Alhambra. Los lados de las baldosas cuadradas miden 1 m y los lados de las baldosas rectangulares (azules, rojas y grises) miden 1 m por 50 cm.

Figura 1

200

Eje
Forma, espacio y medida.
Tema
Medida.
Antecedentes
En esta secuencia se espera que los alumnos apliquen lo aprendido en secuencias anteriores, particularmente las secuencias 20 y 30, para calcular el área de figuras formadas por rectas o por círculos, para las que no hay una fórmula inmediata, pero en las que se puede recurrir al cálculo de figuras conocidas.

Propósitos de la secuencia
Resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas de diversas figuras planas.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*Áreas de figuras formadas por rectas* Resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras formadas por rectas.	Video *Geometría andaluza* Aula de medios "Áreas de figuras formadas por rectas" (Geometría dinámica)
2	*Áreas de figuras formadas por círculos* Resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras formadas por círculos o semicírculos.	Aula de medios "Áreas de figuras formadas por círculos" (*Geometría dinámica*)

Tomando en cuenta sólo la parte del piso que está dentro de la línea negra, contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el área de esta parte del piso? ________

b) ¿Cuánto mide el área de la región cubierta por las baldosas grises (tanto cuadradas como rectangulares)? ________

c) ¿Cuántas veces más grande es el área de la región azul que el área de la roja? ________

d) Comenten sus resultados y compárenlos.

2. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el área del triángulo completo? ________

b) ¿Cuánto mide el área de la región azul? ________

c) ¿Cuánto mide el área de la región gris? ________

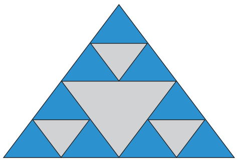


Figura 2

Comparen sus soluciones y comenten:

¿Cómo calcularon el área de las dos regiones?

3. Midan lo que sea necesario en la figura 3 y contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el área de la región azul? ________

b) ¿Cuánto mide el área de la región blanca? ________

c) Escriban en sus cuadernos los procedimientos que utilizaron para calcular las áreas de la región azul y de la región blanca.

Comenten sus procedimientos.

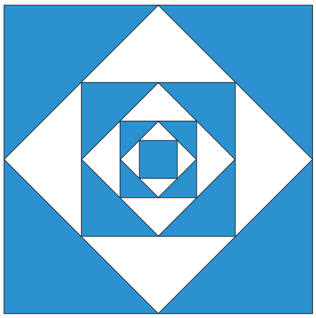


Figura 3

Respuestas.

a) $16\ m^2$. Este resultado puede obtenerse de distintas maneras: 2 baldosas rectangulares equivalen a 1 cuadrada, entonces la medida de cada lado de la figura delimitada por la línea negra mide $4\ m \times 4\ m = 16\ m^2$. También pueden calcular el área de una baldosa rectangular y multiplicarla por el número de baldosas rectangulares ($0.5\ m^2 \times 16 = 8\ m^2$), y luego sumar ese resultado con el área total de las baldosas cuadradas: $8\ m^2 + 8\ m^2 = 16\ m^2$.

b) $10\ m^2$. Son 8 baldosas cuadradas y 4 baldosas rectangulares. Cada baldosa cuadrada tiene $1\ m^2$ de superficie, y cada baldosa rectangular tiene $0.5\ m^2$ de superficie. En total son $8\ m^2 + 2\ m^2 = 10\ m^2$.

c) El área azul son 8 baldosas rectangulares, el área roja son 4 baldosas rectangulares. Es decir que el área azul es el doble de la roja.

Sugerencia didáctica. Los alumnos deben llegar a los mismos resultados, pero los procedimientos para resolver pueden ser distintos. Procure que se comparen al menos dos procedimientos diferentes.

Respuestas.

a) La base es de 6 cm, la altura es de 4 cm. El área del triángulo completo es de $12\ cm^2$.

b) $6.75\ cm^2$. Hay distintas formas de llegar a este resultado. Una de ellas es calcular la medida de cada triángulo pequeño (los triángulos pequeños, azules y grises, miden lo mismo). Para ello puede tomarse como referencia el área del triángulo gris mayor, pues el triángulo completo puede dividirse en 4 triángulos iguales al triángulo gris mayor. El área de cada uno de ellos es: $\frac{3 \times 2}{2} = 3\ cm^2$.
Cada uno de esos triángulos se divide a su vez en 4 triángulos pequeños iguales. El área de cada uno de ellos es de 0.75 cm^2 (esto se obtiene dividiendo el área del triángulo gris mayor entre 4). El área de la región azul son los 9 triángulos azules pequeños; por lo tanto, el área de la región azul es $0.75 \times 9 = 6.75\ cm^2$.

c) $5.25\ cm^2$. Esto puede obtenerse de diversas formas: restando al área total el área azul; o bien, contando cuántos triángulos grises pequeños hay en total (el triángulo gris mayor equivale a 4 pequeños, en total son 7 triángulos grises pequeños), y multiplicando por 0.75.

Posibles procedimientos. Hay distintas formas de resolver este problema. Una de ellas consiste en calcular el área de cada uno de los triángulos que forman las superficies blancas y azules. El área azul está formada por los 4 triángulos azules grandes, 4 azules medianos, 4 azules pequeños y el cuadrado azul pequeño del centro.
Cada triángulo azul grande tiene un área de $8\ cm^2$, cada triángulo azul mediano tiene $2\ cm^2$, cada triángulo azul pequeño tiene $0.5\ cm^2$ y el cuadrado azul pequeño tiene un área de $1\ cm^2$. La suma del área de los triángulos azules grandes es de $32\ cm^2$, la de los medianos es de $8\ cm^2$ y la de los pequeños es de $2\ cm^2$.
El área azul es:
$32\ cm^2 + 8\ cm^2 + 2\ cm^2 + 1\ cm^2 = 43\ cm^2$.
Siguiendo el mismo procedimiento,
el área blanca es:
$16\ cm^2 + 4\ cm^2 + 1\ cm^2 = 21\ cm^2$.
(Puede observarse que dentro de cada cuadrado hay otro cuadrado cuya área es la mitad del área del cuadrado que lo contiene.)
Otro procedimiento consiste en tomar como referencia al cuadrado pequeño que se ubica al centro de la figura. El área de este cuadrado es de $1\ cm^2$. A partir de él se puede cuadricular toda la figura, de manera tal que es posible, mediante el conteo de unidades cuadradas de $1\ cm^2$, obtener el área de la región azul y de la región blanca.

Propósito de la sesión. Resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras formadas por círculos o semicírculos.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos resuelvan trabajando en parejas.

Materiales. Regla y compás.

Respuestas.

a) Hay tres círculos. El círculo grande tiene un diámetro de 4 cm, y los círculos pequeños tienen un diámetro de 2 cm.

b) El área azul es de 6.28 cm². Se calcula el área del círculo grande (12.56 cm²) y el área de los círculos pequeños (cada uno mide 3.14 cm²). Al área del círculo grande se le resta el área de los dos círculos pequeños: 12.56 – 6.28 = 6.28 cm².

c) Tiene dos ejes de simetría. Una recta horizontal y una recta vertical que pasan por el centro del círculo grande.

Respuesta. El área de la región roja es de 3.44 cm². Una manera de resolver es trazar un cuadrado como se muestra en la ilustración y obtener su área. El área del cuadrado (16 cm²) menos el área de los 2 semicírculos. Los 2 semicírculos juntos hacen un círculo con un diámetro de 4 cm, y el área de ese círculo es 12.56 cm². La diferencia entre el área del cuadrado y el área del círculo es de 3.44 cm².

SESION 2

ÁREAS DE FIGURAS FORMADAS POR CÍRCULOS

>>> Lo que aprendimos

1. Midan lo que sea necesario y contesten las siguientes preguntas:

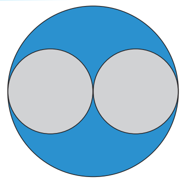


Figura 1

a) ¿Qué figuras geométricas aparecen en la figura 1?

b) ¿Cuál es el área de la región azul?

c) Tracen los ejes de simetría de la figura 1.

Comenten sus procedimientos y contesten:

a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene la figura 1?

b) ¿Cómo creen que se construyó esta figura? Cópienla en sus cuadernos.

2. Midan lo que sea necesario y copien la siguiente figura en su cuaderno.

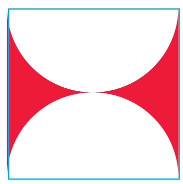


Figura 2

a) ¿Cuánto mide el área de la región roja?

b) Tracen los ejes de simetría de la figura roja.

Comparen sus respuestas y comenten los procedimientos que utilizaron para copiar la figura.

202

Respuesta. Tiene dos ejes de simetría. Una recta horizontal y una recta vertical.

Recuerde que: La actividad de medir puede dar lugar a la obtención de distintas medidas, por lo que es importante considerar aproximaciones y márgenes de error aceptables. Particularmente cuando se trabaja con el área del círculo, lo que obtenemos son medidas aproximadas porque el valor que se toma para π es sólo una aproximación.

3. Midan lo que sea necesario y contesten las siguientes preguntas:

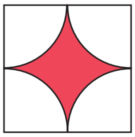


Figura 3

a) ¿Cuánto mide el área de la región roja?

b) Tracen los ejes de simetría de la figura.

Respuesta. El área de la región roja es 1.935 cm². Se obtiene calculando el área del cuadrado (9 cm²) y restándole el área de la región blanca. Esta última está formada por 4 cuartos de círculo, que juntos forman un círculo con diámetro de 3 cm, cuya área es de 7.065 cm². La diferencia entre el área del cuadrado y del círculo es de 1.935 cm².

Comparen sus respuestas y comenten:

a) Los procedimientos que utilizaron para calcular el área de la región roja.

b) Cómo se construyó esta figura. Cópienla en sus cuadernos.

4. Midan lo que sea necesario y copien la figura 4 en sus cuadernos:

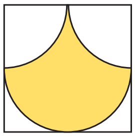


Figura 4

a) ¿Cuánto mide el área de la figura amarilla?

b) Tracen sus ejes de simetría.

Respuesta. El área amarilla mide 4.5 cm². Esto puede obtenerse dividiendo el cuadrado en 2 mitades con una línea horizontal que pase por el centro el cuadrado. El área amarilla de la mitad superior del cuadrado es la mitad del cuadrado menos medio círculo (el medio círculo se forma juntando los 2 arcos):

$4.5 - 3.5325 = 0.9675$ cm².

El área amarilla de la mitad inferior del cuadrado es medio círculo: 3.5325 cm².

En total es: $0.9675 + 3.5325 = 4.5$ cm².

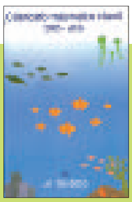
Comparen sus respuestas y comenten:

a) Los procedimientos que utilizaron para calcular el área de la región amarilla.

b) ¿Cómo encontraron los ejes de simetría de la figura?

>>> Para saber más

Sobre diseños geométricos en pisos consulten:
http://www.interactiva.metem.unam.mx
Ruta: Geometría ——→ Teselados.
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].
Sobre problemas de cálculo de áreas sombreadas consulten:
Calendario matemático infantil 2005-2006. Un reto diario.



Propósitos de la sesión. Analizar la diferencia entre un juego de azar justo y uno injusto considerando la probabilidad clásica.

Organización del grupo. El problema inicial debe resolverse en equipos, el resto de la sesión puede trabajarse en parejas.

Materiales. Solicite a los alumnos con anticipación, que construyan una ruleta como la que se muestra en el dibujo. Pueden usar cartoncillo u otro material, lo importante es que la ruleta pueda girar.

Sugerencia didáctica. Asegúrese de que los alumnos tengan bien comprendidas las instrucciones; por ejemplo, si en el tercer turno cae 4, el alumno que fue numerado con 4 se anota un punto o una X en el casillero de la tabla que corresponde al turno 3. También se recomienda que usted enumere a los alumnos del 1 al 4 cuantas veces sea necesario, y luego les pida que formen equipos de cuatro; otra manera de formar los equipos es colocando papelitos en una bolsa con números del 1 al 4 y que cada alumno tome uno (en la bolsa deberá haber tantos papelitos como alumnos hay en el salón).

Sugerencia didáctica. Algunos podrían decir que tienen más ventaja los números 1 y 3; pídales que expresen las razones de por qué puede suceder eso y que realicen el juego.

Respuesta. Los que tienen mayores posibilidades de ganar son el 1 y el 3, pues cada uno de ellos tiene $\frac{3}{8}$ de probabilidad en cada tiro. El 2 y el 4 tienen $\frac{1}{8}$ de probabilidad cada uno.

SECUENCIA 35

Juegos equitativos

En esta secuencia reconocerás las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

SESIÓN 1

¿CUÁL ES LA MEJOR OPCIÓN?

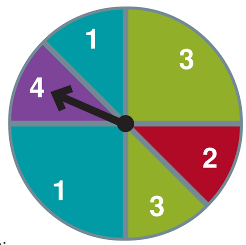
Para empezar

Entre las personas hay muchos malentendidos alrededor del concepto de probabilidad. Prueba de ello es el gran número de negocios surgidos en los últimos años que prometen riquezas enormes a la vuelta de la esquina. Tal es el caso de las loterías y las quinielas.

Consideremos lo siguiente

Construyan una ruleta como se muestra a continuación.

Ruleta 1



Realicen el siguiente juego:

- Cada uno de los cuatro jugadores deberá elegir un número del 1 al 4.
- Van a girar la ruleta 30 veces. En cada turno se anota un punto el alumno que tiene el mismo número que el resultado de la ruleta.
- El ganador del juego es el alumno que tenga más puntos.

a) Antes de empezar el juego, ¿crees que vas a ganar? ______

b) ¿Por qué? ______

c) En la siguiente tabla, marquen con una "**X**" los resultados de cada turno y el total de puntos que cada jugador obtuvo al girar 30 veces la ruleta.

204

Eje

Manejo de la información.

Tema

Nociones de probabilidad.

Antecedentes

En la secuencia 24 los alumnos tuvieron la oportunidad de enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria, estudiaron cómo utilizar la escala de la probabilidad entre 0 y 1 y establecieron cuál de 2 o más eventos en una experiencia aleatoria tiene mayor probabilidad de ocurrir. Esos conocimientos son necesarios en esta secuencia para poder establecer si un juego es equitativo o no de acuerdo con determinadas condiciones.

Propósitos de la secuencia

Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*¿Cuál es la mejor opción?* Analizar la diferencia entre un juego de azar justo y uno injusto considerando la probabilidad clásica.	
2	*Ruletas* Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	Interactivo "La ruleta"
3	*Juegos con dados* Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo a partir de las reglas que se dan en el juego.	
4	*Quinielas* Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo a partir de los premios que se reparten.	Video *Pronósticos nacionales* Interactivo "Lanza monedas"

Jugador	Turnos																														Total de puntos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Jugador 1																															
Jugador 2																															
Jugador 3																															
Jugador 4																															

d) ¿Qué número fue el ganador? __________

e) ¿Cuál crees que es la razón por la cual ganó? __________

f) Si vuelven a jugar, ¿crees que gane el mismo número? __________

¿Por qué sí o por qué no? __________

Respuesta. Es muy probable que no se obtengan los mismos resultados.

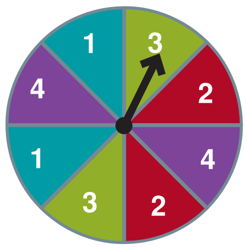
Comparen sus respuestas.

Propósito de la actividad. En este caso, todos los sectores de la ruleta son iguales y los números aparecen 2 veces cada uno; es decir, todos los jugadores tienen las mismas oportunidades de ganar.

>>> Manos a la obra

1. Ahora van a jugar utilizando la ruleta **2**. Las reglas del juego siguen siendo las mismas que en el juego anterior.

   a) Registren los resultados en la tabla.



Ruleta 2

Jugador	Turnos																														Total de puntos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Jugador 1																															
Jugador 2																															
Jugador 3																															
Jugador 4																															

b) ¿Hay algún jugador o número que tenga mayor posibilidad de salir ganador? __________

c) ¿Qué número fue el ganador? __________

d) De acuerdo con los resultados registrados en la tabla, ¿cuál es la probabilidad frecuencial del número ganador? __________

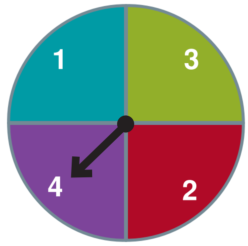
Sugerencia didáctica. Si lo considera necesario, recuerde a los alumnos que la probabilidad frecuencial se basa en los resultados del juego: el número de veces que cayó el número ganador sobre el número de eventos.

Propósito de la actividad. En esta ruleta todos los sectores son del mismo tamaño y los números aparecen una sola vez cada uno; en ese sentido, esta ruleta es equivalente a la ruleta anterior porque todos los números tienen la misma posibilidad de ganar. Sin embargo, esto no significa que al realizar el juego el ganador sea el mismo de la ruleta anterior, ni tampoco que ya no podrá ganar.

Propósito de la actividad. Con esta tabla los alumnos podrán determinar si el juego con cada una de las ruletas es justo o no. Para ello, será necesario cálcular la probabilidad clásica de cada evento, para después poder compararlas. Algo importante que los alumnos deben comprender es que los resultados que obtuvieron al realizar los juegos no necesariamente reflejan si el juego es justo o no, sino que requieren hacer otros análisis de las condiciones del juego (en este caso comparar las características de cada ruleta y la probabilidad clásica de los eventos); cuando no se hacen estos análisis, las personas suelen atribuir a cuestiones de suerte el que ganen o pierdan en un juego.

II. Se utiliza la ruleta **3** para realizar el juego y las reglas no cambian.

Ruleta 3



a) ¿Quién creen que gane? ____________________

b) ¿Hay algún jugador que tenga más posibilidades de ganar? ____________________

¿Por qué? ____________________

c) Registren los resultados en la siguiente tabla.

Jugador	Turnos																														Total de puntos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Jugador 1																															
Jugador 2																															
Jugador 3																															
Jugador 4																															

d) De acuerdo con los resultados registrados en la tabla, ¿cuál es la probabilidad de que caiga 3? ____________________

e) ¿Y de que caiga 2? ____________________

f) De acuerdo con los resultados obtenidos en cada juego, ¿consideran que hay alguna ruleta que favorece a un jugador? ____________________

¿Por qué? ____________________

III. Van a comparar los tres juegos. Para ello es necesario calcular las siguientes probabilidades clásicas.

Evento	Probabilidad en la ruleta **1**	Probabilidad en la ruleta **2**	Probabilidad en la ruleta **3**
Caer 1	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$
Caer 2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$
Caer 3	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$
Caer 4	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$

a) De acuerdo con las probabilidades clásicas obtenidas, ¿qué juego no fue justo o equitativo? ______

b) ¿Qué juego es justo? ______

c) ¿Qué juegos son equivalentes? ______ ¿Por qué? ______

>>> A lo que llegamos

Para determinar si un juego de azar es justo se debe establecer:

- **Si en cada turno o partida todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar.**
- **Si las probabilidades de todos los jugadores son diferentes, es justo que a quien elija el número con menor probabilidad se le dé un mayor premio para compensar.**
- **Reglas del juego que no favorezcan a ninguno de los jugadores.**

RULETAS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En esta sesión aprenderás a identificar qué elementos (ruletas, dados, etc.) cambiar en el juego para que sea justo.

>>> Consideremos lo siguiente

Van a jugar a la ruleta. Cada alumno elige la ruleta con la que desea jugar y la hace girar **5** veces. Gana el jugador que más veces haya obtenido el número **1**.

Antes de iniciar el juego responde, ¿qué ruleta creen que gane? ______

Después de realizar el juego, ¿creen que si vuelven a jugar, ganará la misma ruleta? ______

¿Por qué? ______

Comparen sus respuestas.

207

Respuestas.

a) El juego con la ruleta 1 no es equitativo, pues algunos números tienen mayores probabilidades de caer que otros.

b) Los juegos con la ruleta 2 y la ruleta 3 son justos. Todos los números tienen la misma probabilidad de caer.

c) Ruleta 2 y ruleta 3. Puede observarse que $\frac{2}{8}$ es equivalente a $\frac{1}{4}$.

5

Sugerencias didáctica. Pida a una pareja de alumnos que elabore un cartel con esta información para que se pegue o se cuelgue en una de las paredes del salón. Para comentar esta información puede indicarles que vean si se cumplen estas condiciones en alguna de las ruletas que revisaron en esta sesión. Posteriormente pídales que copien la información en sus cuadernos.

Propósito de la sesión. Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en equipos y que la última actividad la hagan en parejas.

Materiales. Solicite a los alumnos que previamente elaboren las ruletas que se indican para esta sesión.

Respuesta. En la ruleta B y en la ruleta C hay más probabilidad de que caiga 1.

Propósito de las preguntas. Al tiempo que los alumnos juegan, pueden observar los diferentes resultados que es posible obtener al girar las ruletas. Al calcular la probabilidad frecuencial ellos pueden realizar algunas conjeturas, pero si nuevamente realizan el juego no necesariamente obtendrán los mismos resultados. Los alumnos van construyendo gradualmente algunas razones sobre por qué suceden esos resultados, las cuales tendrán oportunidad de contrastar con otras situaciones.

Respuestas. En la ruleta A la probabilidad clásica de que caiga en 1 es $\frac{1}{4}$. En la ruleta B y en la ruleta C la probabilidad clásica de que caiga en 1 es $\frac{1}{2}$.
El juego no es justo porque es más probable ganar con las ruletas B y C.

Propósito del interactivo. Explorar diferentes ruletas para reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo.

>>> Manos a la obra

I. Anoten los resultados en la tabla y contesten las siguientes preguntas.

Jugador de la ruleta	Puntos en cada ronda					Total de puntos (número total de veces que cayó 1)
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	
A						
B						
C						

a) ¿Quién ganó? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de caer 1 en cada ruleta? ______

c) Si realizaran el juego una vez más, ¿quién crees que gane ahora? ______

d) De acuerdo con los resultados de todos los equipos del grupo, ¿cuál es la ruleta que más veces ganó? ______

II. Analicen la situación anterior contestando las siguientes preguntas.

a) Comparen la ruleta **A** con la ruleta **B**, ¿con cuál se tiene más oportunidades de ganar? ______ ¿Por qué? ______

b) ¿Y entre las ruletas **B** y **C**? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad clásica o teórica de obtener 1 en la ruleta **A**?

______

d) En la ruleta **B**, ¿cuál es la probabilidad clásica de obtener 1?

______

e) Finalmente, ¿cuál es la probabilidad clásica de obtener 1 en la ruleta **C**?

______

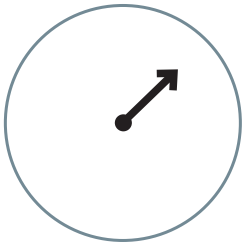
f) De acuerdo con la probabilidad de obtener 1 en cada ruleta, ¿consideras que el juego es justo? ______ ¿Por qué? ______

Como ves, el juego con las ruletas no es justo porque la probabilidad de obtener 1 en la ruleta **A** es menor que en las otras dos ruletas.

III. Si quieren que el juego sea justo utilizando tres ruletas, tendrían que cambiar la ruleta A.

a) ¿Cómo tendrían que rotular o etiquetar la nueva ruleta para realizar el juego? Utilicen el dibujo para representar la nueva ruleta.

Ruleta D



b) ¿Cómo la etiquetaron otros compañeros? ____________________

c) ¿Son diferentes? __________ ¿En qué son diferentes? __________

d) ¿En qué son iguales? ____________________

e) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener 1 en cada ruleta?

Tu ruleta __________ Ruleta de otro compañero __________

f) En tu grupo, ¿alguien etiquetó la ruleta de diferente manera que las de tu equipo?

__________ Anoten cómo lo hizo ____________________

>>> A lo que llegamos

Para poder determinar si el juego es justo, no es suficiente considerar los resultados obtenidos en las rondas. Como habrás observado, en algunos equipos ganó una ruleta y en otros otra. En este caso, para determinar si un juego es justo se requiere calcular la probabilidad clásica o teórica del evento que interviene en el juego.

Integrar al portafolios. Cada alumno debe construir una ruleta equivalente a las ruletas B y C; si la mayoría de los alumnos construyeron la misma ruleta, pídales que traten de encontrar otra u otras diferentes y las comparen. Los alumnos tendrían que considerar que la probabilidad clásica de que caiga en 1 en la ruleta que van a elaborar, debe de ser $\frac{1}{2}$.

2

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que comparen esta información con la del apartado *A lo que llegamos* de la sesión anterior, y que identifiquen qué condición se agrega para determinar si un juego es justo o no. Una vez que la hayan identificado será necesario que agreguen esa información a las notas que ya habían escrito en sus cuadernos.

Propósito de la sesión. Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, a partir de las reglas que se dan en el juego.

Organización del grupo. Se sugiere que los alumnos trabajen en parejas.

Materiales. Solicite a los alumnos que elaboren con anticipación los dados que se describen en el apartado *Consideremos lo siguiente.*

Propósito de la actividad. Que los alumnos experimenten con diferentes objetos qué condiciones se deben dar para que un juego sea justo; en este caso, se trata de un juego con dados de diferente forma.

Respuesta. En el dado 1 la probabilidad clásica de obtener el 3 es $\frac{1}{4}$. En el dado 2 es $\frac{1}{6}$. Es más probable que salga primero un 3 en el dado 1.

Respuesta. Es la misma probabilidad. En el dado 1 la probabilidad clásica de obtener un número impar es $\frac{2}{4}$, en el dado 2 es $\frac{3}{6}$. Son equivalentes.

SESIÓN 3

JUEGOS CON DADOS

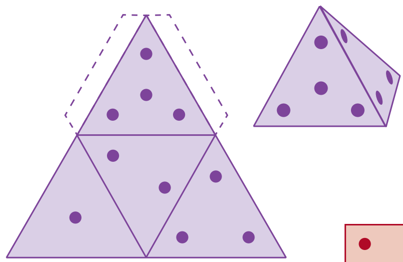
>>> Para empezar

En esta sesión realizarás juegos con dados de formas diferentes y aprenderás a distinguir cuándo un juego es justo y cuándo no.

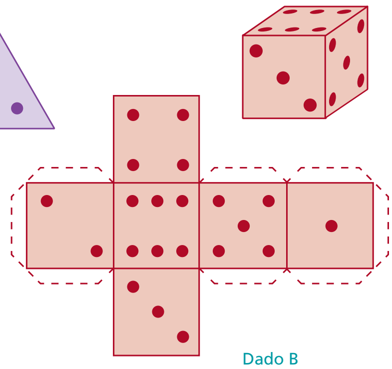
>>> Consideremos lo siguiente

Un dado común tiene seis caras cuadradas; pero hay otros con cuatro caras triangulares.

Van a necesitar dos dados, uno con seis caras y otro con cuatro. Si no los tienen, utilicen los siguientes desarrollos planos para armarlos. Cópienlos en cartoncillo y armen uno cada quien.



Dado A



Dado B

Lance cada quien el dado que armó. Cuando alguno obtenga el número 3, avanza una casilla. El juego termina cuando alguno de los jugadores llega primero a la meta. ¿Con cuál dado crees que se obtenga primero el número 3? ____________________

____

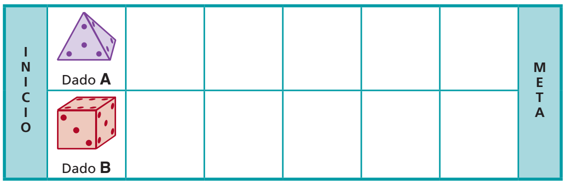
Si en vez de avanzar cuando se obtiene el número 3 lo hacen cuando se obtiene un número impar, ¿alguno de los dados tiene más posibilidades de ganar que otro? __________

¿Por qué? ____________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Realicen el primer juego. Lance cada quien su dado. Cuando alguno obtenga el número 3, avanza una casilla.



a) ¿Quién creen que gane? __________

b) Después de veinte lanzamientos, ¿qué jugador ha avanzado más casilleros? __________

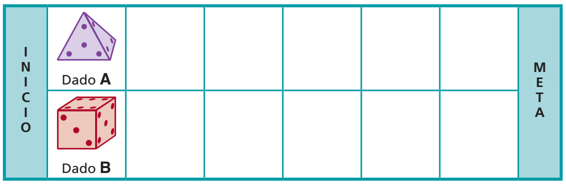
c) ¿Cuáles son los resultados posibles al lanzar el dado cúbico? __________

d) ¿Y del dado tetraédrico? __________

e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 en el dado cúbico? __________

f) ¿Y en el dado tetraédrico? __________

II. Realicen el juego. Lance cada quien su dado, pero ahora avancen cada vez que cae un número impar.



a) ¿Quién creen que gane ahora? __________

b) Después de **10** lanzamientos, ¿qué jugador ha avanzado más casilleros? __________

c) Expliquen qué sucede si en vez de avanzar cuando cae 3, se avanza cuando cae un número impar. __________

d) ¿Cuál es la probabilidad del evento caer un número impar en el dado cúbico?

____

e) ¿Y cuál es la probabilidad del evento caer un número impar en el dado tetraédrico?

____

211

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos lleven el registro del número de lanzamientos, pues este dato les será necesario para responder el inciso b).

Respuestas.

c) 1, 2, 3, 4, 5 y 6

d) 1, 2, 3 y 4

e) $\frac{1}{6}$

f) $\frac{1}{4}$

Propósito de la actividad. En esta actividad lo que están cambiando es el evento a partir del cual se obtienen los resultados, a diferencia de la sesión anterior, donde cambiaban las ruletas pero el evento (caer 1) se mantenía. Es importante determinar los espacios muestrales (es decir, todos los resultados posibles) y calcular la probabilidad en cada dado del evento.

Sugerencia didáctica. Es importante que los alumnos lleven el registro del número de lanzamientos, pues este dato les serán necesario para responder el inciso b).

Respuestas.

d) $\frac{3}{6}$

e) $\frac{2}{4}$

Propósito de la información. En las siguientes actividades se le llama "regla" al evento que se considera para determinar las condiciones para realizar el juego. En cada dado varía la probabilidad de que ocurra cada una de las reglas .

Posibles respuestas.
Cae un número menor que 5.
Cae algún número entre 1 y 4.
El número es mayor que 0 y menor que 5.
Cae un número con una cifra.
Cae un número menor que 10.

Sugerencia didáctica. Se espera que la respuesta sea afirmativa, pero en caso de que no sea así, invite a los alumnos a que revisen nuevamente los eventos que escribieron.

Posibles respuestas.
Cae un número par.
Cae un número impar.
Cae 10 (nunca se avanza).

>>> A lo que llegamos

Como ves, en este juego los eventos caer un número impar y caer 3 en cada dado son las reglas principales con las cuales se realiza cada juego.

III. Cada quien escriba un evento para que al jugar con el dado tetraédrico siempre sea posible avanzar. ______

a) Con ese evento, calcula la probabilidad de avanzar una casilla con cada dado:

Dado cúbico ______ Dado tetraédrico ______

b) Intercambien sus eventos. Escribe el evento de tu compañero. ______

______

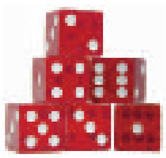
c) ¿Qué probabilidad tiene de ocurrir el evento de tu compañero con cada dado?

Dado cúbico ______ Dado tetraédrico ______

Comparen sus respuestas y comenten:

- ¿Con los eventos que propusieron, siempre avanza el dado tetraédrico?
- En cada caso, ¿qué sucede con el dado cúbico?
- Existirá algún otro evento diferente en el cual siempre avance el dado cúbico?

IV. Escriban un evento para que con ambos dados se tenga la misma probabilidad de avanzar. ______



a) Con ese evento, calcula la probabilidad de avanzar una casilla con cada dado:

Dado cúbico ______ Dado tetraédrico ______

b) Intercambia tu evento con el de un compañero. Escribe el evento de tu compañero.

______

c) ¿Qué probabilidad tiene de ocurrir el evento de tu compañero con cada dado?

Dado cúbico ______ Dado tetraédrico ______

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

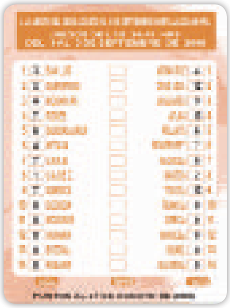
Existen juegos de azar en los que las reglas con las cuales se realiza dan mayor ventaja a un resultado que a otro. Esto sucede cuando la regla del juego corresponde a un evento que tiene mayor probabilidad de suceder que otro.

QUINIELAS

SESIÓN 4

>>> Para empezar

En esta sesión analizarás las condiciones de algunos juegos de azar y determinarás el premio del juego para que cada participante tenga la misma oportunidad de ganar.



Pronósticos nacionales

Para ganar el premio mayor en una quiniela de futbol, es necesario que aciertes a los resultados de 14 partidos de futbol *soccer*. Estos partidos pueden ser de la primera división, de la primera A o internacionales.

El objetivo es tratar de obtener el mayor número de aciertos, ya que, además del premio mayor, existen otros inferiores. El resultado de cada encuentro es el que se obtiene en los 90 minutos de juego regular. La quiniela sencilla cuesta $10.00 y sólo se puede marcar una opción de resultado por encuentro: **LOCAL, EMPATE O VISITANTE.**

Existen quinielas dobles y triples, pero sus costos son diferentes.

>>> Consideremos lo siguiente

Un grupo de 20 amigos organizó una quiniela formada con los dos partidos de ida de semifinal del campeonato de apertura 2005 del futbol de primera división:

Cada participante debe pagar $15.00 y sólo se puede marcar una opción de resultado por encuentro: **LOCAL, EMPATE O VISITANTE.**

FUTBOL DE PRIMERA DIVISIÓN
SEMIFINAL CAMPEONATO DE APERTURA 2005
PARTIDOS DE IDA

LOCAL		EMPATE		VISITANTE
◯	TIGRES	◯	MONTERREY	◯
◯	TOLUCA	◯	PACHUCA	◯

a) El ganador de la quiniela es el que acierte al resultado de los dos partidos. ¿Cuál es la probabilidad de acertar en estos resultados? ______

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas.

a) De acuerdo con los resultados que se pueden dar en el encuentro de futbol Toluca-Pachuca, ¿qué probabilidad hay de que el resultado sea empate? ______

b) ¿Y de que gané el visitante? ______

c) Cada integrante del equipo debe llenar una quiniela sencilla. Al compararlas, ¿marcaron los mismos resultados? ______
¿Por qué? ______

d) ¿Cuántas formas diferentes de llenar la quiniela sencilla hay? ______

213

Propósitos de la sesión. Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, a partir de los premios que se reparten.

Organización del grupo. Se sugiere que el problema inicial y la primera actividad del *Manos a la obra* se resuelva en equipos, y posteriormente que trabajen en parejas.

Sugerencia didáctica: Pida a los alumnos que lean el ejemplo que se muestra de una quiniela. Pregunte quiénes han llenado alguna vez una de ellas; pida a esos alumnos que expliquen a los demás qué quieren decir los términos "local", "visitante", "empate", y que comenten cómo se llena la quiniela. Aproveche este momento para que los alumnos intercambien con el grupo lo que saben al respecto.

Propósito de la actividad. Tal vez algunos alumnos han visto o llenado una quiniela; con esta actividad se espera que analicen algunos factores que pueden influir en el resultado de la misma. Para ello, se idealizan ciertas condiciones para que el análisis pueda hacerse a partir de la cantidad de resultados que se pueden dar.

Respuesta. La probabilidad de acertar es de $\frac{1}{9}$. Es probable que algunos piensen que es de $\frac{1}{6}$, porque son 3 posibilidades por partido. Si contestaron erróneamente, en el siguiente apartado tendrán oportunidad de corregirlo.

Propósito del video. Conocer qué es y cómo se llena una quiniela. Identificar las posibilidades que se tienen de ganar al jugar una quiniela.

Respuestas.

a) La probabilidad es de $\frac{1}{3}$. Son 3 resultados posibles.

b) $\frac{1}{3}$

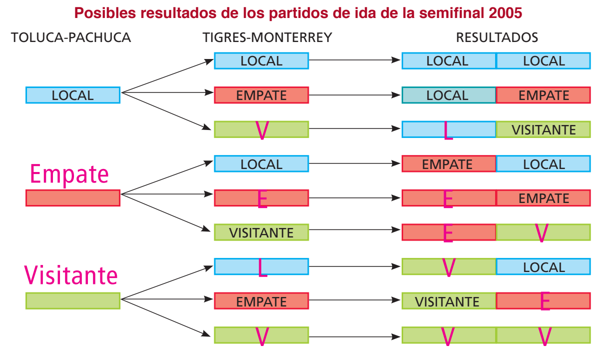
c) No necesariamente, cada uno tiene su criterio para determinar el resultado.

d) Hay 9 formas diferentes. Se calcula 3×3.

Propósito de la actividad. El diagrama de árbol o cualquier otro recurso que utilicen para contar les servirá de apoyo para encontrar los resultados.

Respuesta. La probabilidad es $\frac{1}{9}$. En un partido hay 3 resultados posibles: empatar, ganar o perder. Entonces la probabilidad de acertar a un resultado es $\frac{1}{3}$; si hay 2 partidos, la probabilidad es $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
Es decir, se multiplica la probabilidad de cada partido porque son resultados independientes.

e) Completen el siguiente diagrama de árbol para encontrarlas.



Recuerden que:

La probabilidad clásica de un evento se obtiene dividiendo el número de los resultados favorables del evento entre el número total de resultados posibles que se pueden dar en la situación de azar:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{número de resultados favorables del evento}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

f) Con base en este conteo, ¿cuál es la probabilidad de tener la quiniela ganadora? __________

II. Consideren que en vez de jugarse dos partidos en la quiniela, aparecen tres:

FUTBOL DE PRIMERA DIVISIÓN
CUARTOS DE FINAL
CAMPEONATO DE APERTURA 2005
PARTIDOS DE IDA

LOCAL		EMPATE		VISITANTE
◯	TIGRES	◯	AMÉRICA	◯
◯	TOLUCA	◯	CRUZ AZUL	◯
◯	MONTERREY	◯	TECOS	◯

a) Cada integrante del equipo deberá llenar una quiniela sencilla. Al compararlas, ¿marcaron los mismos resultados? __________
¿Por qué creen que sucedió? __________

b) ¿Cuántas formas diferentes de llenar la quiniela hay? __________

Respuestas. Hay 27 formas diferentes de llenarla. Se calcula 3 × 3 × 3.

c) Completen el siguiente arreglo rectangular para encontrarlas.

RESULTADOS	PARTIDOS		
	TIGRES-AMÉRICA	TOLUCA-CRUZ AZUL	MONTERREY-TECOS
	LOCAL		LOCAL
	LOCAL	LOCAL	
			VISITANTE
		EMPATE	LOCAL
	LOCAL		
		EMPATE	VISITANTE
	LOCAL		EMPATE
	LOCAL	VISITANTE	
		LOCAL	LOCAL
	EMPATE	LOCAL	
			VISITANTE
		EMPATE	
	EMPATE		
		EMPATE	
	EMPATE		LOCAL
	EMPATE		
		VISITANTE	VISITANTE
	VISITANTE	LOCAL	
	VISITANTE		EMPATE
		LOCAL	
	VISITANTE		LOCAL
		EMPATE	
	VISITANTE		VISITANTE
		VISITANTE	

d) Con base en este conteo, ¿cuál es la probabilidad de tener la quiniela ganadora?

Respuesta. Es de $\frac{1}{27}$.

III. Comparen sus resultados con los demás equipos completando la siguiente tabla.

Total de resultados que puede haber en 1 partido de futbol	Total de resultados que puede haber en dos partidos de futbol	Total de resultados que puede haber en tres partidos de futbol
3	9	27

Probabilidad de acertar el resultado del partido	Probabilidad de acertar a los resultados de los dos partidos	Probabilidad de acertar a los resultados de los tres partidos
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

Respuestas.
a) Se multiplica el 3 tantas veces como partidos haya.

Sugerencia didáctica. Pregunte cuál es la probabilidad de acertar en una quiniela con 14 partidos, como las que se utilizan en los pronósticos.
b) Cuando son 3.

Respuestas.
a) Dos formas:
Local-Local-Empate.
Local-Empate-Empate.
c) Tiene dos opciones sobre 9 casos totales. La probabilidad es de $\frac{2}{9}$.

Respuestas. No es justa, porque es menos probable obtener el primer lugar.

Sugerencia didáctica. Es posible que sea mejor iniciar revisando las propuestas de la tabla en el inciso d), luego puede pedirles que hagan nuevas propuestas.

Respuesta.
(Una forma de entenderlo es que el primer lugar es el que acierta a los 3 resultados. El segundo lugar es el que acierta a 2 resultados.)
El primer lugar tiene $\frac{1}{27}$ de probabilidad.
El segundo lugar tiene $\frac{6}{27}$ de probabilidad.
Es decir que obtener el primer lugar es 6 veces menos probable que obtener el segundo lugar.
Lo justo es que el primer lugar reciba 6 veces más de premio. Con $300 pesos deben repartirse así:
$257.14 al primer lugar.
$42.86 al segundo lugar.

Sugerencia didáctica. Quizá esto sea complicado. Es mejor que usted permita que los alumnos decidan. Lo importante es que el primer lugar debe recibir más dinero que el segundo lugar.

a) ¿Qué relación hay entre el número de partidos que se juegan y el número de resultados que se pueden obtener? ______

b) ¿En qué caso es menor la probabilidad de acertar a los resultados: cuando es un solo partido, cuando son dos o cuando son tres? ______

IV. Si los resultados de los tres partidos fueron:

Partido	Resultado
Tigres-América	Local
Toluca-Cruz Azul	Visitante
Monterrey-Tecos	Empate

Y una persona falló sólo en el resultado del partido Toluca-Cruz Azul,

a) ¿De cuántas formas diferentes pudo haber llenado su quiniela? ______

b) Si con esos resultados gana el segundo lugar, ¿cuántas formas diferentes de obtener el segundo lugar hay? ______

c) ¿Cúal es la probabilidad de obtener el segundo lugar? ______

Un alumno propuso repartir el premio de $300.00 de la siguiente manera:
Primer lugar: $150.00
Segundo lugar: $150.00

Y explicó: si el monto es de $300.00, lo divido en dos partes, es decir, $150.00 para cada ganador, porque en cada caso hay sólo una forma de acertar.

d) ¿Consideran que esta forma de repartir los premios es justa? ______
¿Por qué? ______

e) Escriban una forma de repartir los premios que crean justa y coméntenla a su compañero, no olviden explicar por qué la consideran justa. ______

f) Las siguientes son algunas propuestas de repartir los premios al primero y segundo lugar en acertar a los resultados de tres partidos. Escriban una razón para aceptar o rechazar cada propuesta.

Premio	Acepta	Rechaza	Justificación
Primer lugar: $200 Segundo lugar: $100			
Primer lugar: $175 Segundo lugar: $125			

>>> A lo que llegamos

En un juego de azar, si la probabilidad de un evento es mayor que la de otro, es justo asignar un mayor premio al evento de mayor probabilidad.

>>> Lo que aprendimos

1. Al lanzar dos monedas, dos posibles resultados son:

moneda 1 águila		moneda 2 águila
	y	
moneda 1 águila		moneda 2 sol

Van a necesitar dos monedas no trucadas.

Realicen el siguiente juego. Lance cada quien las dos monedas consecutivamente. Si te caen dos águilas, ganas 1 punto. En otro caso gana 1 punto tu compañero. El juego termina cuando alguno de los jugadores logra 5 puntos.

a) ¿Qué otros resultados pueden ocurrir al lanzar dos monedas consecutivamente?

____

b) ¿Quién ha obtenido más puntos? ___________________________

c) Completen el cuadro con los resultados de tu juego. Escriban en cada casilla el número de veces que ha ocurrido ese resultado.

d) Comparen sus resultados con los resultados que obtuvo su compañero.

e) ¿Cómo podrían modificar el juego para que sea justo?

____

		Moneda 2	
		Águila (A)	Sol (S)
Moneda 1	Águila (A)		
	Sol (S)		

>>> Para saber más

Consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos. *Una ventana a la incertidumbre*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2001.

Sobre los diferentes juegos de lotería y quinielas que ofrecen la Lotería Nacional y Pronósticos Deportivos, así como de la función social que desarrollan consulten:

http://www.esmas.com./pronosticos [Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

http://www.loterianacional.gob.mx [Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

217

Respuestas. Son 4 posibles resultados en total. Los 2 que se presentan:
Águila-Águila.
Águila-Sol.
Y 2 más:
Sol-Águila.
Sol-Sol.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos que calculen la probabilidad de atinarle a una quiniela con 4 partidos y que digan cuántas combinaciones habría.

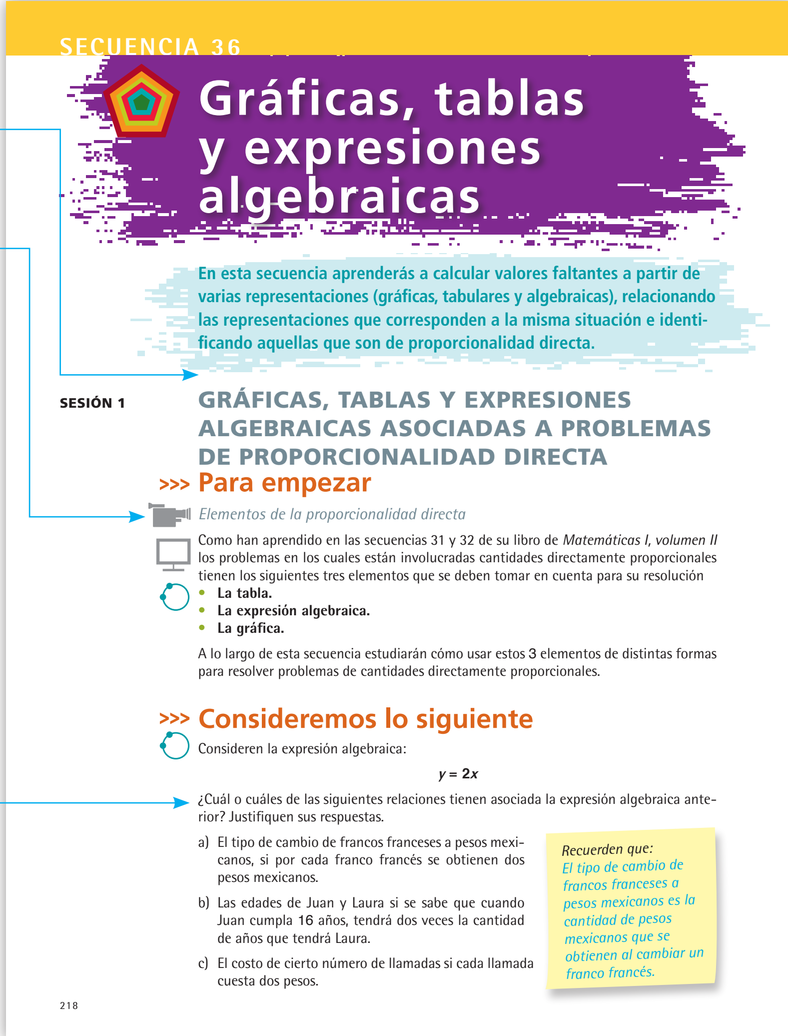
Propósito del interactivo.
Desarrollar la intuición sobre los posibles resultados de lanzar una moneda en relación con el número de veces que se realicen los lanzamientos.

Propósito de la sesión. Vincular una expresión algebraica a relaciones de proporcionalidad directa y construir tablas y gráficas a partir de dichas situaciones.
Organización del grupo. A lo largo de la sesión hay momentos de trabajo grupal, en parejas e individual.

Propósito del video. Reconocer las características de las representaciones tabular, gráfica y algebraica de una relación de proporcionalidad directa.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos reconozcan una relación de proporcionalidad directa y la vinculen con una expresión algebraica. También se busca que observen que una misma expresión algebraica puede asociarse a varias situaciones.
Sugerencia didáctica. Si los alumnos no están seguros de cuáles situaciones pueden asociarse a la expresión, sugiérales que prueben con distintos valores para x y vean si se cumple. Si eligen situaciones a las que es incorrecto asociarles la expresión, no los corrija y permítales avanzar en la resolución de la sesión.

Respuestas. En la situación a) interesa averiguar cuántos pesos se obtienen por cierta cantidad de francos. Si y es la cantidad de pesos que se obtendrán al hacer el cambio, x la cantidad de francos que van a cambiarse y se sabe que por cada franco se obtienen 2 pesos, entonces la situación sí tiene asociada la expresión $y = 2x$.
En la situación b) se sabe que cuando Luis tenga 16 años será el doble de la edad de Laura, pero para cualquier otra edad de Luis esa diferencia ya no será del doble, así que no puede asociársele la expresión porque la relación no es de proporcionalidad directa.
En la situación c) se quiere averiguar el costo de cierto número de llamadas (y), cada llamada (x) cuesta 2 pesos, por lo tanto, sí se le puede asociar la expresión $y = 2x$.
En la situación d) interesa conocer cuántos pesos mexicanos (y) se obtienen por cierta cantidad de pesos uruguayos (x), y como por cada peso uruguayo se obtienen 50 centavos de peso mexicano, la expresión no es correcta. La que correspondería es $y = \frac{1}{2}x$. Si la situación fuera a la inversa, es decir, hallar cuántos pesos uruguayos se obtienen al cambiar pesos mexicanos, la expresión sí correspondería.


SECUENCIA 36

Gráficas, tablas y expresiones algebraicas

En esta secuencia aprenderás a calcular valores faltantes a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), relacionando las representaciones que corresponden a la misma situación e identificando aquellas que son de proporcionalidad directa.

SESIÓN 1

GRÁFICAS, TABLAS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS ASOCIADAS A PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

>>> Para empezar

Elementos de la proporcionalidad directa

Como han aprendido en las secuencias 31 y 32 de su libro de *Matemáticas I, volumen II* los problemas en los cuales están involucradas cantidades directamente proporcionales tienen los siguientes tres elementos que se deben tomar en cuenta para su resolución

- **La tabla.**
- **La expresión algebraica.**
- **La gráfica.**

A lo largo de esta secuencia estudiarán cómo usar estos 3 elementos de distintas formas para resolver problemas de cantidades directamente proporcionales.

>>> Consideremos lo siguiente

Consideren la expresión algebraica:

$$y = 2x$$

¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones tienen asociada la expresión algebraica anterior? Justifiquen sus respuestas.

a) El tipo de cambio de francos franceses a pesos mexicanos, si por cada franco francés se obtienen dos pesos mexicanos.

b) Las edades de Juan y Laura si se sabe que cuando Juan cumpla 16 años, tendrá dos veces la cantidad de años que tendrá Laura.

c) El costo de cierto número de llamadas si cada llamada cuesta dos pesos.

Recuerden que:
El tipo de cambio de francos franceses a pesos mexicanos es la cantidad de pesos mexicanos que se obtienen al cambiar un franco francés.

218

Propósitos de la secuencia Calcular valores faltantes a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), relacionando las representaciones que corresponden a la misma situación, e identificar las que son de proporcionalidad directa.		
Sesión	**Título y propósitos de la sesión**	**Recursos**
1	*Gráficas, tablas y expresiones algebraicas asociadas a problemas de proporcionalidad directa* Vincular una expresión algebraica a relaciones de proporcionalidad directa y construir tablas y gráficas a partir de dichas situaciones.	Video *Elementos de la proporcionalidad directa* Aula de medios "Gráficas, tablas y expresiones algebraicas asociadas a problemas de proporcionalidad directa" (Hoja de cálculo)
2	*De la gráfica al problema* Vincular una gráfica a relaciones de proporcionalidad directa y escribir la expresión algebraica correspondiente.	

Eje
Manejo de la información.
Tema
Análisis de la información.
Antecedentes
En secuencias anteriores los alumnos han trabajado con relaciones directamente proporcionales, su representación en tablas y gráficas, y la escritura de su expresión algebraica. En esta secuencia se pretende que los alumnos las reconozcan asociándolas con una tabla, gráfica y expresión algebraica correspondientes, y que encuentren valores faltantes a partir de cualquiera de sus representaciones.

d) El tipo de cambio de pesos uruguayos a pesos mexicanos, si por cada dos pesos uruguayos se obtiene un peso mexicano.

>>> Manos a la obra

I. Encuentren la expresión algebraica que permite calcular la cantidad de pesos que se obtienen al cambiar determinada cantidad de francos, es decir, el tipo de cambio de francos a pesos (situación del inciso a).

Representen con la letra ***x*** la cantidad de francos que se van a cambiar y con la letra ***y*** la cantidad de pesos que se obtienen al cambiar los francos.

____

Encuentren la expresión algebraica asociada al aumento de las edades de Juan y Laura. Representen con la letra ***u*** la cantidad de años que tiene Laura y con la letra ***v*** la cantidad de años que tiene Juan (situación del inciso b).

____

Comparen sus expresiones y comenten cómo las encontraron.

II. Completen las siguientes tablas para establecer cuál de las dos relaciones anteriores es de proporcionalidad directa.

x (cantidad de francos)	*y* (cantidad de pesos mexicanos)
0	0
1	2
5	10
8	16
12	24
15	30

Tabla 1

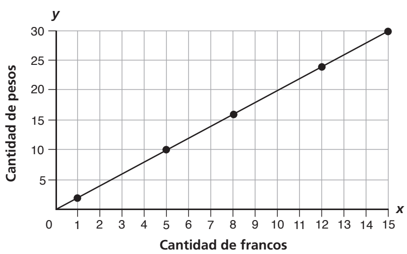
u (edad de Juan)	*v* (edad de Laura)
16	8
13	5
11	3
10	2
9	1
8	0

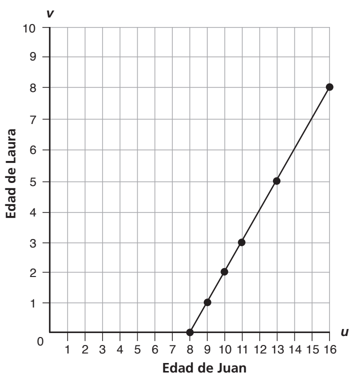
Tabla 2

Recuerden que:
Dos cantidades están en proporción directa si al aumentar una (al doble, triple, etc.), o al disminuir (a la mitad, la tercera parte, etc.), la otra aumenta (al doble, triple, etc.), o disminuye (a la mitad, tercera parte, etcétera).

¿Cuál de las tablas anteriores es de proporcionalidad directa?

III. Con la información de las tablas anteriores completen las siguientes gráficas.





219

Sugerencia didáctica. Los alumnos ya estudiaron el concepto de dependencia en la secuencia 27. Pregúnteles qué variable está en función de la otra en esta relación. **Respuesta.** La expresión es $y = 2x$.

Respuestas. La expresión es $v = u + 8$, pero también podría ser $u = v - 8$ porque en esta relación no se especifica qué variable está en función de la otra.

3

Sugerencia didáctica. Dé un espacio para discutir grupalmente cuál de las tablas es de proporcionalidad directa. Pida a los alumnos que argumenten su respuesta.

Posibles dificultades. Cuando terminen de hacer las gráficas notarán que ambas son rectas, lo que puede hacer pensar a algunos alumnos que ambas relaciones son de proporcionalidad directa. Si esto ocurre, pídales que revisen la sección *A lo que llegamos* de la secuencia 32, sesión 2, en donde se explicita cómo deben ser las gráficas que representan una relación de proporcionalidad directa (en una recta que pasa por el origen –el punto 0,0–, condición que la gráfica de las edades no cumple).

Sugerencia didáctica. Es conveniente que se discuta el inciso d). Sí es una relación de proporcionalidad directa, pero como se dijo antes, no corresponde a la expresión algebraica $y = 2x$.
La expresión correcta para esa situación sería $y = \frac{1}{2}x$.

Propósito de la actividad. Se pide a los alumnos hacer la tabla y la gráfica con la intención de que tengan más elementos para elegir cuál relación es de proporcionalidad directa y tiene asociada la expresión dada, o bien, para validar su respuesta cuando ya han hecho una elección. Una vez que terminen, pídales que regresen al *Consideremos lo siguiente* y si hubo errores corríjanlos.

Integrar al portafolios. Conserve una copia de las respuestas de los alumnos a esta actividad. Si lo considera necesario, pídales que justifiquen su respuesta haciendo una tabla o gráfica para mostrar que la relación que eligieron es de proporcionalidad directa y que corresponde a la expresión dada.

Respuestas. En la relación a) la ganancia (y) es de 3 pesos por cada 2 pesos invertidos (x). Sí es de proporcionalidad directa, pero no corresponde a la expresión dada. La expresión correcta sería $y = \frac{3}{2}x$. Encontrar tal expresión puede ser difícil para los alumnos, lo importante es que reconozcan que la **situación** no corresponde a la expresión dada.
En la situación b) la velocidad de un automóvil (y) es el triple de la velocidad de otro automóvil (x), por lo tanto sí es correcto asociarle la expresión $y = 3x$.
En la situación c) la producción de la máquina (y) está dada por el tiempo (x) que tarda en hacer una lata. Si en un segundo produce $\frac{1}{3}$ de lata, la expresión correcta sería $y = \frac{1}{3}x$.
Es una relación de proporcionalidad directa, pero no le corresponde la expresión dada.

IV. En sus cuadernos encuentren las expresiones, hagan las tablas y las gráficas correspondientes a las relaciones de los incisos c) y d) para determinar si las situaciones tienen asociada la expresión algebraica del inicio de la sesión.

>>> A lo que llegamos

Para determinar si una relación es de proporcionalidad directa se puede hacer lo siguiente:

- **A partir de la relación, construir una tabla para encontrar algunos valores y determinar si esta tabla es de proporcionalidad directa.**
- **A partir de la tabla, construir la gráfica y determinar si los puntos están en una línea recta que pasa por el origen.**
- **Encontrar la expresión algebraica asociada a la situación y determinar si es de la forma $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad.**

Puede suceder que distintas situaciones proporcionales tengan la misma expresión algebraica asociada. Por ejemplo, dos de las relaciones de proporcionalidad de esta secuencia son distintas, pero tienen asociada la misma expresión algebraica: $y = 2x$

>>> Lo que aprendimos

1. Considera la siguiente expresión algebraica:

$$y = 3x$$

¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones tienen asociada la expresión algebraica anterior? Justifica tu respuesta.

a) Las ganancias en términos de la cantidad de dinero invertido, si se sabe que por cada dos pesos invertidos se ganan tres pesos.

b) Las velocidades de dos automóviles si uno va al triple de velocidad que el otro.

c) Una máquina produce una lata cada tres segundos. ¿Cuántas latas producirá en x segundos?

SESIÓN 2

DE LA GRÁFICA AL PROBLEMA

>>> Para empezar

En la secuencia 32 del libro de *Matemáticas I* graficaste relaciones de proporcionalidad directa. Recuerda que en el plano cartesiano, los puntos de una gráfica se localizan con coordenadas, como (**A**, **B**). A la primera coordenada **A** se le llama **abscisa,** y a la segunda coordenada **B** se le llama **ordenada**.

Por ejemplo, el punto (1, 5) tiene como abscisa **1** y como ordenada **5**.

Completa la siguiente tabla, donde se pide encontrar las abscisas y las ordenadas de varios puntos del plano cartesiano.

220

Propósito de la sesión. Vincular una gráfica a relaciones de proporcionalidad directa y escribir la expresión algebraica correspondiente.

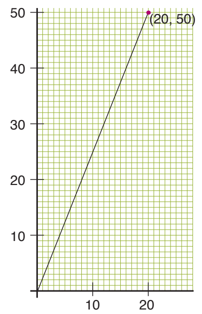
Organización del grupo. La sesión se sugiere trabajarla en parejas, excepto el último apartado, que es individual.

Punto en el plano cartesiano	Abscisa del punto	Ordenada del punto
$(1, \frac{1}{15})$	1	$\frac{1}{15}$
$(\frac{1}{2}, 7)$	$\frac{1}{2}$	7
$(\frac{3}{4}, \frac{17}{5})$	$\frac{3}{4}$	$\frac{17}{5}$
$(\frac{12}{4}, \frac{1}{2})$	$\frac{12}{4}$	$\frac{1}{2}$

Propósito de la actividad. Se quiere que los alumnos recuerden los términos de "abscisa" y "ordenada" y que se familiaricen con coordenadas que no son números enteros.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente gráfica representa una relación de proporcionalidad directa:



2

¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones pueden asociarse con la representación de esta gráfica? Justifiquen su respuesta.

a) La relación entre las edades de Héctor y su hija Diana, si se sabe que ahora Héctor tiene 50 años y su hija 20 años.

b) La relación entre la altura y la cantidad de libros, si se sabe que 20 libros alcanzan una altura de 50 cm.

c) El costo de distintas cantidades de caramelos. Una bolsa con 50 caramelos cuesta $20.

>>> Manos a la obra

I. Respondan las siguientes preguntas para encontrar cuáles de las tres situaciones corresponde la gráfica anterior.

a) ¿Qué edad tenía Héctor cuando Diana nació? (se considera que Diana tiene 0 años al nacer). ________________

221

Respuestas.
a) Héctor tenía 30 años.
La expresión correcta para esa situación es $y = x - 30$.

Propósito de la actividad. Se pretende que los alumnos relacionen una o más relaciones a una gráfica de proporcionalidad directa. Si los alumnos eligen relaciones que no corresponden a la gráfica no los corrija, más adelante tendrán oportunidad de verificar sus respuestas.

Respuestas. La situación a) no es de proporcionalidad directa, aunque en la recta puedan encontrarse las coordenadas correspondientes a las edades de Diana y Héctor (20, 50). De acuerdo con el enunciado, cuando Diana tenía 10 años su papá tenía 40, y ese punto (10, 40) ya no está en la recta. Además, no es cierto que cuando Diana tenía 0 años, su papá también tenía 0 años, por lo tanto, la recta correspondiente a esa relación no pasaría por el origen.
En la situación b), 20 libros iguales tienen una altura de 50 cm, por lo tanto se espera que 10 de esos libros alcancen una altura de 25 cm, y que 0 libros tengan una altura de 0 cm, por lo tanto sí es una situación de proporcionalidad directa a la que puede asociársele la gráfica dada.

La relación c) es de proporcionalidad directa porque los datos dan lugar a una recta y porque 0 caramelos cuestan 0 pesos (la recta sí pasa por el origen). Se le puede asociar la gráfica dada porque con 10 pesos se pueden comprar 25 caramelos (10, 25), con 2 pesos 5 caramelos (2, 5), etc., y todos esos puntos se encuentran sobre la recta dada.

Respuestas.

b) 20 libros tienen un grosor de 50 cm, entonces cada libro tiene un grosor de $\frac{50}{20}$ cm, que también puede escribirse como $\frac{5}{2}$ de cm o 2.5 cm.

Una expresión para esa situación sería $y = \frac{50}{20}x$. También podría escribirse como $y = 2.5x$ si se piensa que cada libro tiene una altura de 2.5 cm.

Respuestas.

c) Si con $2 puede comprar 5 caramelos, con $8 compraría 20 caramelos. La expresión sería $y = 2.5x$

Completen la siguiente tabla para determinar algunas de las edades de Diana a partir de la edad de Héctor:

Edad de Héctor	Edad de Diana
50	20
60	30
30	0
58	28

Tabla 1

Encuentren la expresión algebraica asociada a esta relación. Representen con la letra x la edad de Héctor y con la letra y la edad de Diana.

b) ¿De qué grosor es cada libro?

Completen la siguiente tabla

Número de libros	Altura que tienen apilados (cm)
20	50
10	25
2	5
8	20

Tabla 2

Encuentren la expresión algebraica asociada a esta relación. Representen con la letra x el número de libros y con la letra y la altura.

c) ¿Cuántos caramelos compró Óscar si pagó 8 pesos?

Completen la siguiente tabla para determinar el número de caramelos que se compran con distintas cantidades de dinero:

Precio (en pesos)	Número de caramelos
20	50
10	25
2	5
8	20

Tabla 3

Encuentren la expresión algebraica asociada a esta relación. Representen con la letra x la cantidad en pesos y con letra y el número de caramelos que compran.

222

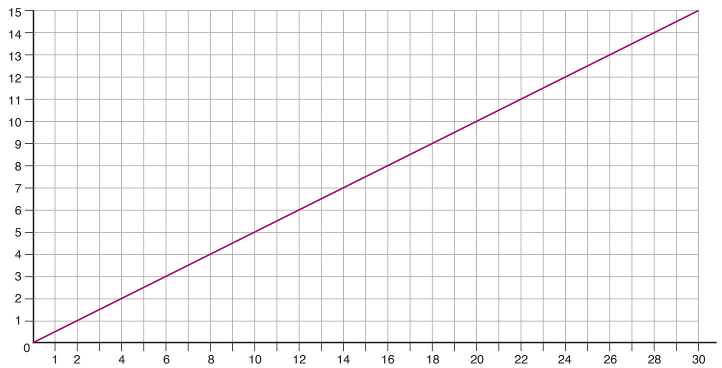
>>> A lo que llegamos

Puede suceder que distintas relaciones de proporcionalidad directa tengan asociada la misma gráfica. Por ejemplo, al graficar las relaciones de proporcionalidad de los incisos b) y c) se obtienen puntos que están sobre la misma línea recta.

Además, si las relaciones de proporcionalidad tienen asociada la misma gráfica, entonces tienen asociadas las mismas expresiones algebraicas.

>>> Lo que aprendimos

Encuentra cuál de las siguientes relaciones de proporcionalidad tiene asociada la siguiente gráfica:



1. A continuación se presentan dos relaciones de proporcionalidad directa:
   - El tipo de cambio de pesos a quetzales guatemaltecos. Recuerda que 5 pesos mexicanos equivalen a 10 quetzales guatemaltecos.
   - El tipo de cambio de pesos a francos. Recuerda que 10 pesos mexicanos equivalen a 5 francos franceses.

2. Encuentra las expresiones algebraicas asociadas a las relaciones de proporcionalidad anteriores. Compara tus gráficas y tus expresiones con un compañero.

>>> Para saber más

Sobre el tipo de cambio entre monedas de distintos países consulta:
http://www.oanda.com/convert/classic?user=etravetware&lang=es
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Sugerencia didáctica. Solicite que revisen sus respuestas al apartado *Consideremos lo siguiente* y corrijan si es necesario.

Integrar al portafolios. Pida a los alumnos una copia de sus respuestas a las actividades I y II de este apartado. Si considera que puede ser de utilidad, sugiérales que hagan una tabla para verificar que hayan escogido la situación correcta y facilitar la escritura de la expresión correspondiente.

Respuestas. La segunda situación es la que tiene asociada la gráfica dada, porque 2 pesos son equivalentes a 1 franco, lo que en la gráfica corresponde al punto (2, 1). La expresión sería $y = \frac{1}{2}x$.
La primera no, porque 2 pesos mexicanos corresponden a 4 quetzales guatemaltecos. La expresión sería $y = 2x$.

Propósito de la sesión. Construir y analizar tablas para determinar valores faltantes en una relación de proporcionalidad inversa.

Organización del grupo. La sesión se resuelve en parejas, excepto el último apartado, que es individual.

1

Propósito de la actividad. Los alumnos van a explorar relaciones de proporcionalidad inversa y formas correctas e incorrectas de resolver los problemas que se plantean.

Posibles dificultades. Es común que los alumnos traten de resolver relaciones de proporcionalidad inversa utilizando procedimientos que han aprendido para la proporcionalidad directa, más aún porque su experiencia con la proporcionalidad inversa es mucho menor que la que han adquirido con la directa. Si los alumnos no reconocen la diferencia entre las situaciones planteadas en esta secuencia y las de proporcionalidad directa, no trate de explicárselas en este momento. En el apartado *Manos a la obra* se presentan procedimientos de resolución para que puedan analizarlos juntos y conocer las propiedades de la proporcionalidad inversa.

Respuestas.

a) El total de agua son 2 400 ℓ, si se reparte en 4 tambos cada uno debe tener una capacidad de 600 ℓ.

b) Los 2 400 ℓ se reparten en 12 tambos, cada uno debe tener una capacidad de 200 ℓ.

SECUENCIA 37

Proporcionalidad inversa

En esta secuencia aprenderás a identificar y resolver relaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.

SESIÓN 1

EL AGUA

>>> Para empezar

El agua es un líquido esencial para la vida en nuestro planeta. Aunque la Tierra está constituida por 75% de agua, menos de 1% se puede usar para el consumo humano. Como te podrás dar cuenta, es muy importante cuidar del agua, ya que sin ella la vida no sería posible.

>>> Consideremos lo siguiente

Se tiene almacenada agua en 8 tambos de 300 litros de capacidad cada uno. Hay que pasar el agua a tambos de otra capacidad.

a) Si se quisiera pasar toda el agua a 4 tambos de igual tamaño, ¿cuántos litros de capacidad debería tener cada tambo?

b) Si se quisiera pasar toda el agua a 12 tambos de igual tamaño, ¿cuántos litros de capacidad debería tener cada tambo?

>>> Manos a la obra

I. En otra escuela hicieron el mismo problema y encontraron dos procedimientos para calcular la capacidad de cada tambo si se quiere almacenar toda el agua en 12 tambos.

- En el equipo 1 hicieron el siguiente diagrama:

Entre 2 8 tambos → 300 ℓ Entre 2
+ +
4 tambos → 150 ℓ

12 tambos → 450 ℓ

Dijeron que para almacenar toda el agua en 12 tambos cada tambo debería tener capacidad de 450 litros.

224

Eje
Manejo de la información.
Tema
Análisis de la información.
Antecedentes
Los alumnos han tenido contacto principalmente con relaciones de variación proporcional directa, sus propiedades y sus representaciones. En esta secuencia conocerán otro tipo de variación: la proporcionalidad inversa. También elaborarán tablas y gráficas para conocer valores faltantes y conocerán algunas de sus propiedades.

Propósitos de la secuencia
Identificar y resolver relaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos
1	*El agua* Construir y analizar tablas para determinar valores faltantes en una relación de proporcionalidad inversa.	
2	*La velocidad* Asociar la expresión algebraica correspondiente a problemas de cantidades inversamente proporcionales.	Video *La velocidad constante* Interactivo “Variación proporcional inversa y gráficas 1”
3	*La hipérbola* Asociar la expresión algebraica correspondiente a problemas de relaciones inversamente proporcionales y construir la gráfica correspondiente.	Interactivo “Variación proporcional inversa y gráficas 2” Aula de medios “La hipérbola” (Hoja de cálculo)

- En el equipo 2 hicieron la siguiente tabla:

	x (Número de tambos)	*y* (Capacidad de cada tambo en litros)	
	8	300	
Entre 2	4	600	Por 2
Por 3	12	200	Entre 3

Dijeron que para almacenar toda el agua en 12 tambos, cada tambo debería tener capacidad de 200 litros.

Comenten:

a) ¿Cuántos litros de agua hay almacenados en 8 tambos de 300 litros cada uno?

b) ¿Cuántos litros de agua se almacenan con la solución dada por el equipo 1?

c) ¿Cuántos litros de agua se almacenan con la solución dada por el equipo 2?

II. Completen la siguiente tabla para calcular la capacidad que debe de tener cada tambo para almacenar 2 400 litros de agua.

x (Número de tambos)	*y* (Capacidad de cada tambo en litros)
8	300
4	600
2	1 200
1	2 400
3	800
12	200

III. Respondan las siguientes preguntas:

a) Si se quisiera almacenar los 2 400 litros de agua en 10 tambos, ¿qué capacidad debería tener cada tambo? ______

b) Si se quisiera almacenar los 2 400 litros en un solo tambo, ¿qué capacidad debería tener? ______

c) Si se quisiera almacenar los 2 400 litros en 32 tambos, ¿qué capacidad debería tener cada tambo? ______

225

2

Respuestas.

a) 2 400 ℓ.

b) Son 12 tambos, cada uno con una capacidad de 450 ℓ, así que en total se almacenan 5 400 ℓ.

c) Si cada uno de los 12 tambos tiene una capacidad de 200 ℓ, en total se almacenan 2 400 ℓ.

Sugerencia didáctica. Analicen la tabla cuando terminen de llenarla. Pregunte a los alumnos qué diferencias o similitudes encuentran en esta tabla con respecto a las de variación proporcional directa. Si ningún alumno lo comenta, dígales que observen que mientras mayor es el número de la columna izquierda (número de tambos), menor es el de la derecha (capacidad de cada tambo).

Respuestas.

a) 240 ℓ.

b) 2 400 ℓ.

c) 75 ℓ.

Respuestas.

a) Se multiplica por 2 el número de tambos.

b) Se divide entre 5 el número de tambos.

c) Si el número de tambos aumenta al doble, la capacidad se divide entre 2. Si el número de tambos disminuye la cuarta parte, la capacidad se multiplica por 4.

Sugerencia didáctica. Revisen las respuestas a las preguntas del apartado *Consideremos lo siguiente* y corrijan si es necesario.

Sugerencia didáctica. Comenten esta información. Haga énfasis en que los procedimientos que aprendieron para resolver problemas en relaciones de proporcionalidad directa no les serán útiles cuando se trate de relaciones de proporcionalidad inversa. Puede poner algún ejemplo para aclararlo.

Integrar al portafolios. Revise las respuestas de los alumnos a esta actividad. Si fuera necesario, pídales que hagan una tabla para averiguar las respuestas.

Respuestas.

a) Con 60 pasajeros cada uno paga $30.

b) $90.

c) $120.

d) El número de alumnos que va a la excursión y la cantidad que paga cada uno.

Comenten:

a) Si se divide entre 2 la capacidad de cada tambo, ¿qué sucede con el número de tambos necesarios para almacenar los 2 400 litros de agua?

b) Si se multiplica por 5 la capacidad de cada tambo, ¿qué sucede con el número de tambos necesarios para almacenar los 2 400 litros de agua?

c) ¿Qué pasa con la capacidad de cada tambo cuando el número de tambos aumenta al doble?, ¿y si el número de tambos disminuye a la cuarta parte?

>>> A lo que llegamos

Dos cantidades son inversamente proporcionales si al aumentar una al doble la otra disminuye a la mitad, al aumentar al triple la otra disminuye a la tercera parte, y así sucesivamente.

Por ejemplo, en el problema de esta sesión el número de tambos que se emplean para almacenar el agua y la capacidad que tiene cada uno de los tambos son cantidades inversamente proporcionales.

>>> Lo que aprendimos

1. En una escuela se va a organizar una excursión y van a contratar un autobús que tiene 60 asientos. El autobús les cobra $1 800.00 por el viaje.

a) Si el autobús se llena, ¿cuánto debe pagar cada pasajero por el viaje?

____

b) Si solamente van 20 alumnos a la excursión, ¿cuánto debe pagar cada pasajero?

____

c) Si solamente van 15 alumnos a la excursión, ¿cuánto debe pagar cada pasajero?

____

d) ¿Cuáles son las cantidades que son inversamente proporcionales en este problema?

____

SESIÓN 2

LA VELOCIDAD

>>> Para empezar

La velocidad constante

En las secuencias 6 y 31 del libro de *Matemáticas I* estudiaste problemas relacionados con la velocidad de un automóvil en términos de la distancia recorrida y el tiempo que tarda en recorrerse. En está sesión continuaremos con el estudio de problemas de velocidad.

Propósito de la sesión. Asociar la expresión algebraica correspondiente a problemas de cantidades inversamente proporcionales.

Organización del grupo. En la sesión se sugieren momentos de trabajo individual, en parejas y grupal.

Propósito del video. Ejemplificar la noción de velocidad constante.

>>> Consideremos lo siguiente

Para ir de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz se hacen 6 horas viajando en automóvil a una velocidad promedio de 70 kilómetros por hora.

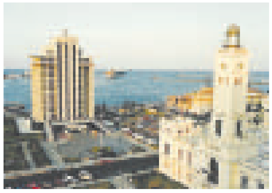
Respondan las siguientes preguntas:

a) Si se hubiera hecho el viaje de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz en 12 horas, ¿a qué promedio de velocidad se habría viajado?

b) Si se quisiera hacer el viaje de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz en un tiempo de 3 horas, ¿a qué promedio de velocidad debería viajarse?

c) Si se quisiera hacer el viaje de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz en un tiempo de 5 horas, ¿a qué promedio de velocidad debería viajarse?

>>> Manos a la obra



I. Completen la siguiente tabla para calcular la velocidad promedio para viajar de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz en distintos periodos de tiempo.

El tiempo de viaje está representado por ***x*** en la tabla y la velocidad promedio durante el viaje está representada por la letra ***y*** en la tabla.

x (en horas)	*y* (en kilómetros por hora)
6	70
12	35
9	46.67
3	140
1	420
5	84

II. En un equipo de otra escuela hicieron la siguiente observación al llenar la tabla anterior:

$$6 \times 70 = 420$$

$$12 \times 35 = 420$$

Y dijeron:

"Cuando multiplicamos los números de un renglón el resultado siempre es 420".

Sugerencia didáctica. Antes de empezar a responder, pregunte a los alumnos cuál es la distancia que hay entre la Ciudad de México y la de Veracruz. Si el viaje dura 6 horas a una velocidad promedio de 70 km por hora, hay una distancia de 420 km.

Respuestas.

a) 35 km/h.
b) 140 km/h.
c) 84 km/h.

Sugerencia didáctica. Si los alumnos tienen dificultades para llenar la tabla, ayúdelos a encontrar las relaciones entre los datos. Por ejemplo,

Horas	km/h
6	70
12	35

La cantidad de horas del segundo renglón (12) es el doble que la del primero (6), y los kilómetros por hora del segundo renglón (35) son la mitad de los del primero (70). Esto tiene sentido, porque si se viaja a la mitad de velocidad, el recorrido durará el doble de tiempo.

Ahora, para hallar los valores faltantes puede sugerirles que empiecen con el 3 (horas), ya que es la mitad del 6 y por lo tanto la velocidad será el doble. Conociendo ese dato pueden averiguar la velocidad a la que hay que viajar si el recorrido se hace en 9 horas (la velocidad será 3 veces menor que si sólo dura 3 horas). Un viaje de 5 horas será 5 veces más lento que uno de 1 hora.

Propósito del interactivo. Resolver problemas que involucran cantidades inversamente proporcionales, relacionando tablas, gráficas y su expresión algebraica.

Respuestas. El resultado siempre es 420, que es la distancia entre la ciudad de Veracruz y la de México.

Recuerde que.
En una relación de *proporcionalidad inversa:*

- cuando una cantidad aumenta el doble, la otra disminuye a la mitad, si aumenta el triple la otra disminuye a la tercera parte, etc.;
- si se representa en una gráfica se obtiene una curva llamada hipérbola;
- si se representan los datos en una tabla el producto entre los elementos de los dos conjuntos se mantiene constante;
- su expresión algebraica es $y = \frac{k}{x}$.

En una relación de *proporcionalidad directa:*

- cuando una cantidad aumenta el doble, la otra también aumenta el doble, si aumenta el triple la otra también aumenta el triple, etc.;
- si se representa en una gráfica se obtiene una recta que pasa por el origen;
- si se representan los datos en una tabla el cociente entre los elementos de los dos conjuntos se mantiene constante;
- su expresión algebraica es $y = kx$.

Sugerencia didáctica. Busquen una secuencia de proporcionalidad directa en la que hayan llenado una tabla. Pídales que multipliquen los números de cada renglón y vean si se obtiene un producto constante.

Respuestas.
a) 420 km.
b) Por 84. Pueden pensarlo como
5x ___ = 420, o bien,
420 ÷ 5 = ___
c) Por 46.67 (redondeando).

SECUENCIA 37

Multipliquen los números de cada renglón: el número de horas por la velocidad. Anoten sus resultados al lado de la tabla.

Comparen sus resultados y comenten:

a) ¿Coinciden los productos de su tabla con los resultados que obtuvieron en la otra escuela?
b) ¿Están de acuerdo con la observación que hicieron en la otra escuela?

Contesten:

a) ¿Cuántos kilómetros hay que recorrer para ir de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz? ______
b) ¿Por qué número hay que multiplicar 5 para obtener 420? ______
c) ¿Por qué número hay que multiplicar 9 para obtener 420? ______

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Hay algún número por el cual se multipliquen los datos de la primera columna para obtener los datos de la segunda columna?, ¿cuál?

Recuerden que:
En las tablas de proporcionalidad directa al multiplicar los datos de la primera columna por la constante de proporcionalidad se obtenían los datos de la segunda columna.

>>> A lo que llegamos

En las situaciones que involucran cantidades inversamente proporcionales hay siempre un valor constante. Esta constante resulta de multiplicar las cantidades que son inversamente proporcionales. A este número se le llama constante de proporcionalidad inversa.

Por ejemplo, en el problema anterior, 420 es la constante de proporcionalidad inversa, porque 6 × 70 = 420.

III. Si x es el tiempo que se emplea para ir de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz y si y es la velocidad promedio, encuentren una expresión algebraica para calcular la velocidad a partir del tiempo:

$y =$

En el pizarrón anoten sus expresiones algebraicas y comenten cómo las obtuvieron.

IV. Usando la expresión algebraica que obtuvieron respondan lo siguiente:

a) ¿A qué velocidad iría el automóvil si recorriera en 2 horas la distancia entre la Ciudad de México y la ciudad de Veracruz? ______
b) ¿A qué velocidad iría el automóvil si recorriera en 7 horas la distancia entre la Ciudad de México y la ciudad de Veracruz? ______

228

Respuesta. Se divide la constante de proporcionalidad inversa entre el otro dato conocido, en este caso, el tiempo. Entonces $y = \frac{420}{x}$.

Respuestas.
a) 210 km/h.
b) 60 km/h.

Respuesta.
No hay.

>>> A lo que llegamos

La expresión algebraica asociada a este problema de **proporcionalidad inversa** es:

$$xy = 420$$

En este caso la letra x representa el tiempo que se emplea para ir de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz, la letra y representa la velocidad promedio y **420** corresponde a la distancia que hay entre la Ciudad de México y la ciudad de Veracruz.

La expresión algebraica que permite obtener y es:

$$y = \frac{420}{x}$$

>>> Lo que aprendimos

1. En tu cuaderno encuentra la constante de proporcionalidad inversa y la expresión algebraica de los problemas de la sesión 1 de esta secuencia.
2. Si 2 campesinos tardan 3 días en sembrar un terreno:
   a) ¿Cuántos días tardarían en sembrar el mismo terreno 6 campesinos?

   ____

   b) Si el terreno se sembró en 6 días, ¿cuántos campesinos lo sembraron?

   ____

LA HIPÉRBOLA

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En la secuencia 13 de tu libro de *Matemáticas I, volumen I* y en primaria estudiaste el área y el perímetro de diferentes figuras geométricas. En esta sesión resolverás más problemas relacionados con el área de los rectángulos.

>>> Consideremos lo siguiente

Se sabe que un rectángulo tiene un área de 24 cm² y que su base mide 6 cm de longitud.

a) ¿Cuánto mide su altura? ________________

Supongan que el área del rectángulo se mantiene constante, es decir, que el área del rectángulo siempre es de 24 cm². Contesten las siguientes preguntas:

b) Si la base del rectángulo midiera 12 cm de longitud, ¿cuántos centímetros mediría su altura? ________________

c) Si la base del rectángulo midiera 8 cm de longitud, ¿cuántos centímetros mediría su altura? ________________

d) ¿Cuáles son las cantidades que son inversamente proporcionales en este problema?

____

e) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad inversa? ________________

f) Encuentren la expresión algebraica asociada a este problema. ________________

Sugerencia didáctica. Comparen esta expresión ($y = \frac{k}{x}$) con $y = kx$, que es la que corresponde a las relaciones de proporcionalidad directa. Puede preguntar a los alumnos en qué se parecen y en qué se diferencian. Por ejemplo, qué papel juega la constante en cada uno de los casos (en la proporcionalidad directa la constante es el número por el cual se multiplica el dato de la primera columna para obtener el de la segunda; en cambio, la constante de proporcionalidad inversa es el número que resulta de multiplicar los datos de un mismo renglón).

Integrar al portafolios. Pida una copia de las respuestas de los alumnos al número 1.

Respuestas. La constante de proporcionalidad inversa es el número de litros que hay que almacenar, 2 400. La expresión sería $y = \frac{2400}{x}$.

Posibles procedimientos. Los alumnos podrían fijarse en las relaciones que hay entre los datos:

Campesinos	Días
2	3
6	$\square$
$\square$	6

Si el número de campesinos aumenta de 2 a 6 (o sea, por 3), el número de días será una tercera parte del primero. Si el número de días en los que se termina el trabajo aumenta el doble (de 3 a 6), el número de campesinos que trabajarían sería la mitad.

O bien, hallar la constante de proporcionalidad inversa, que corresponde a 6 días de trabajo total (ya saben que si se multiplican los datos de un renglón se obtiene esa constante).

Respuestas.

a) Un día.
b) Un campesino.

Propósito de la sesión. Asociar la expresión algebraica correspondiente a problemas de relaciones inversamente proporcionales y construir la gráfica correspondiente.

Organización del grupo. Todas las actividades son en parejas, salvo la última, que es individual.

Propósito de la actividad. Ahora la proporcionalidad inversa se aborda en la geometría, dejando como constante el área y variando la longitud de los lados.

Respuestas.

a) 4 cm porque 6 × 2 = 24.
b) 2 cm porque 12 × 2 = 24.
c) 3 cm porque 8 × 3 = 24.
d) La base y la altura del rectángulo.
e) 24 porque es el número que se obtiene siempre que se multiplica la base por la altura.
f) Si la base es x y la altura y, entonces $xy = 24$ o $y = \frac{24}{x}$.

Posibles dificultades. Para muchos alumnos las expresiones $xy = 24$ y $y = \frac{24}{x}$ son dos cosas independientes que se aprenden por separado. Es importante hacerles ver que están relacionadas y que la forma de "acomodarlas" depende de cuál sea el valor que debe hallarse y cuáles ya se conozcan. En este ejemplo, si quiere hallarse la constante de proporcionalidad inversa la expresión sería $xy = k$.

Si ya se conocen la base y la constante, entonces $y = \frac{24}{x}$.

Y si hay que averiguar cuál es la base conociendo la constante y la altura $y = \frac{24}{y}$.

Pero los alumnos no tienen que aprenderse una por una, el objetivo es que conociendo la expresión algebraica de la proporcionalidad inversa puedan hallar cualquier valor. Para lograrlo puede ser útil analizar la expresión y utilizarla varias veces en diferentes situaciones, dándole distintos valores a una de las variables y manteniendo la constante. Después hacer lo mismo con la otra variable y analizar los cambios.

Propósito del interactivo. Ejemplificar la noción de velocidad constante.

Sugerencia didáctica. Cuando terminen de llenar la tabla verifiquen que efectivamente $xy = 24$.

Sugerencia didáctica. Si los alumnos tienen dificultades para determinar cuál es la expresión correcta, o para verificar que lo sea cuando ya la hayan elegido, pídales que la utilicen con los valores de x y y que encontraron en la tabla anterior.

Respuestas. La expresión algebraica correspondiente es $xy = 24$.

Respuestas. Deben graficar los puntos: (6, 4), (12, 2), (8, 3), (24, 1), (4, 6), (48, 0.5), y luego unirlos.

2

Respuestas.

a) No puede medir 0 cm, lo que indica que la gráfica no pasa por el origen.

b) No se puede porque no están sobre una recta.

c) Las de proporcionalidad directa pasan por el origen y son rectas. Las de proporcionalidad inversa son hipérbolas y no pasan por el origen.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para encontrar un lado del rectángulo cuando el otro lado del rectángulo varía. Representen con x la medida de la base y con y la medida de la altura del rectángulo.

x (en centímetros)	y (en centímetros)	Constante de proporcionalidad inversa
6	4	24
12	2	24
8	3	24
12	2	24
24	1	24
4	6	24
48	0.5	24

II. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas corresponde a esta situación de proporcionalidad inversa? Subráyenla.

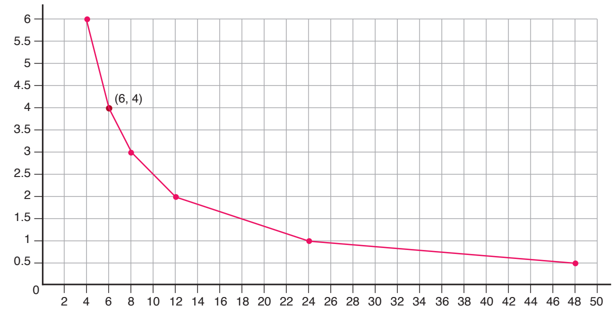
a) $24x = y$

b) $x + y = 24$

c) $24y = x$

d) $xy = 24$

III. Con los datos de la tabla 1 hagan la gráfica correspondiente:



IV. Comparen sus expresiones algebraicas y sus gráficas. Comenten:

a) ¿Puede medir 0 cm de longitud la base de este rectángulo? Recuerden que su área es 24 cm².

b) ¿Los puntos de esta gráfica están sobre una recta? Tomen tres puntos y traten de unirlos mediante una misma línea recta.

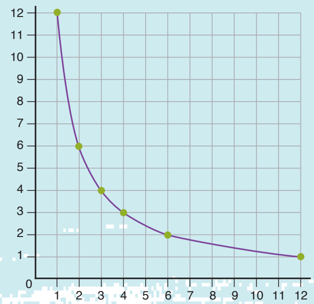
c) ¿Cuáles son las diferencias entre una gráfica de proporcionalidad directa y una gráfica de proporcionalidad inversa?

230

>>> A lo que llegamos

Los problemas en los cuales están involucradas cantidades inversamente proporcionales tienen asociadas gráficas que se llaman **hipérbolas**.

Por ejemplo, la siguiente gráfica es la hipérbola que corresponde a la expresión algebraica $xy = 12$



Observa que las hipérbolas **no son líneas rectas ni pasan por el origen**.

>>> Lo que aprendimos

1. Dos pintores tardan 50 horas en pintar la parte exterior de un edificio.

a) Completa la siguiente tabla para determinar cuánto tiempo tardan en pintar la misma parte exterior del edificio distintos números de pintores.

x (número de pintores)	y (horas que tardan en pintar el edificio)	Constante de proporcionalidad inversa
2	50	100
4	25	100
5	20	100
10	10	100
1	100	100

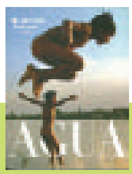
b) Con los datos de la tabla 2, en tu cuaderno encuentra la expresión algebraica correspondiente y construye la gráfica.

Integrar al portafolios. Guardar las respuestas de los alumnos a los incisos a) y b). Si considera que tienen dificultades repasen las actividades de *Manos a la obra* de las 3 sesiones de esta secuencia.

Respuestas.

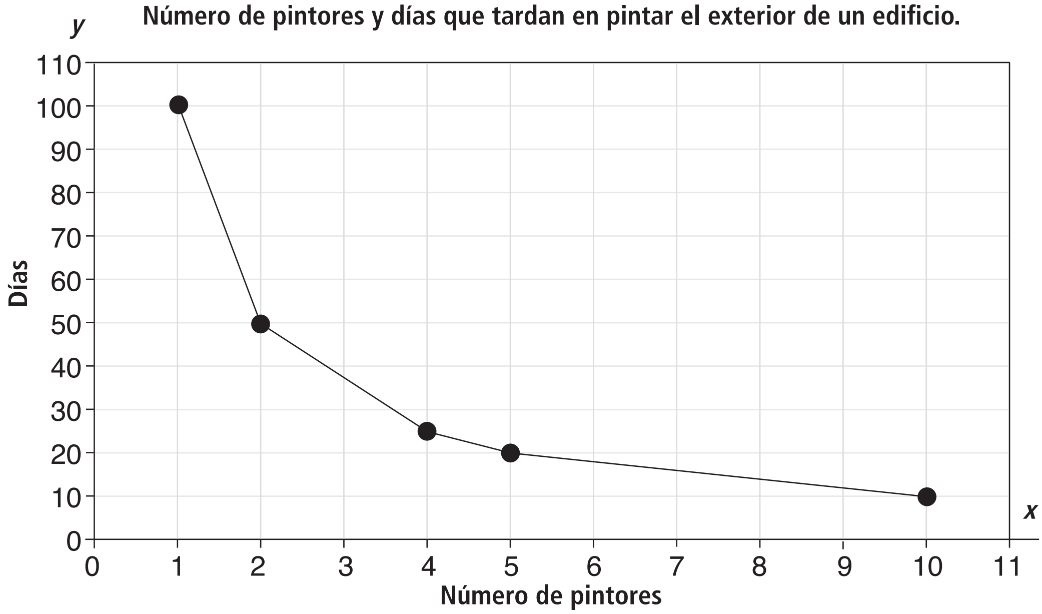
b) $xy = 100$ y también $y = \frac{100}{x}$

>>> Para saber más



Sobre la importancia que tiene el agua y sobre su escasez y cuidado consulta: *Agua*, publicado por el periódico *La Jornada* en 2005.

Número de pintores y días que tardan en pintar el exterior de un edificio.



Propósito de la sesión. Utilizar el significado de la moda, la media y la mediana para interpretar y comunicar información sobre un conjunto de datos.

Organización del grupo. El trabajo es en parejas a lo largo de toda la sesión, excepto en la confrontación, que es grupal.

Propósito del video. Presentar diversas situaciones en las que tiene sentido la aplicación del promedio en su vida diaria.

1

Propósito de la actividad. La intención de la pregunta es que los alumnos se den cuenta de que no es posible decir con exactitud cuánto tiempo tendrá que esperar el autobús, pero que pueden hacer una estimación basándose en los datos de la tabla.

Posibles respuestas. Algo que los alumnos pueden notar al analizar la tabla es que el 6 se repite 3 veces, es decir, que en 3 de los 10 días Jesús esperó 6 minutos, y por ello afirmar que es más probable que el onceavo día tenga que esperar 6 minutos. También pueden calcular el promedio de tiempo de espera. En total, esperó 65 minutos en los 10 días, por lo tanto el promedio es de 6.5 minutos.

SECUENCIA 38

Medidas de tendencia central

En esta secuencia aprenderás a comparar el comportamiento de 2 o más conjuntos de datos referidos a una misma situación o fenómeno a partir de sus medidas de tendencia central.

SESIÓN 1

PROMEDIOS

>>> Para empezar

Promedios

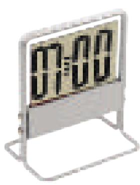
Seguramente ya tienes una idea sobre el promedio y lo has utilizado en más de una ocasión. ¿Cuántas veces has preguntado a tus maestros cuál es el promedio de tus calificaciones?

El promedio también es muy usado en las conversaciones cotidianas. Se habla de que los hombres y las máquinas trabajan a una velocidad promedio, o que los jugadores de diversos deportes comparan sus promedios de puntuación. Sin embargo, además del promedio, existen otros valores estadísticos, como la moda y la mediana, y juntos forman las medidas de tendencia central.

>>> Consideremos lo siguiente

Para llegar a la escuela, Jesús puede utilizar cualquiera de dos líneas de autobuses. Él llega a la parada a las 7:00 de la mañana. Para saber el tiempo que esperó cada día, lo fue registrando durante dos semanas.

La siguiente tabla muestra la línea del autobús en que viajó y el tiempo que tuvo que esperar en los últimos 10 días.



Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Línea del autobús	B	A	A	B	A	A	B	B	A	B
Tiempo de espera (minutos)	10	4	10	6	4	6	9	2	8	6

¿Qué tiempo creen que Jesús tenga que esperar al autobús el día 11?

232

Eje
Manejo de la información.
Tema
Representación de la información.
Antecedentes
Desde la escuela primaria los alumnos han trabajado con las medidas de tendencia central en diversas situaciones. Ahora se pretende que además de calcularlas, las analicen a partir de gráficas ya elaboradas.

Propósitos de la secuencia
Comparar el comportamiento de dos o más conjuntos de datos referidos a una misma situación o fenómeno a partir de sus medidas de tendencia central.

Sesión	Título y propósitos de la sesión	Recursos	Vínculos
1	*Promedios* Utilizar el significado de la moda, la media y la mediana para interpretar y comunicar información sobre un conjunto de datos.	Video *Promedios*	*Español I* Secuencia 14
2	*¿Qué prefieren comer?* Interpretar información numérica obtenida en diversas fuentes (encuestas, diarios, almanaques, etc.) utilizando en sus análisis indicadores de medidas de tendencia central, y decidir en qué casos es conveniente usar cada una para analizar la información.		

Comenten cómo determinarían ese tiempo de espera, es decir, cómo utilizarían los datos que aparecen en la tabla para determinar el tiempo que deberá esperar el autobús.

>>> Manos a la obra

I. Observen la tabla anterior y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál fue el tiempo mínimo que esperó a que pasara un autobús?

b) ¿Y el tiempo máximo?

c) De los 10 tiempos de espera que registró, ¿cuál fue el que más veces se repitió?

d) ¿Cuál es el tiempo promedio que tuvo que esperar a que pasara un autobús?

e) ¿Alguno de los 10 tiempos registrados por Jesús es igual al tiempo de espera promedio?

Respuestas.
a) 2 minutos.
b) 10 minutos.
c) 6 minutos.
d) 6.5 minutos.
e) No.

>>> A lo que llegamos

El valor que más veces se repite en un conjunto de datos se llama **moda**. Es decir, es el que tiene mayor frecuencia absoluta.

Al **promedio** también se le llama **media aritmética**, y se obtiene sumando todos los valores y dividiendo la suma entre el número total de valores.

Por ejemplo, si los valores son 4, 4, 3, 7, 8 y 4, la media o promedio se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Media} = \frac{4 + 4 + 3 + 7 + 8 + 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

La **moda** es 4, porque es el valor con mayor frecuencia absoluta.

II. Consideren ahora los tiempos que tardaron en pasar los autobuses de una y otra línea para completar la siguiente tabla.

Línea A		Línea B	
Mínimo tiempo de espera	4	Mínimo tiempo de espera	2
Máximo tiempo de espera	10	Máximo tiempo de espera	10
Tiempo de espera más frecuente (moda)	4	Tiempo de espera más frecuente (moda)	6
Tiempo de espera promedio (media)	6.4	Tiempo de espera promedio (media)	6.6

Respuestas.
a) 6 minutos.
b) 8 minutos.
c) La línea A, con 6.4 minutos.

Posibles respuestas. Los alumnos pueden considerar el promedio o la moda para contestar el inciso d). Pídales que expliquen por qué eligen una u otra.

Observen que los valores anotados en la tabla resumen la información sobre la situación que se está estudiando. Utilicen esta información para contestar las siguientes preguntas.

a) Considerando a los autobuses de la línea A, ¿cuál es la diferencia entre los tiempos máximo y mínimo de espera? ____
b) Considerando a los autobuses de la línea B, ¿cuál es la diferencia entre los tiempos máximo y mínimo de espera? ____
c) ¿Cuál es la línea que tiene el menor tiempo de espera promedio? ____
d) ¿Qué valor de la tabla puede considerarse como el más adecuado para representar el tiempo que tarda en pasar un autobús? ____
e) ¿En cuál de las dos líneas le conviene más viajar a Jesús? ____

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

>>> A lo que llegamos

La moda y la media son dos medidas que representan el comportamiento de un conjunto de datos. Estas medidas son más útiles cuando el conjunto de valores es muy grande.

>>> Lo que aprendimos

1. En otro horario, Pedro toma un autobús de las líneas A o B y sus tiempos de espera en minutos fueron los siguientes: 9, 4, 6, 5, 6, 15, 6, 6, 6, 6.
   a) ¿Cuál es la moda de este conjunto de datos? ____
   b) ¿Cuál es la media? ____
   c) En esta situación, ¿cuál de las dos medidas, la moda o la media, es más adecuada considerar para representar el tiempo que tarda en pasar un autobús? ____
   ¿Por qué? ____
2. En la secuencia 14, **La TV: ¿Ventana al mundo o "caja idiota"?**, de su libro de *Español I, volumen II* realizaron una encuesta en la que una de las preguntas era: "¿Cuántas horas permanece encendido el televisor de tu casa durante el día?"
   a) Utilicen esa información para calcular el tiempo promedio que permanece encendida la televisión en los hogares de todo tu grupo. ____

Propósito de la pregunta. Se busca que los alumnos, además de calcular las medidas de tendencia central, conozcan algunas de sus características y significados; y que distingan en qué situaciones debe considerarse una u otra para comunicar cómo se comporta la información.

Respuestas.
a) 6 minutos.
b) 6.9 minutos.
c) La moda, porque un autobús excepcionalmente puede tardar mucho (lo que haría que el tiempo promedio de espera se elevara) y no reflejaría que la mayoría de las veces el tiempo de espera es menor.

Integrar al portafolios. Recupere las respuestas de los alumnos a las preguntas de la actividad 1.

b) En esa misma encuesta se pregunta por el tipo de programas que ven. ¿Cuál es el tipo de programa que más ven en el grupo? ______

c) De acuerdo con los resultados de la encuesta, ¿cuántas personas lo ven? ______

______

¿QUÉ PREFIEREN COMER?

SESIÓN 2

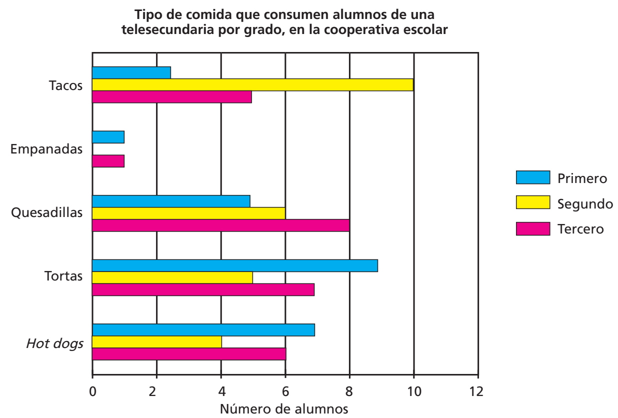
>>> Para empezar

Diariamente, los medios de comunicación proporcionan información en la cual se utiliza el concepto de promedio. Por ejemplo, cuando analizan el comportamiento de: bolsa de valores, precios, producción, empleo y otros indicadores económicos.

Sin embargo, existen situaciones en las que este dato no es el más representativo. Por ejemplo, en una empresa con 1 000 empleados, cada uno gana $ 5 000 y el dueño gana $10 000 000. Si se calcula el promedio del ingreso mensual, ¡resulta que es casi $15 000! Esto daría una idea completamente falsa de los ingresos mensuales que hay en esa empresa, ya que ninguno de los 1 000 empleados tiene un ingreso igual o parecido al promedio. Sería más representativo, en este caso, dejar al dueño fuera del grupo o utilizar otro valor representativo.

>>> Consideremos lo siguiente

En una telesecundaria se tomaron los datos que muestra la siguiente gráfica.



Propósito de la sesión. Interpretar información numérica obtenida en diversas fuentes (encuestas, diarios, almanaques, etc.) utilizando en sus análisis indicadores de medidas de tendencia central, y decidir en qué casos es conveniente usar cada una para analizar la información.

Organización del grupo. El trabajo es en parejas a lo largo de toda la sesión, excepto en la confrontación, que es grupal.

3

Sugerencia didáctica. Pida a los alumnos que piensen en otra situación en la que tomar una de las medidas de tendencia central no da una buena idea del comportamiento de los datos, o incluso da una idea equivocada. Por ejemplo, "Las estadísticas muestran que casi todos los accidentes de circulación se producen entre vehículos que circulan a velocidad moderada. Muy pocos ocurren a más de 110 km por hora". ¿Significa esto que resulta más seguro conducir a gran velocidad?

Respuestas. Tortas, 21 alumnos las consumieron.

Posibles dificultades. Algunos alumnos pueden creer que el alimento que más se consume son tacos, porque en la gráfica tienen la barra más larga. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que cada barra señala la preferencia de un grado por un alimento, así que para saber cuántos alumnos de toda la escuela escogieron cierta comida deben sumarse las frecuencias señaladas en las tres barras.

Respuestas.

a) 5 (tacos, empanadas, quesadillas, tortas y *hot dogs*).
b) 3
c) Tacos.
d) Quesadillas.
e) 25
f) 27
g) 77
h) 21 bolillos.

Con esta información, los responsables de la cooperativa pueden conocer cuántos kilos de tortillas y piezas de bolillo deben comprar al día.

En general, ¿qué tipos de alimentos consumen más los alumnos de esta telesecundaria? ______

Comparen y comenten sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos tipos de comida diferente hay? ______
b) ¿Cuántos alumnos de primer grado consumen tacos? ______
c) ¿Cuál alimento consumen más los alumnos de segundo grado? ______
d) ¿Y los de tercero? ______
e) ¿Cuántos alumnos de segundo grado consumen alimentos en la cooperativa? ______
f) ¿Y en tercero? ______
g) ¿Cuántos alumnos en total consumen alimentos en la cooperativa? ______
h) Considerando la cantidad de alumnos que consumen tortas, ¿cuántos bolillos se deben comprar al día? ______

II. Completen la siguiente tabla con los datos que proporciona la gráfica de barras.

Tipo de comida	Consumo por grado			Total
	Primero	Segundo	Tercero	
Tacos	3	10	5	18
Empanadas	1	0	1	2
Quesadillas	5	6	8	19
Tortas	9	5	7	21
Hot dogs	7	4	6	17

a) ¿Qué tipo de comida piden más los alumnos de la telesecundaria? ______

236

b) ¿Cuántas tortas en promedio se consumen por grado? ______

c) ¿Cuántas quesadillas en promedio se consumen por grado? ______

d) ¿Cuántas empanadas consumen los alumnos de segundo grado? ______

e) ¿Cuántas empanadas en promedio se consumen por grado? ______

>>> A lo que llegamos

Puede ocurrir que el valor que representa la media de un conjunto de datos no sea uno de los valores de ese conjunto.

Por otra parte, es muy común que el valor de la media de un conjunto de valores enteros sea un decimal.

Por ejemplo, en el caso del consumo de *hot dogs*, la media por grado es 5.6

III. En la misma telesecundaria se les preguntó a los 27 alumnos de primer grado la cantidad de dinero que gastaron en la cooperativa. La siguiente tabla muestra los resultados.

Cantidad de dinero que gastan en la cooperativa los alumnos de primer grado									
Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pesos $	10	10	100	10	10	5	0	0	100
Alumno	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Pesos $	0	0	10	0	15	12	100	5	10
Alumno	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Pesos $	15	0	0	5	100	10	10	2	15

a) ¿Cuál es la cantidad de dinero que con más frecuencia gastan los alumnos de primer grado? ______

b) ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad máxima de dinero que gastan los alumnos y la cantidad mínima? ______

c) En la siguiente tabla, ordena de mayor a menor la cantidad de dinero que gastan los alumnos de primer grado.

0	0	0	0	0	0	0	2	5	5	5	10	10	10	10	10	10	10	10	12	15	15	15	100	100	100	100

237

Respuestas.
a) Tortas.
b) 7 tortas.
c) 6.3 quesadillas.
d) Ninguna.
e) $\frac{2}{3}$ o 0.67 redondeando.

Sugerencia didáctica. Pregunte a los alumnos qué significa que el promedio de empanadas que se consumen por grado sea de 0.67.

Respuestas.
a) $10.
b) La mínima es $0, la máxima es $100, la diferencia es 100.
c) $10.

Recuerde que. Cuando se ordena un conjunto de datos para encontrar la mediana y se tienen casos como el siguiente:

4 6 22 28 29 70, no hay un dato que se encuentre justo a la mitad (quedaría entre el 22 y el 28). Lo que se hace en estos casos es sacar el promedio de los dos datos que quedan en medio (25), y el número obtenido se considera la mediana.

Respuestas.

d) 10
f) La moda y la mediana.
g) Los que gastan $100 hacen que el promedio suba mucho. 23 alumnos gastan menos de $15.

d) ¿Cuál es el dato que quedó al centro de la tabla? ______

e) Completen la siguiente tabla sobre lo que gastan los alumnos de primer grado.

Recuerden que:
La mediana corresponde al valor que se encuentra en el centro del conjunto de datos después de ordenarlos de menor a mayor.

Moda	$10
Media	$21.51
Mediana	$10

f) ¿Cuál es la medida que representa mejor la cantidad de dinero que gastan los alumnos de primero? ______

g) ¿Por qué lo consideran así? ______

>>> A lo que llegamos

La media, la moda y la mediana son medidas de tendencia central, de las cuales la más conocida es la media. Sin embargo, debe considerarse que los valores extremos la afectan muy fácilmente. Cuando en un conjunto de valores se da este caso, es conveniente considerar si la moda o la mediana son medidas que representan mejor a ese conjunto.

>>> Lo que aprendimos

1. Una competencia consta de tres etapas. Juan ha jugado dos de las tres etapas.

Resultados de Juan	Primera etapa	Segunda etapa	Tercera etapa
Puntos	62	53	

Para ganar la competencia, Juan debe tener un promedio de 60 puntos.

¿Cuántos puntos necesita ganar en la tercera etapa? ______

Respuesta. 65 puntos porque lleva 115 y necesita un total de 180.

2. En una nueva competencia Juan tiene de promedio 30 puntos. En la primera etapa obtuvo 26 puntos, y en la última logró 20 puntos más que en la primera etapa.

a) ¿Cuántos puntos obtuvo en la segunda etapa? ________________

b) Completen la siguiente tabla.

Resultados de Juan	Primera etapa	Segunda etapa	Tercera etapa
Puntos	26	184	46
		Promedio	30

Respuestas. 18 puntos porque entre la primera y la tercera tiene 72 y necesitó llegar a 90 para obtener un promedio de 30.

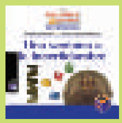
3. Ahora están jugando Juan y María. Ambos tienen el mismo promedio, pero en la primera y tercera etapa obtuvieron puntuaciones diferentes. ¿Cuáles fueron las puntuaciones de Juan? Completen la tabla.

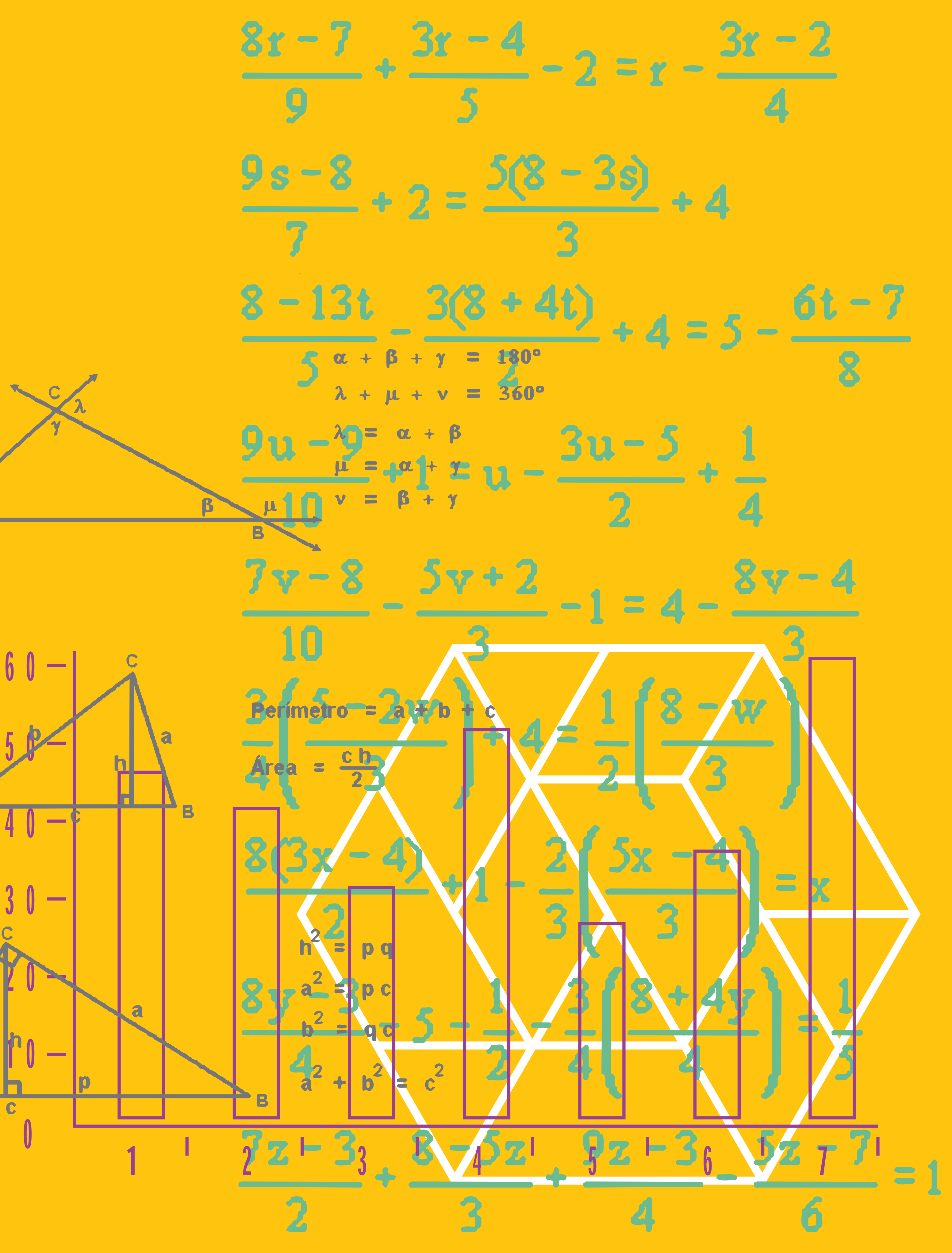
Jugador	Primera etapa	Segunda etapa	Tercera etapa
Juan	26	50	
María		50	55

Posibles respuestas. La pregunta admite una infinidad de respuestas correctas. Para obtener 50 puntos de promedio tiene que sumar 150 puntos en las tres etapas, así que son válidos todos aquellos pares de números que den un total de 150 puntos (incluyendo los 50 que obtuvo en la segunda etapa) y que además, sean distintos de 45 en la primera etapa y 55 en la tercera (porque el problema dice que Juan obtuvo distintas puntuaciones que María).

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Caludia Gómez. *Una ventana a la incertidumbre*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.





$\frac{8r-7}{9}+\frac{3r-4}{5}-2=r-\frac{3r-2}{4}$
$\frac{9s-8}{7}+2=\frac{5(8-3s)}{3}+4$
$\frac{8-13t}{5}-\frac{3(8+4t)}{2}+4=5-\frac{6t-7}{8}$
$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$
$\lambda+\mu+\nu=360^\circ$
$\lambda=\alpha+\beta$
$\mu=\alpha+\gamma$
$\nu=\beta+\gamma$
$\frac{9u-9}{10}+1=u-\frac{3u-5}{2}+\frac{1}{4}$
$\frac{7v-8}{10}-\frac{5v+2}{3}-1=4-\frac{8v-4}{3}$
$\frac{3}{4}\left(\frac{5-2w}{3}\right)+4=\frac{1}{2}\left(\frac{8-w}{3}\right)$
Perímetro = a + b + c
Área = $\frac{c\,h}{2}$
$\frac{8(3x-4)}{2}+1-\frac{2}{3}\left(\frac{5x-4}{3}\right)=x$
$h^2 = p\,q$
$a^2 = p\,c$
$b^2 = q\,c$
$a^2 + b^2 = c^2$
$\frac{7z-3}{2}+\frac{8-5z}{3}+\frac{9z-3}{4}-\frac{5z-7}{6}=1$
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7

PROPUESTA DE EXAMEN BIMESTRAL BLOQUE 3

A continuación se presenta una propuesta para evaluar los bloques 3, 4 y 5 mediante exámenes que serán complementarios a la información que usted ha ido integrando en el portafolios del alumno.

Los exámenes tienen las siguientes características:

Para cada secuencia se proponen entre uno y cuatro reactivos, cada reactivo evalúa un aspecto del contenido que se trató en la secuencia.

Cada examen se arma de la siguiente manera:

Hay dos opciones para cada reactivo, cada una evalúa el mismo contenido y tiene el mismo nivel de dificultad. La intención de poner estas dos opciones es que usted pueda elegir una o la otra y armar así distintas versiones del examen según le convenga. Encontrará todas las respuestas de los reactivos para facilitarte la calificación. Se incluyen, también, las respuestas gráficas.

Recomendaciones generales para la aplicación de los exámenes, su revisión y calificación:

Debido a la longitud de los exámenes, se sugiere aplicar cada uno en dos sesiones de clase, al final de cada bloque. Una vez aplicado, haga una revisión grupal de las soluciones de los reactivos para aclarar dudas y dar oportunidad a que cada alumno haga las correcciones pertinentes de los errores que hubiera cometido.

Se sugiere no asignar más del 50% de la calificación bimestral a los resultados de los exámenes, considere para el otro 50% las actividades que integró en el portafolios y otros aspectos que crea importantes (como la participación, el cumplimiento de tareas, etc).

SECUENCIA 17. DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Reactivo 1

1. Señala la operación que equivale a dividir entre 0.25:

a) Multiplicar por 25.

b) Multiplicar por 4.

c) Dividir entre 25.

d) Dividir entre 4.

La respuesta es el inciso b).

1'. Señala la operación que equivale a dividir entre 0.01:

a) Multiplicar por 0.1.

b) Multiplicar por 100.

c) Dividir entre 10.

d) Dividir entre 0.1.

La respuesta es el inciso b).

Reactivo 2

2. Resuelve estas operaciones:

a) $4.8 \div 1.2$

b) $27 \div 0.03$

Respuestas.
a) 4
b) 900

2'. Resuelve estas operaciones:

a) $100 \div 2.5$

b) $30 \div 0.2$

Respuestas.
a) 40
b) 150

Reactivo 3

3. Daniel fue a la papelería y pagó $75 por varios lápices cuyo costo era de $2.50 cada uno, ¿cuántos lápices compró? Señala la respuesta correcta:

a) 3

b) 30

c) 35

d) 300

La respuesta es el inciso b).

3'. Lucía va a cortar 5.50 m de listón en trozos de 0.25 m cada uno. ¿cuántos trozos obtendrá? Señala la repuesta correcta:

a) 4

b) 20

c) 22

d) 220

La respuesta es el inciso c).

Reactivo 4

4. ¿El área de un terreno rectangular es de 317.75 m^2; si mide 15.50 m de ancho, ¿cuánto mide de largo?

Respuesta. 20.5 m

4'. En un laboratorio se va a repartir por igual 3 ℓ de una sustancia en recipientes de 0.15 ℓ. Si cada recipiente se llena a su capacidad, ¿cuántos recipientes se necesitan?

Respuesta. 20

SECUENCIA 18. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Reactivo 1

1. Plantea una ecuación para resolver el siguiente problema, resuelve la ecuación y comprueba la solución.
Don Lucas ganó $5 750.00 en un negocio y lo repartió entre su familia. La esposa recibió $1 250.00 y el resto fue distribuido equitativamente entre sus 4 hijos. ¿Cuánto dinero recibió cada hijo?

Respuesta. Cada hijo recibió $1125.00
La ecuación puede representarse de varias formas, independientemente de la literal que se use:
$5\,750 - 1\,250 = 4x$
$4x + 1\,250 = 5\,750$
$4x = 4\,500$

1'. Plantea una ecuación para resolver el siguiente problema, resuelve la ecuación y comprueba la solución.
Para cercar un terreno cuadrangular se compraron 60 m de malla ciclónica. ¿Cuanto mide cada lado del terreno si después de cercarlo sobraron 3.72 m de malla?

Respuesta. Cada lado del terreno mide 14.07 m.
La ecuación puede representarse de varias formas, independientemente de la literal que se use:
$4x + 3.72 = 60$
$60 - 3.72 = 4x$
$4x = 56.28$

Reactivo 2

2. Señala el problema que puede resolverse con la ecuación

$$y - 8.4 = 10.25$$

a) Pienso un número, le resto 8.4 y obtengo 10.25. ¿Qué número pensé?

b) Juan llevaba 10.25 ℓ de agua y utilizó 8.4 ℓ.
¿Cuánta agua le queda?

c) ¿Qué número multiplicado por 8.4 es igual a 10.25?

d) Tengo 2 cajas, la primera pesa 10.25 kg y la segunda pesa 8.4 kg menos. ¿Cuánto pesa la segunda caja?

La respuesta es el inciso a).

2'. Señala el problema que puede resolverse con la ecuación

$$y + 2.5 = 6.750$$

a) Doña Lupe regresa del mercado con una bolsa que contiene 6.750 kg de naranjas y 2.5 kg de jitomate ¿Cuánto pesa la bolsa que carga doña Lupe?

b) ¿Qué número multiplicado por 2.5 es igual a 6.750?

c) Pienso un número, le sumo 2.5 y obtengo 6.750. ¿Qué número pensé?

d) Tengo 2 recipientes con agua, el primero contiene 6.750 ℓ y el segundo contiene 2.5 ℓ más. ¿Cuántos litros de agua hay en el segundo recipiente?

La respuesta es el inciso c).

Reactivo 3

3. Subraya las 2 ecuaciones que permiten resolver el siguiente problema: Un corredor va a participar en el maratón de la Ciudad de México, en total va a recorrer 42.195 km. Cuando le faltan 27.5 km para llegar a la meta, ¿qué distancia lleva recorrida?

- $42.195 - x = 27.5$
- $27.5.9x = 42.195$
- $27.5 + 42.195 = x$
- $27.5 + x = 42.195$

Respuesta.
Las dos ecuaciones son:
$42.195 - x = 27.5$
$27.5 + x = 42.195$

3'. Subraya las 2 ecuaciones que permiten resolver el siguiente problema: Un automovilista recorrió 108.5 km de Atlacomulco a la Ciudad de México, pasando por el centro de Toluca. Si del centro de Toluca a la Ciudad de México recorrió 53.9 km, ¿qué distancia recorrió de Atlacomulco al centro de Toluca?

- $108.5 - x = 53.9$
- $53.9x = 108.5$
- $53.9 + x = 108.5$
- $108.5 + 53.9 = x$

Respuesta.
Las dos ecuaciones son:
$108.5 - x = 53.9$
$53.9 + x = 108.5$

Reactivo 4

4. Une, con una línea, cada ecuación con su solución, según corresponda:

$x + 12.5 = 23.2$	$x = 35.7$
$45 - x = 9.3$	$x = 54.3$
$3x + 4.2 = 158.7$	$x = 10.7$
$\frac{x}{5} - 4.5 = 14.8$	$x = 51.5$
	$x = 96.5$

Respuestas.
La solución de la ecuación
$x + 12.5 = 23.2$ es $x = 10.7$
La solución de la ecuación
$45 - x = 9.3$ es $x = 35.7$
La solución de la ecuación
$3x + 4.2 = 158.7$ es $x = 51.5$
La solución de la ecuación
$\frac{x}{5} - 4.5 = 14.8$ es $x = 96.5$

4'. Une, con una línea, cada ecuación con su solución, según corresponda:

$x - 10.5 = 19.8$	$x = 5.5$
$12.5 + x = 18$	$x = 30.5$
$4x - 7.6 = 29.6$	$x = 9.3$
$\frac{x}{5} + 2.3 = 8.4$	$x = 53.5$
	$x = 30.3$

Respuestas.
La solución de la ecuación
$x - 10.5 = 19.8$ es $x = 30.3$
La solución de la ecuación
$12.5 + x = 18$ es $x = 5.5$
La solución de la ecuación
$4x - 7.6 = 29.6$ es $x = 9.3$
La solución de la ecuación
$\frac{x}{5} + 2.3 = 8.4$ es $x = 30.5$

SECUENCIA 19. EXISTENCIA Y UNICIDAD

Reactivo 1

1. Señala la opción que tenga las medidas de los segmentos que forman un triángulo:

a) 9 cm, 3 cm, 2 cm.

b) 1 cm, 1 cm, 5 cm.

c) 2 cm, 2 cm, 3 cm.

d) 7 cm, 8 cm, 17 cm.

La respuesta es el inciso c).

1'. Raúl está usando varitas de diferentes tamaños para tratar de construir un triángulo, señala la opción que tenga las medidas de tres varitas con las que Raúl sí puede construir el triángulo:

a) 7 cm, 7 cm, 14 cm.

b) 2 cm, 6 cm, 9 cm.

c) 5 cm, 3 cm, 3 cm.

d) 9 cm, 4 cm, 14 cm.

La respuesta es el inciso c).

Reactivo 2

2. ¿En cuál de los siguientes casos todas las figuras que se tracen con las condiciones dadas serán idénticas? Señala la respuesta correcta:

a) Rectángulos que midan 5 cm de base.

b) Rombos que midan 6 cm de lado.

c) Rombos que tengan 2 ángulos de 40° y 2 de 140°.

d) Cuadrados que midan 6 cm de lado.

La respuesta es el inciso d).

2'. Bety, Carlos y Daniel trazaron figuras con las siguientes condiciones, ¿en cuál caso todas las figuras que trazaron resultaron idénticas? Señala la respuesta correcta:

a) Rombos cuyos lados midan 4 cm, con 2 ángulos de 50° y 2 de 130°.

La respuesta es el inciso a).

b) Trapecios isósceles cuya base mayor mida 6 cm y la base menor 3 cm.

c) Trapecios rectángulos cuya base mayor mida 5 cm y con una altura de 4 cm.

d) Romboides cuya base mida 9 cm y con una altura de 7 cm.

Respuestas (es suficiente con que el alumno ponga una).
La medida de la altura.
La medida de otro lado.
La medida de un ángulo que no sea el de 90°.

Respuestas (es suficiente con que el alumno ponga una).
La medida de uno de los ángulos y la altura.
La medida de uno de los ángulos y la medida del otro lado.

Respuestas. El perímetro es de 12 cm, el área es de 6 cm².

Respuesta. El perímetro es de 24 cm, el área es de 21 cm².

Reactivo 3

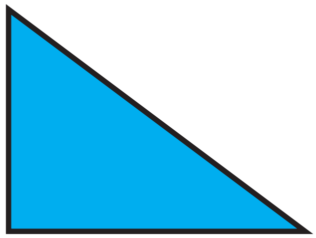
3. Se desea trazar 2 triángulos rectángulos cuya base mida 8 cm, pero hay muchos triángulos diferentes que cumplen con esta condición, ¿qué otro dato se tiene que dar para que los triángulos trazados sean idénticos?

3'. Se desea trazar 2 romboides cuya base mida 8 cm, pero hay muchos romboides diferentes que cumplen con esta condición, ¿qué otros datos se tienen que dar para que los romboides trazados sean idénticos?

SECUENCIA 20. ÁREAS Y PERÍMETROS

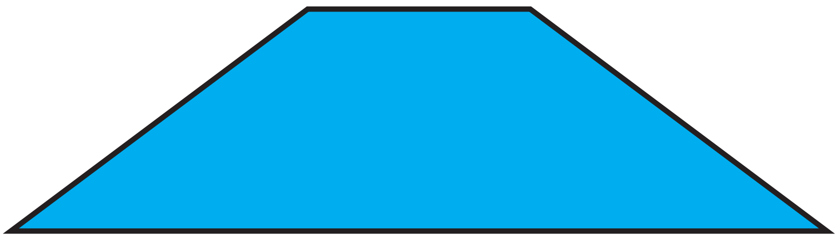
Reactivo 1

1. Toma las medidas necesarias para calcular el perímetro y el área de la siguiente figura:



Perímetro = ________ Área = ________

1'. Toma las medidas necesarias y calcula el perímetro y el área de la siguiente figura.



Perímetro = ________ Área = ________

Reactivo 2

2. En el centro de un pueblo hay un quiosco en forma de hexágono regular. La medida del lado es de 4 cm y el apotema mide 3.4 m.

– Se quiere poner barandal alrededor del quiosco, el herrero cobra $200 el metro de barandal ya colocado. ¿Cuánto le pagarán al herrero por poner el barandal? Señala la respuesta correcta:

a) $2 400.

b) $2 720.

c) $4 800.

d) $8 160.

La respuesta es el inciso c).

– También se desea poner mosaico en el piso. El precio del mosaico es de $250 el metro cuadrado. ¿Qué cantidad de dinero se pagará por el mosaico? Señala la respuesta correcta:

a) $1 700.

b) $6 000.

c) $10 200.

d) $20 400.

La respuesta es el inciso c).

2'. Pedro corre alrededor de un parque de forma cuadrada que mide 60 m de lado.

– Si Pedro diariamente da 10 vueltas al parque, ¿qué distancia corre Pedro todos los días? Señala la respuesta correcta:

a) 240 m.

b) 2 400 m.

c) 24 000 m.

d) 36 000 m.

La respuesta es el inciso b).

– Ese parque tiene algunas áreas verdes con pasto y lo demás es de piso de concreto. Si las áreas verdes cubren 2 500 m^2, ¿qué cantidad de superficie del parque es de piso de concreto? Señala la respuesta correcta:

a) 3 600 m^2.

b) 2 500 m^2.

c) 110 m^2.

d) 1 100 m^2.

La respuesta es el inciso d).

Reactivo 3

La respuesta es el inciso d).

3. Colima tiene una extensión territorial de 545 500 hectáreas, ¿cuál es su superficie en km^2? Señala la respuesta correcta:

a) 5.455 km^2.

b) 54.55 km^2.

c) 545.5 km^2.

d) 5 455 km^2.

La respuesta es el inciso d).

3'. Michoacán tiene una extensión territorial de 5 986 400 ha, ¿cuál es su superficie en km^2? Señala la respuesta correcta

a) 59.864 km^2.

b) 598.64 km^2.

c) 5 986.4 km^2.

d) 59 864 km^2.

SECUENCIA 21. PORCENTAJES

Reactivo 1

Respuestas.

IVA (15%)	Precio del producto con el IVA incluido
30	230
16.5	126.5
187.50	1437.5
51	391

1. Completa la siguiente tabla para calcular el IVA de cada producto y el precio con el IVA incluido:

Producto	Precio (en pesos)	IVA (15%)	Precio del producto con el IVA incluido
Silla	200		
Calculadora	110		
Pizarrón	1 250		
Mesa	340		

Respuestas.

Precio que pagó Pedro
170
128
195
52.5

1'. Pedro fue a una tienda en la que había descuentos y se compró ropa. Completa la siguiente tabla para calcular el precio que pagó por cada cosa:

Producto	Precio (en pesos)	Descuento	Precio que pagó Pedro
Pantalón	200	15%	
Camisa	160	20%	
Chamarra	300	35%	
Playera	70	25%	

Reactivo 2

2. Una tienda puso descuento en algunos de los productos que vende. Completa la siguiente tabla para saber qué porcentaje le corresponde al descuento que tiene el producto.

Producto	Precio (en pesos)	Descuento (en pesos)	Porcentaje correspondiente al descuento
Pantalón	250	50	
Chamarra	380	152	
Zapatos	250	37.50	
Camisa	120	36	

Respuestas.

Porcentaje correspondiente al descuento
20%
40%
15%
30%

2'. Una tienda puso descuento en algunos de los productos que vende. Completa la siguiente tabla para saber qué porcentaje le corresponde al descuento que tiene el producto.

Producto	Precio (en pesos)	Descuento (en pesos)	Porcentaje correspondiente al descuento
Balón	150	30	
Tenis	320	112	
Sudadera	280	84	
Gorra	80	36	

Respuestas.

Porcentaje correspondiente al descuento
20%
35%
30%
45%

Reactivo 3

3. Un campesino cosecha aguacates y vende su cosecha a $1.50 el kilogramo.

a) Si el kilogramo de aguacates se vende con un incremento de 10%, ¿en que precio se vendió?

b) Si el kilogramo de aguacates se vende a $7.50, ¿en qué porcentaje se incrementó el precio?

Respuestas.
a) $1.65.
b) 400%.

3'. Un campesino cosecha jitomates y vende su cosecha a $3.50 el kilogramo.

a) Si el kilogramo de jitomates se vende con un incremento de 20%, ¿en que precio se vendió?

b) Si el kilogramo de jitomates se vende a $14.00, ¿en qué porcentaje se incremento el precio?

Respuestas.
a) $4.20.
b) 300%.

SECUENCIA 22. TABLAS DE FRECUENCIA

Reactivo 1

1. Lee el siguiente texto y contesta lo que se te pide.

> Respecto al consumo de alcohol, se puede decir que aproximadamente dos terceras partes de la población nacional, con edad entre 12 y 65 años, es bebedora, lo cual corresponde aproximadamente a 28 millones de personas, de las que 53% son hombres y 47% mujeres, y para ellas, el grupo de mayor consumo es el de 19 a 25 años y el de 26 a 34 años, es decir, en la cúspide de la etapa productiva.
>
> ... Pasando al caso del consumo de tabaco, se reportó que más o menos 25% de la población entre 12 y 65 años es fumadora, lo cual nos lleva a tener en mente a poco más de 10 millones de sujetos; de éstos, 69% son hombres y el resto son mujeres, o sea 31%. En lo que respecta a la edad de consumo, la mayor parte tiene entre 19 y 44 años, predominando los de entre 26 y 34; sin embargo, debemos poner especial atención a 9% de los fumadores que en números aproximados representan 900 000 personas, que oscilan entre 12 y 18 años. La ocupación de quienes fuman es primordialmente la de empleados, pero destaca que 15% se dedica al hogar.[1]

Utiliza la información anterior para elaborar una tabla que presente las estadísticas sobre el número de personas entre 12 y 65 años que padecen alcoholismo y tabaquismo. Por sexo y total de cada enfermedad.

Respuesta.

Consumo de alcohol y tabaco en la población entre 12 y 65 años. ENA,1993			
Adicción	**Sexo**	**Número de personas**	**Porcentaje**
Alcohol	Hombre	14 840 000	53%
	Mujer	13 160 000	47%
	Total	28 000 000	100%
Tabaco	Hombre	6 900 000	69%
	Mujer	3 100 000	31%
	Total	10 000 000	100%

[1] Esquivo Morales, Carlos, "Lo falso del rito, la verdad del número (Nuestro consumo a través de la Encuesta Nacional de Adicciones)", en *Addictus*, México, año 1, núm. 5, marzo-abril de 1995, pp. 5-8.

SECUENCIA 23. GRÁFICAS DE BARRAS Y CIRCULARES

Reactivo 1

1. Utiliza una gráfica de barras para representar la información de la tabla que construiste en el reactivo de la secuencia 22.

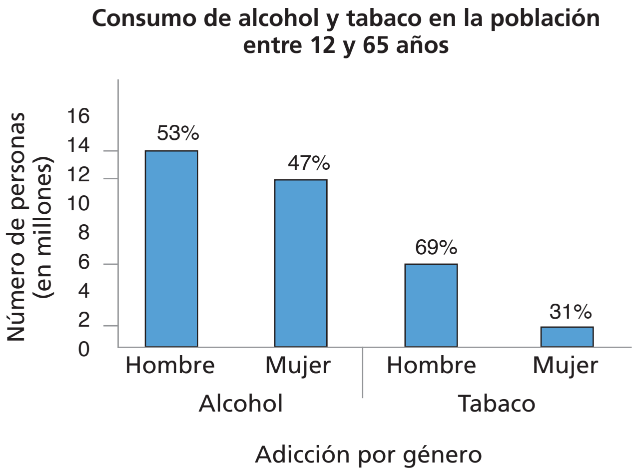
Reactivo 2

2. Lee el siguiente texto y contesta lo que se te pide.

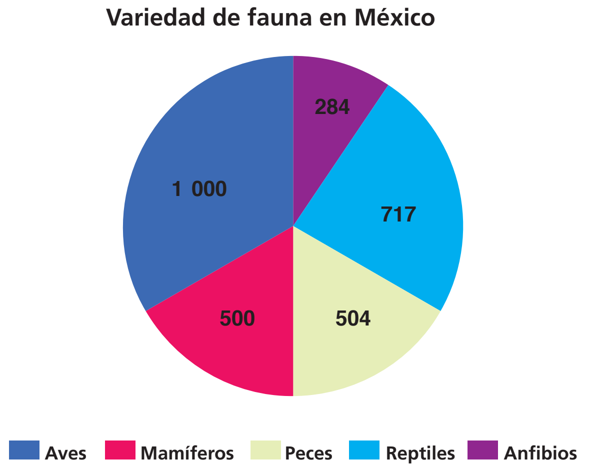
> Nuestro país posee una enorme riqueza natural. Cuenta con una flora y una fauna de las más ricas del mundo. Tiene 45 tipos diferentes de vegetación. Sus hábitats van desde áridos desiertos, en los que prácticamente no hay lluvia, hasta selvas y pantanos, en los que no cesa de llover. Igualmente, está dotado de una diversidad de hábitats, entre los que hay distintas modalidades de bosques, humedales, pastizales, zacatonales alpinos, sabanas, manglares y tulares.
>
> Además, México tiene 1 000 especies de aves, 500 de mamíferos, 504 de peces, 717 de reptiles y 284 de anfibios. Otra característica de la riqueza en flora y fauna es que muchas de las especies que se encuentran en nuestro país sólo existen aquí: el 55% de los reptiles y los anfibios, y el 14% de las plantas superiores.[2]

Elabora una gráfica circular para presentar la variedad de fauna que hay en nuestro país.

Respuesta reactivo 1.



Respuesta reactivo 2.



---

[2] De la Barreda Solórzano, Luis, *Formación cívica y ética*, Ed. Santillana, México, 1999, pág. 175.

SECUENCIA 24. NOCIONES DE PROBABILIDAD

Reactivo 1

1. Completa cada afirmación.

a) Un experimento ____________ es aquel en el que no puede predecirse con certeza el resultado.

Respuesta. Aleatorio.

b) Se llama ____________ al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Respuesta. Espacio muestral.

1'. Completa cada afirmación.

a) Lanzar un dado para ver el número de la cara superior es un experimento ____________

Respuesta. Aleatorio.

b) El número que mide el azar recibe el nombre de ____________

Respuesta. Probabilidad.

Reactivo 2

2. Relaciona ambas columnas anotando en cada paréntesis la letra que corresponda. Las letras pueden repetirse.

EVENTOS		PROBABILIDAD
Si se extrae al azar una canica de una caja que contiene 8 canicas blancas, 3 rojas, 2 negras, 2 amarillas, 1 azul y 4 verdes. ¿Qué probabilidad hay de obtener:		a) $\frac{1}{20}$
( )	canica blanca	b) 10%
( )	canica amarilla	c) 0
( )	canica verde	d) 0.15
( )	canica anaranjada	e) $\frac{1}{5}$
( )	canica roja	f) 0.5
( )	canica negra	g) 40%
( )	canica azul	h) $\frac{8}{12}$

Respuestas.
g) canica blanca
b) canica amarilla
e) canica verde
c) canica anaranjada
d) canica roja
b) canica negra
a) canica azul

2'. Encuentra la probabilidad de los eventos que se piden a continuación

Experimento: En una tómbola fueron colocados 100 anillos, 200 broches, 50 cadenas y 150 pulseras.			
¿Cuál es la probabilidad de obtener:	**Probabilidad en forma de fracción común**	**Probabilidad en forma de decimal**	**Probabilidad en %**
a) un anillo			
b) un broche			
c) una cadena			
d) una pulsera			

Reactivo 3

3. Responde las siguientes preguntas:

a) Si al lanzar al aire una moneda 12 veces, ésta cae con el águila en 4 ocasiones, la probabilidad frecuencial de obtener águila es: ________

Respuesta. $\frac{4}{12}$ (también $\frac{1}{3}$).

b) La probabilidad que se determina a partir de la realización de experimentos recibe el nombre de: ________

Respuesta. Probabilidad frecuencial.

c) Si tienes que adivinar el último dígito de un número, ¿cuál es la probabilidad de que aciertes? ________

Respuesta. $\frac{1}{10}$

3'. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se le llama al tipo de probabilidad que es calculada a partir de la realización de experimentos? ________

Respuesta. Probabilidad frecuencial.

b) ¿Cómo se llama al tipo de probabilidad que se calcula a partir del cociente entre el total de casos favorables y el total de casos posibles? ________

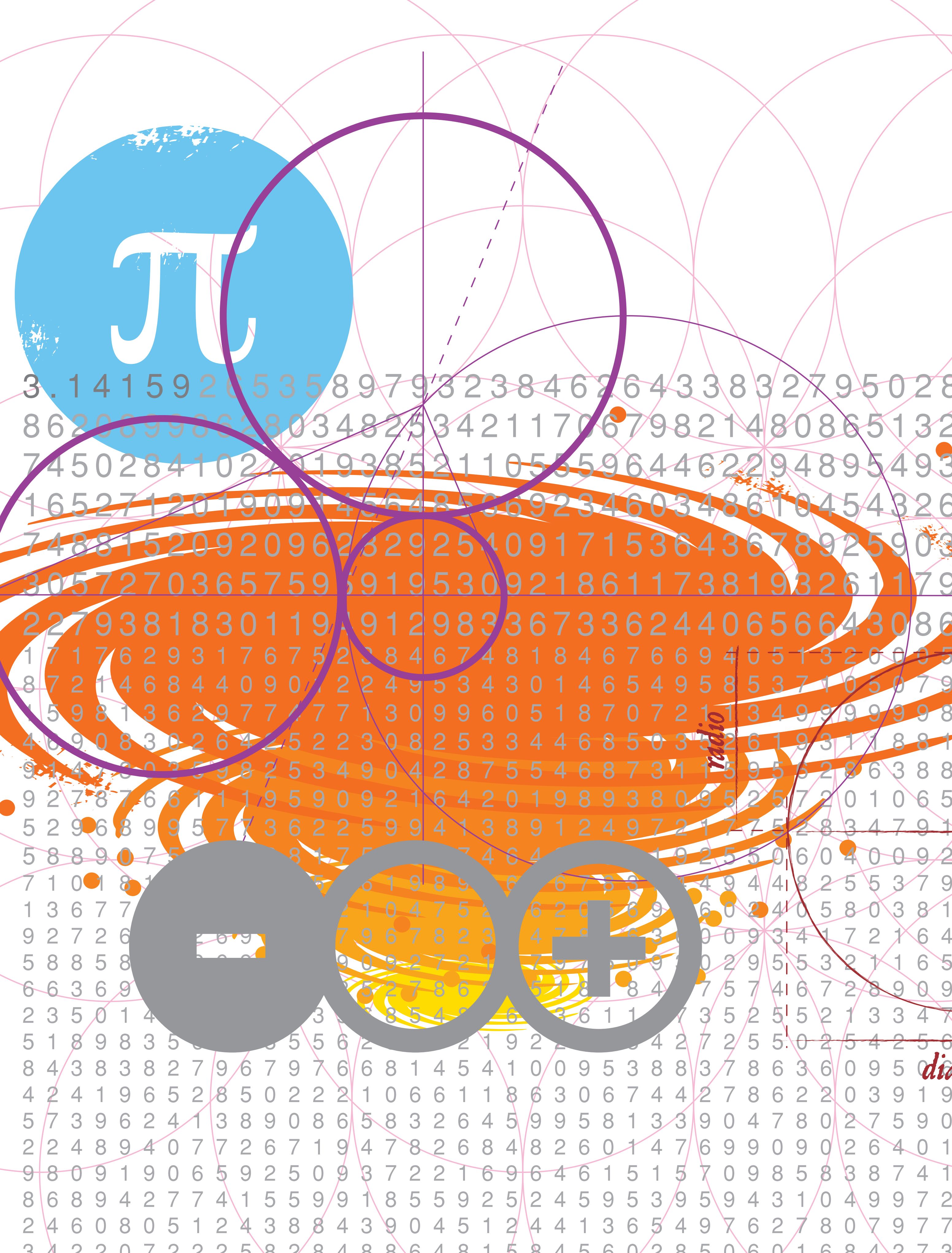
Respuesta. Probabilidad clásica.

c) Si la probabilidad de que un foco nuevo salga defectuoso es del 2%, ¿qué probabilidad hay de que el próximo foco que se elija esté en buenas condiciones? ________

Respuesta. 98%.

Respuestas reactivo 2'(todas las fracciones pueden simplificarse).

Probabilidad en forma de fracción común	**Probabilidad en forma de decimal**	**Probabilidad en %**
$\frac{100}{500}$	0.2	20%
$\frac{200}{500}$	0.4	40%
$\frac{50}{500}$	0.1	10%
$\frac{150}{500}$	0.3	30%


radio

PROPUESTA DE EXAMEN BIMESTRAL BLOQUE 4

SECUENCIA 25. NÚMEROS CON SIGNO

Reactivo 1

1. Dadas las siguientes temperaturas en distintas ciudades de la República Mexicana, realiza lo que se pide:

Ciudad	Estado	Temperatura máxima	Temperatura mínima
Santa Bárbara	DGO	21.0	–7.0
Ajojucar	JAL	29.0	–2.5
Ahuazotepec	PUE	18.5	2.0
La Florida	ZAC	28.5	–3.5

a) Ordena de menor a mayor las temperaturas mínimas.

b) Indica de cuántos grados es la variación de la temperatura en Santa Bárbara.

c) Indica de cuántos grados es la variación de la temperatura en Ahuazotepec.

Respuestas.
a) –7.0, –3.5, –2.5, 2.0
b) 28° C.
c) 16.5° C.

1'. Realiza lo que se pide:

a) Ordena de menor a mayor los siguientes números con signo:

+6.5, –2.0, –7.2, –4.7, +8.0

b) ¿Cuál es la distancia de las siguientes parejas de números con signo?

De +32 a –9

De +29.4 a +6.0

De –15.2 a –3.2

Respuestas.
a) –7.2, –4.7, –2.0, +6.5, +8.0
b) 41
23.4
12

Reactivo 2

2. Escribe el simétrico o el valor absoluto de los siguientes números con signo, según corresponda:

a) El simétrico de –36.5

b) El simétrico de $+\frac{2}{9}$

c) $|+14.6|$

d) $|-\frac{3}{7}|$

Respuestas.
a) 36.5
b) $-\frac{2}{9}$
c) 14.6
d) $\frac{3}{7}$

Respuestas.

El simétrico de −23.5 es 23.5

34.8

El simétrico de $+\frac{5}{13}$ es $-\frac{5}{13}$

$\frac{5}{13}$

El simétrico de −34.8 es 34.8

2'. Relaciona las dos columnas para encontrar el simétrico o el valor absoluto de los siguientes números con signo, según corresponda:

El simétrico de −23.5	$-\frac{5}{13}$
$\lvert+34.8\rvert$	−23.5
El simétrico de $+\frac{5}{13}$	−34.8
$\lvert-\frac{5}{13}\rvert$	34.8
El simétrico de −34.8	$\frac{5}{13}$
	23.5

SECUENCIA 26. RAÍZ CUADRADA Y POTENCIAS

Reactivo 1

Respuesta. 6.164

1. Encuentra una aproximación con 3 cifras decimales a la raíz cuadrada de 38. Indica los pasos que realizaste.

Respuesta. 6.557

1'. Encuentra una aproximación con 3 cifras decimales a la raíz cuadrada de 43. Indica los pasos que realizaste.

Reactivo 2

2. Un cuadrado tiene un área de 0.64 cm². Indica la longitud de sus lados:

a) 0.08 cm.

b) 0.8 cm.

c) 0.16 cm.

d) 8 cm.

La respuesta es el inciso b).

2'. Un cuadrado tiene un área de 0.36 cm². Indica la longitud de sus lados:

a) 0.06 cm.

b) 0.6 cm.

c) 0.9 cm.

d) 6 cm.

La respuesta es el inciso b).

Reactivo 3

Respuestas.

(e) 4

(f) 8

( ) 18

(c) 6

(b) 16

(d) 2

(a) 216

3. Relaciona las columnas:

(a) Tercera potencia de 6	( ) 4
(b) Cuarta potencia de 2	( ) 8
(c) ¿A cuánto es igual $\sqrt{36}$?	( ) 18
(d) ¿Cuál es la raíz cuarta de 16?	( ) 6
(e) Raíz cúbica de 64	( ) 16
(f) El exponente en 216^8	( ) 2
	( ) 216

3'. Relaciona las columnas:

(a) ¿Cuánto es 5 al cuadrado?	( ) 50
(b) Raíz cuadrada de 100	( ) 3
(c) ¿A cuánto es igual $\sqrt{25}$?	( ) 10
(d) ¿Cuál es la raíz cúbica de 27?	( ) 5
(e) Tercera potencia de 3	( ) 9
(f) La base en 9^{50}	( ) 27
	( ) 25

Respuestas.

( ) 50

(d) 3

(b) 10

(c) 5

(f) 9

(e) 27

(a) 25

SECUENCIA 27. RELACIÓN FUNCIONAL

Reactivo 1

1. Completa la siguiente tabla usando la relación $y = 4x + 5$

x	y
2	
5	
7	
10	
12	

Respuestas.

y
13
25
33
45
53

1'. Indica cuál de las expresiones del lado izquierdo fue usada para llenar la tabla del lado derecho

a) $y = 4x + 14$
b) $y = 3x + 24$
c) $y = 5x + 4$
d) $y = 7x - 16$

x	y
10	54
12	64
13	69

La respuesta es el inciso c).

Reactivo 2

2. Una compañía de autobuses ofrece en renta una de sus unidades con la siguiente tarifa:

2 000 pesos de renta más 10 pesos por cada kilómetro recorrido.

Si denotamos con d a la distancia recorrida por el autobus y con p al precio que cobrará la compañía. ¿Cuál de las siguientes expresiones sirve para calcular p a partir de d?

a) $p = 10d + 2000$

b) $p = 10d$

c) $p = 2000d + 10$

d) $p = 2000d$

La respuesta es el inciso a).

2'. Una alberca de 200 ℓ se encuentra a medio llenar. Se abre una llave que vierte 12 ℓ por minuto. Llamemos ***a*** a la cantidad en litros que tiene la alberca y ***t*** al tiempo en minutos que ha transcurrido desde que se abrió la llave. Escribe una expresión que sirva para calcular la cantidad de litros (***a***) que tiene la alberca cuando ha pasado algún tiempo (***t***) desde que se abrió la llave.

a) $a = 12t$

b) $a = t + 100$

c) $a = 12t + 100$

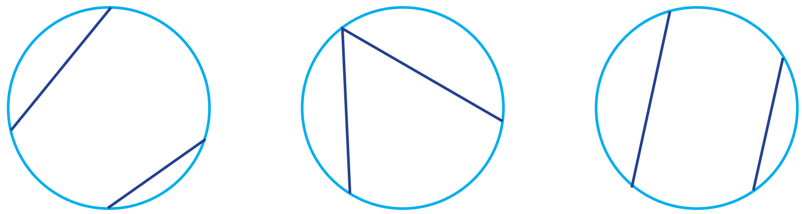
d) $a = 12t + 200$

La respuesta es el inciso c).

SECUENCIA 28. CONSTRUCCIÓN DE CÍRCULOS Y CIRCUNFERENCIAS

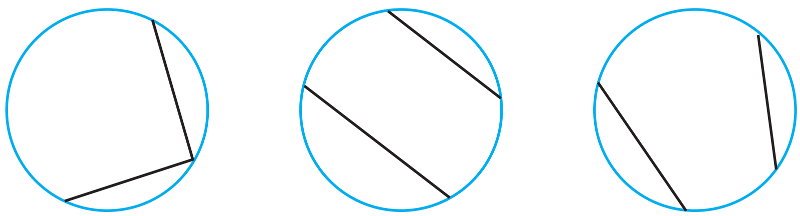
Reactivo 1

1. Encuentra el centro de las siguientes circunferencias:



Caso 1 **Caso 2** **Caso 3**

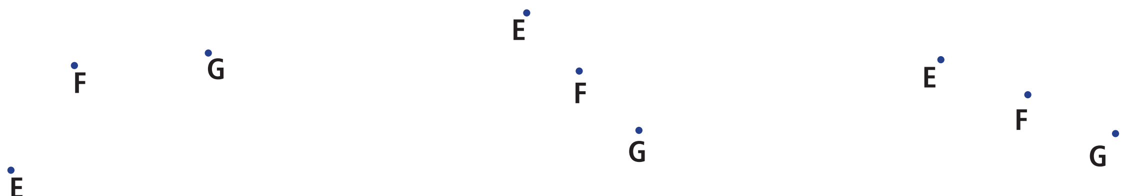
1'. Encuentra el centro de las siguientes circunferencias.



Caso 1 **Caso 2** **Caso 3**

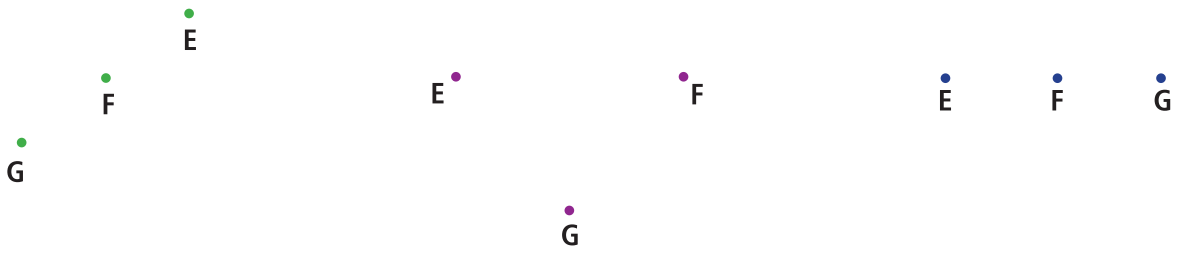
Reactivo 2

2. Indica en cuál de los siguientes casos es posible trazar una circunferencia que pase por los puntos E, F y G. Traza la circunferencia.



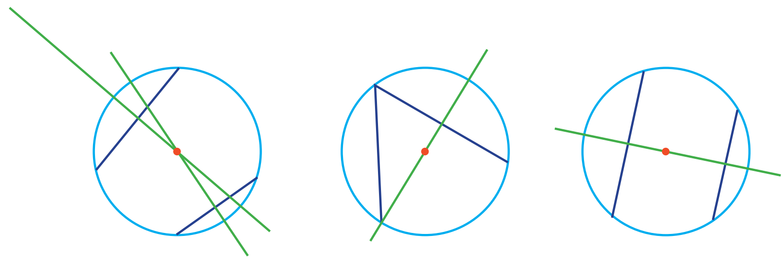
Caso 1 **Caso 2** **Caso 3**

2'. Indica en cuál de los siguientes casos es posible trazar una circunferencia que pase por los puntos E, F y G. Traza la circunferencia.



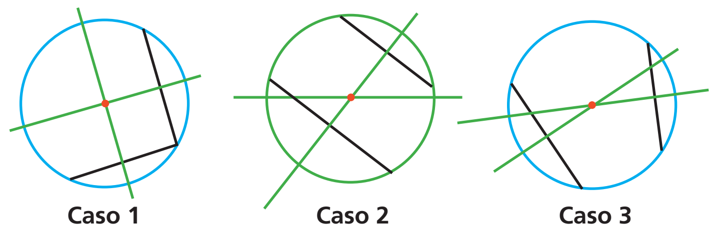
Caso 1 **Caso 2** **Caso 3**

Respuesta reactivo 1.



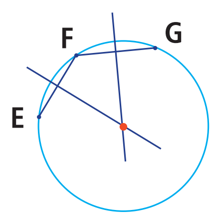
Caso 1 **Caso 2** **Caso 3**

Respuesta reactivo 1'.



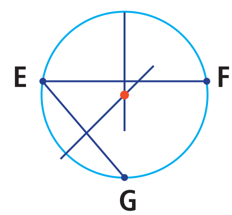
Caso 1 **Caso 2** **Caso 3**

Respuesta reactivo 2.



Caso 1

Respuesta 2'.



Caso 2

SECUENCIA 29. EL NÚMERO PI

Reactivo 1

Respuesta. 141.37 mm.

1. Se tienen dos circunferencias. La primera de ellas mide 15 mm de diámetro. Si el perímetro de la segunda es tres veces el perímetro de la primera, ¿cuánto mide el perímetro de la segunda circunferencia?

La respuesta es el inciso d).

1'. En un triciclo el diámetro de las ruedas traseras mide la tercera parte del diámetro de la rueda delantera. ¿Cuántas vueltas dan las ruedas traseras si la delantera da 30 vueltas?

a) 3 vueltas

b) 10 vueltas

c) 30 vueltas

d) 90 vueltas

Reactivo 2

Respuesta. 7 874 vueltas.

2. ¿Cuántas vueltas deben dar cada una de las ruedas de una bicicleta de rodada 10 (su diámetro es de 25.4 cm) para avanzar 2 kilómetros?

Respuesta. 18.84 cm.

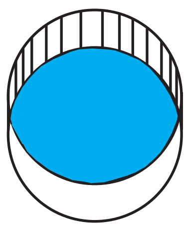
2'. ¿Cuánto debe medir de largo una etiqueta de forma rectangular para ponerla alrededor de una botella, como se muestra en la ilustración, si el diámetro de la botella es de 6 cm?

SECUENCIA 30. EL ÁREA DE LOS CÍRCULOS

Reactivo 1

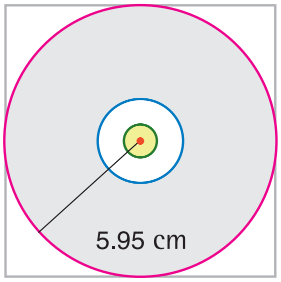
Respuesta. 7.22 cm.

1. ¿Cuánto mide el perímetro de una tapa, como la de la ilustración, si su radio mide 1.15 cm?



1'. La siguiente imagen es una reproducción de un disco compacto, ¿cuánto mide la franja roja (perímetro) si el radio mide 5.95 cm?

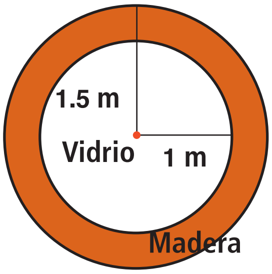
Respuesta. 37.38 cm.



Reactivo 2

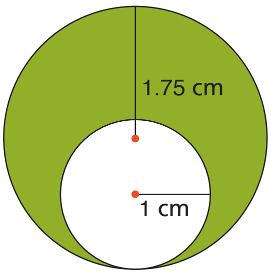
2. ¿Qué cantidad de madera (área de la corona circular) se necesita para construir una mesa circular como la de la ilustración ?

Respuesta. 3.92 m².



2'. ¿Cuál es el área de la región verde de la siguiente figura?

Respuesta. 6.47 cm².



SECUENCIA 31. RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD

Reactivo 1

1. Un automóvil recorre 60 kilómetros con 4 litros de gasolina. Si llamamos x a la cantidad de litros de gasolina que consume el automóvil y llamamos y a la cantidad de kilómetros que recorre con esa gasolina, señala cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite saber la distancia recorrida por el automóvil a partir de los litros de gasolina consumidos:

a) $y = 60x$

b) $x = 15y$

c) $y = 15x$

d) $x = 60y$

La respuesta es el inciso c).

La respuesta es el inciso a).

1'. Un automóvil recorre 100 kilómetros con 5 litros de gasolina. Si llamamos ***x*** a la cantidad de litros de gasolina que consume el automóvil y llamamos ***y*** a la cantidad de kilómetros que recorre con esa gasolina, señala cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite saber la distancia recorrida por el automóvil a partir de los litros de gasolina consumidos :

a) $y = 20x$

b) $x = 100y$

c) $y = 100x$

d) $x = 20y$

Reactivo 2

Respuestas.
Cloroplasto 1 320.
Glóbulo rojo 1 440.
Expresión algebraica $y = 120x$.

2. En la siguiente tabla de variación proporcional se presenta el tamaño real de unas células y su tamaño al verlas utilizando un microscopio óptico. Completa la tabla y encuentra la expresión algebraica que permite saber el tamaño final de las células.

	Tamaño real (micras)	Tamaño final (micras)
Bacteria 1	3	360
Espermatozoide humano	8	960
Cloroplasto	11	
Glóbulo rojo	12	

Expresión algebraica: ____________________

Respuestas.
Cloroplasto 1 650.
Glóbulo rojo 1 800.
Expresión algebraica: $y = 150x$.

2'. En la siguiente tabla de variación proporcional se presenta el tamaño real de las células y su tamaño al verlas utilizando un microscopio óptico. Completa la tabla y encuentra la expresión algebraica que permite saber el tamaño final de las células.

	Tamaño real (micras)	Tamaño final (micras)
Bacteria 1	3	450
Espermatozoide humano	8	1 200
Cloroplasto	11	
Glóbulo rojo	12	

Expresión algebraica: ____________________

SECUENCIA 32. GRÁFICAS ASOCIADAS A SITUACIONES PROPORCIONALES

Reactivo 1

1. La expresión algebraica $y = 2x$ está asociada a una situación de proporcionalidad. Responde las siguientes preguntas.

a) Si $x = 0$, ¿cuánto vale y?

b) Si $x = 5$, ¿cuánto vale y?

c) Si $x = 8$, ¿cuánto vale y?

d) ¿Para qué valor de x se tiene que y vale 1?

e) Dibuja una gráfica asociada a la expresión algebraica anterior.

Respuestas.
a) $y = 0$
b) $y = 10$
c) $y = 16$
d) Para $x = \frac{1}{2}$

1'. La expresión algebraica $y = 4x$ está asociada a una situación de proporcionalidad. Responde las siguientes preguntas.

a) Si $x = 0$, ¿cuánto vale la y?

b) Si $x = 5$, ¿cuánto vale y?

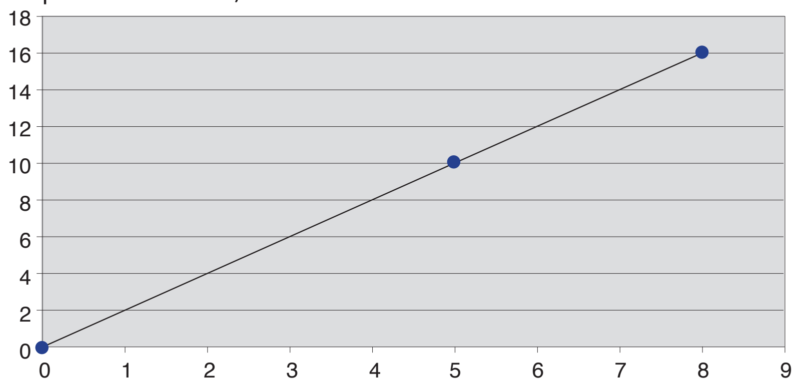
c) Si $x = 8$, ¿cuánto vale y?

d) Para qué valor de x se tiene que y vale 1.

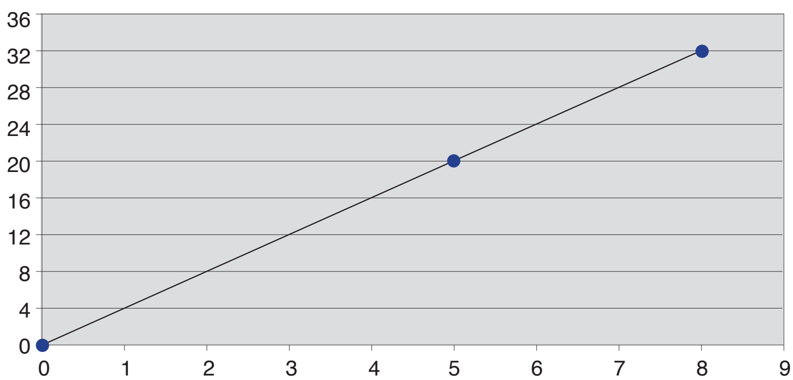
e) Dibuja una gráfica asociada a la expresión algebraica anterior.

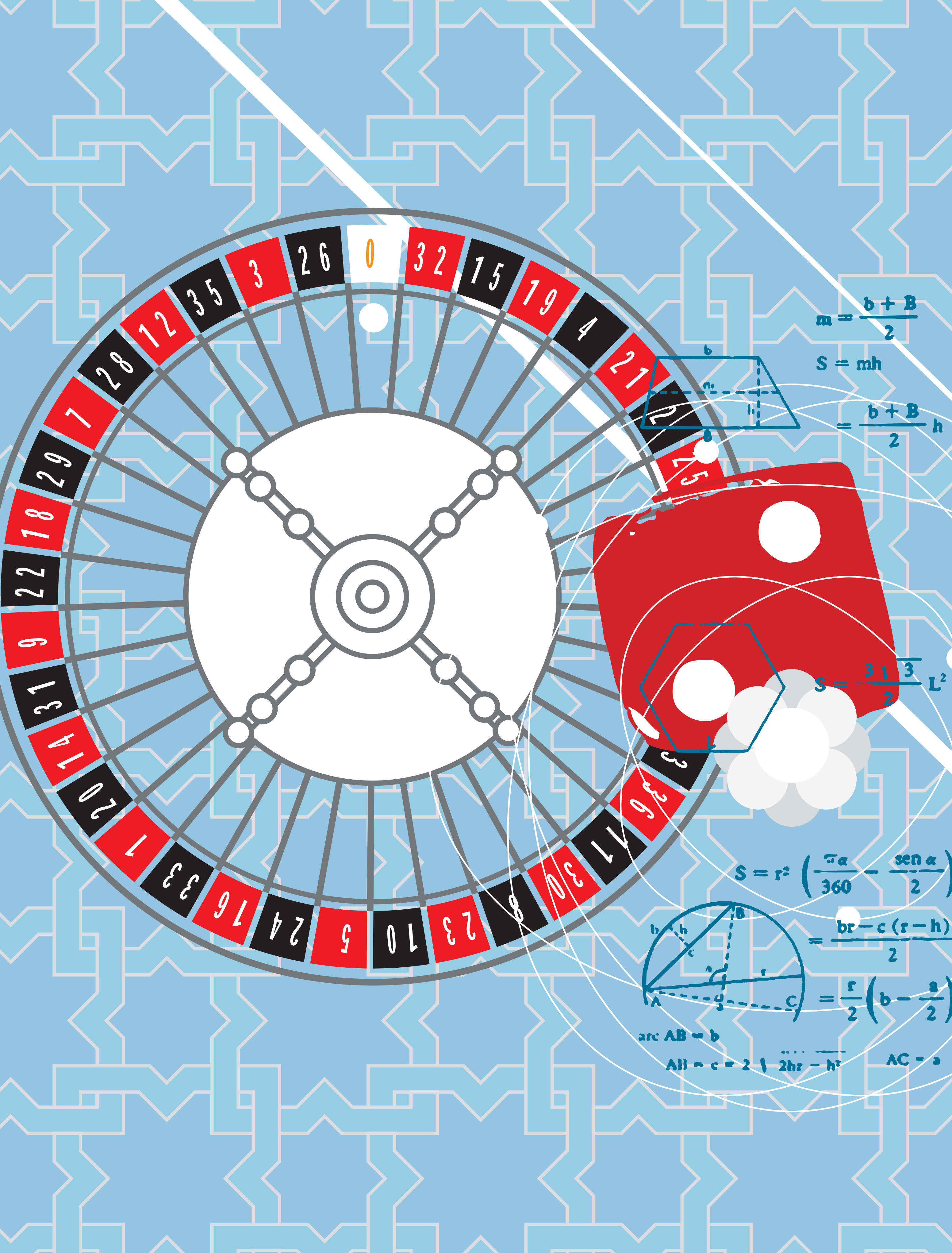
Respuestas.
a) $y = 0$
b) $y = 20$
c) $y = 32$
d) Para $x = \frac{1}{4}$

Respuesta reactivo 1 e).



Respuesta reactivo 1' e).




m = (b + B)/2
S = mh
= (b + B)/2 h
S = r² (πα/360 − sen α/2)
= br − c (r − h)/2
arc AB = b
AC = a

PROPUESTA DE EXAMEN BIMESTRAL BLOQUE 5

SECUENCIA 33. CUENTAS DE NÚMEROS CON SIGNO

Reactivo 1

1. Un buzo se encuentra a 10 m bajo el nivel del mar y hace 2 inmersiones más, en la primera baja 5 m y en la segunda 8 m, ¿a cuántos metros se encuentra al final?

Respuesta. 23 m bajo el nivel del mar.

1'. Un pez volador se encuentra a 1 m bajo el nivel del mar y da un salto de 2 m, ¿qué altura alcanzó sobre el nivel del mar?

Respuesta. 1 m sobre el nivel del mar.

Reactivo 2

2. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $(+10) + (-17) =$ ______

b) $(-39) + (+65) =$ ______

c) $(-17) + (+17) =$ ______

d) $(-23) + (-9) =$ ______

e) $(-7.5) + (+11.3) =$ ______

f) $(+\frac{2}{3}) + (-\frac{7}{5}) =$ ______

Respuestas.

a) -7

b) 26

c) 0

d) -32

e) 3.8

f) $-\frac{11}{15}$

2'. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $(+18) + (-26) =$ ______

b) $(-45) + (+81) =$ ______

c) $(-24) + (+24) =$ ______

d) $(-7) + (-39) =$ ______

e) $(+14.7) + (-8.9) =$ ______

f) $(-\frac{7}{3}) + (+\frac{2}{5}) =$ ______

Respuestas.

a) -8

b) 36

c) 0

d) -46

e) 5.8

f) $-\frac{29}{15}$

Reactivo 3

3. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $(+4) - (-8) =$ ______

b) $(-20) - (+35) =$ ______

c) $(-17) - (+17) =$ ______

d) $(-120) - (-183) =$ ______

e) $(+\frac{8}{15}) - (-\frac{4}{3}) =$ ______

f) $(-6.75) - (-3.04) =$ ______

Respuestas.

a) 12

b) -55

c) -34

d) 63

e) $\frac{28}{15}$

f) -3.71

Respuestas.

a) 19

b) −104

c) −50

d) 26

e) $\frac{39}{12}$

f) −3.22

3'. Resuelve las siguientes operaciones:

a) (+7) − (−12) = ______________________________

b) (−30) − (+74) = ______________________________

c) (−25) − (+25) = ______________________________

d) (−170) − (−196) = ____________________________

e) $(+\frac{7}{12}) - (-\frac{8}{3}) =$ ______________________________

a) (−4.25) − (−1.03) = ___________________________

Reactivo 4

4. Completa la siguiente tabla que reporta el balance de una tienda a lo largo de 4 meses de trabajo. El saldo por mes es la diferencia entre las ganancias y los gastos.

Respuestas..
Enero 1 380
Febrero – 720.02
Marzo 4 030.35
Abril 3 284

Balance de una tienda de abarrotes

	Ganancias (pesos)	Gastos (pesos)	Saldo (pesos)
Enero	9 800.15	8 420.15	
Febrero	7 230.36	7 950.38	
Marzo	1 480.15		– 2 550.20
Abril		5 000.30	– 1 716.30

4'. Completa la siguiente tabla que reporta el balance de una tienda a lo largo de 4 meses de trabajo. El saldo por mes es la diferencia entre las ganancias y los gastos.

Respuestas.
Enero 1 490
Febrero – 460.02
Marzo – 5 395.50
Abril 3 087.65

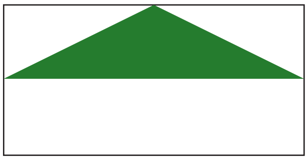
Balance de una tienda de abarrotes

	Ganancias (pesos)	Gastos (pesos)	Saldo (pesos)
Enero	8 900.75	7 410.75	
Febrero	6 890.88	7 350.90	
Marzo	1 643.00		– 3 750.50
Abril		4 200.85	– 1 113.20

SECUENCIA 34. ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Reactivo 1

1. Calcula el área del triángulo verde



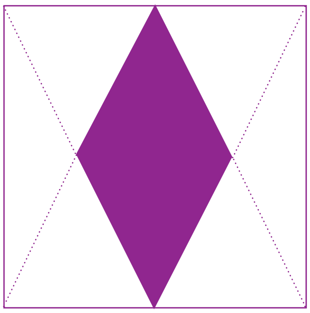
Área = ____________

Respuesta. 2 cm^2 .

Explica cómo la calculaste: ____________________________________.

____

1'. Calcula el área del rombo morado



Área = ____________

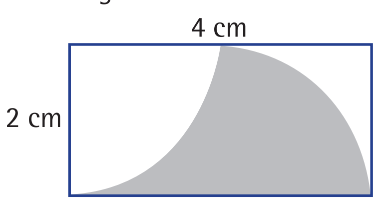
Respuesta. 4 cm^2.

Explica cómo la calculaste: ____________________________________

____

Reactivo 2

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?



a) El área de la región sombreada es igual al área del cuadrado de lado 2 cm.

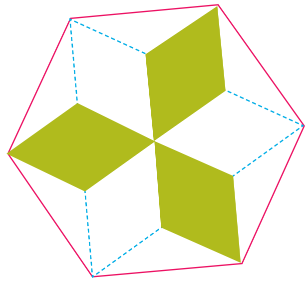
b) El área de la región sombreada es un cuarto del área del círculo de radio 2 cm.

c) El área de la región sombreada es la mitad del área del rectángulo.

d) El área del rectángulo es un tercio mayor que el área de la región sombreada.

Las respuestas son son el inciso a) y el inciso c).

2'. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?



Las respuestas son el inciso b) y el inciso d).

a) El área de la flor verde es mayor que el área del hexágono regular rojo.

b) El área del hexágono regular rojo es el triple del área de la flor verde.

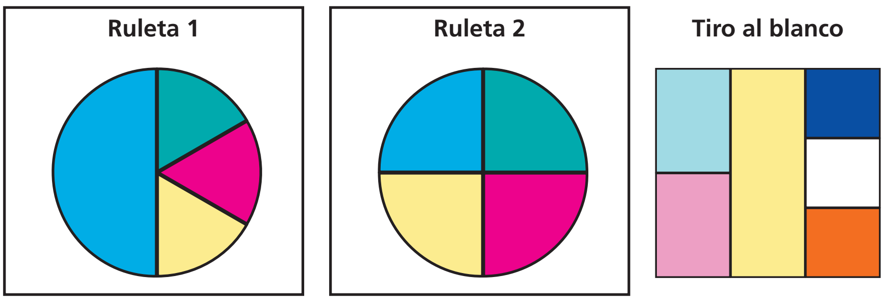
c) El área de la flor verde es la mitad del área del hexágono regular rojo.

d) El área del hexágono regular rojo es mayor que el área de la flor verde.

SECUENCIA 35. JUEGOS EQUITATIVOS

Reactivo 1

1. Dos amigos quieren jugar uno de los siguientes juegos de azar.



Obtienen un premio si:

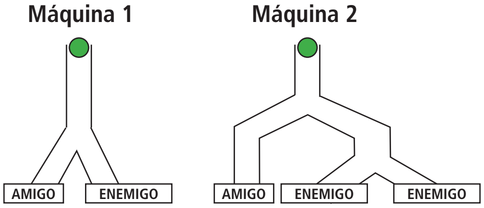
- La ruleta elegida se para en la zona amarilla
- El dardo cae en la zona amarilla

a) ¿En cuál es menos probable ganar?

b) Si fueras el dueño de los juegos, ¿cuál quitarías? ¿Por qué?

Respuestas.
a) En la ruleta 1.
b) El tiro al blanco, porque en ese es más probable que gane el concursante.

1'. En una feria hay un juego que tiene las siguientes máquinas con canicas. Ganas un premio si la canica cae en la salida que dice AMIGO.



a) ¿En qué máquina jugarías?

b) Si utilizas la máquina 1, ¿cuál es la probabilidad de ganar?

c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la máquina 2?

Respuestas.
a) Es lo mismo.
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}$

Reactivo 2

2. En una urna hay canicas numeradas del 0 al 99. Considera los siguientes 5 eventos:
Que la canica,

a) Tenga dos dígitos iguales.

b) Tenga una sola cifra.

c) Sea mayor que 50.

d) Termine en cifra par.

e) Termine en 5.

Responde las preguntas:

i) ¿Qué eventos son equivalentes?

ii) ¿Qué evento tiene mayor probabilidad de ocurrir?

iii) ¿Qué evento es el menos probable de ocurrir?

Respuestas.
i) Son equivalentes el b) con el e).
ii) El d).
iii) El a).

2'. En un juego con dos dados se propusieron las siguientes reglas:

- Debe haber dos jugadores, el jugador A y el B.
- Lanzar los dados al mismo tiempo.
- Calcular la diferencia de puntos entre el mayor y el menor. Por ejemplo
- Si resulta una diferencia entre 0, 1 o 2, entonces gana el jugador A.
- Si resulta una diferencia entre 3, 4 o 5, entonces gana el jugador B.

  a) ¿Cuántos resultados posibles existen al lanzar 2 dados?

  b) ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador A gane el juego?

  c) ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador B gane el juego?

  d) ¿Este juego es equitativo? Explica por qué.

Respuestas.
a) 36
b) $\frac{24}{36}$
c) $\frac{12}{36}$
d) No. Los jugadores no tienen la misma probabilidad de ganar.

SECUENCIA 36. GRÁFICAS, TABLAS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Reactivo 1

1. ¿Cuál de las siguientes situaciones tiene asociada la expresión algebraica $y = 4x$?:

La respuesta es el inciso a).

a) El tipo de cambio de francos franceses a quetzales guatemaltecos, si por cada franco francés se obtienen cuatro quetzales guatemaltecos.

b) Las edades de Lupe y Carlos si se sabe que cuando Lupe cumpla 16 años, tendrá 4 veces la edad de Carlos.

c) El costo de cierto número de llamadas si cada 4 llamadas cuestan 4 pesos.

d) Ana compró 3 caramelos y le costaron 4 pesos.

1'. ¿Cuál de las siguientes situaciones tiene asociada la expresión algebraica $y = 6x$?:

a) El tipo de cambio de dólares americanos a pesos argentinos, si por cada 2 dólares americanos se obtienen 6 pesos argentinos.

b) Las edades de Lupe y Carlos si se sabe que cuando Lupe cumpla 24 años tendrá seis veces la edad de Carlos.

La respuesta es el inciso c).

c) El costo de cierto número de llamadas si cada llamada cuesta 6 pesos.

d) Ana compró 6 caramelos y le costaron 6 pesos.

Reactivo 2

2. a) Completa las siguientes tablas y gráficas para establecer cuál de las 2 situaciones es de proporcionalidad directa.

Respuesta.

y (cantidad de quetzales guatemaltecos)
4
8
20
40
48

v (edad de Carlos)
4
3
2
1
0

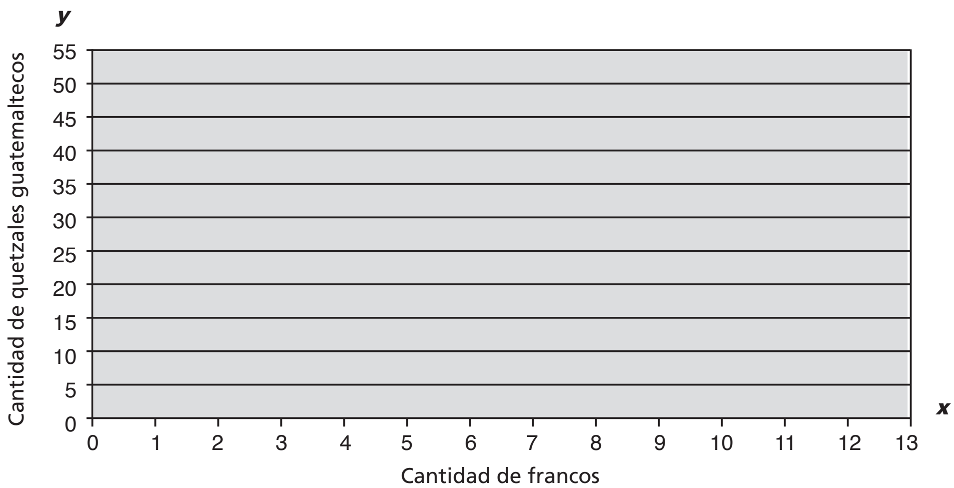
x (cantidad de francos)	*y* (cantidad de quetzales guatemaltecos)
1	4
2	
5	
10	
12	

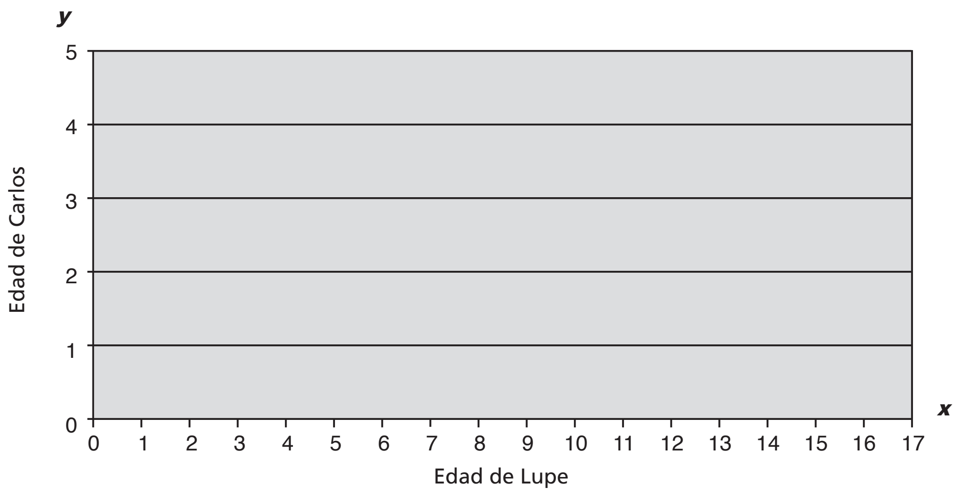
Tabla 1

u (edad de Lupe)	*v* (edad de Carlos)
16	4
15	
14	
13	
12	

Tabla 2

b) Con los datos de las tablas anteriores completa las siguientes gráficas.





c) ¿Cuál de las 2 situaciones anteriores es de proporcionalidad directa?

Respuesta. La de francos franceses y quetzales guatemaltecos.

Respuesta.

y (cantidad de pesos argentinos)	*v* (edad de Carlos)
6	4
12	3
30	2
60	1
72	0

2'. a) Completa las siguientes tablas y gráficas para establecer cuál de las 2 situaciones es de proporcionalidad directa.

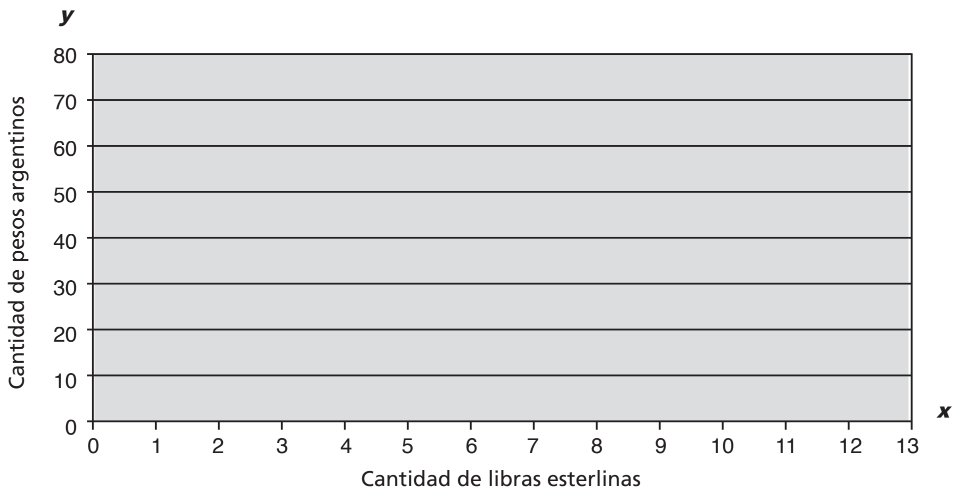
x (cantidad de libras esterlinas)	*y* (cantidad de pesos argentinos)
1	6
2	
5	
10	
12	

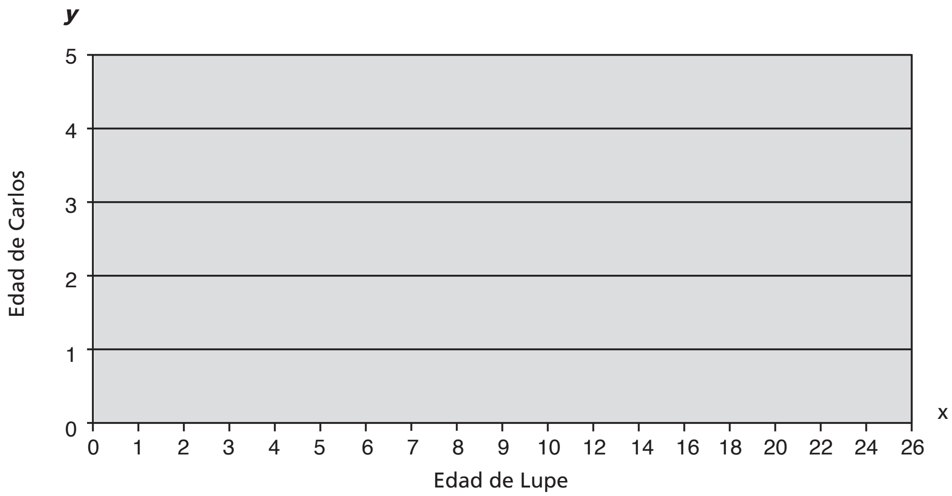
Tabla 1

u (edad de Lupe)	*v* (edad de Carlos)
24	4
23	
22	
21	
20	

Tabla 2

b) Con los datos de las tablas anteriores completa las siguientes gráficas:

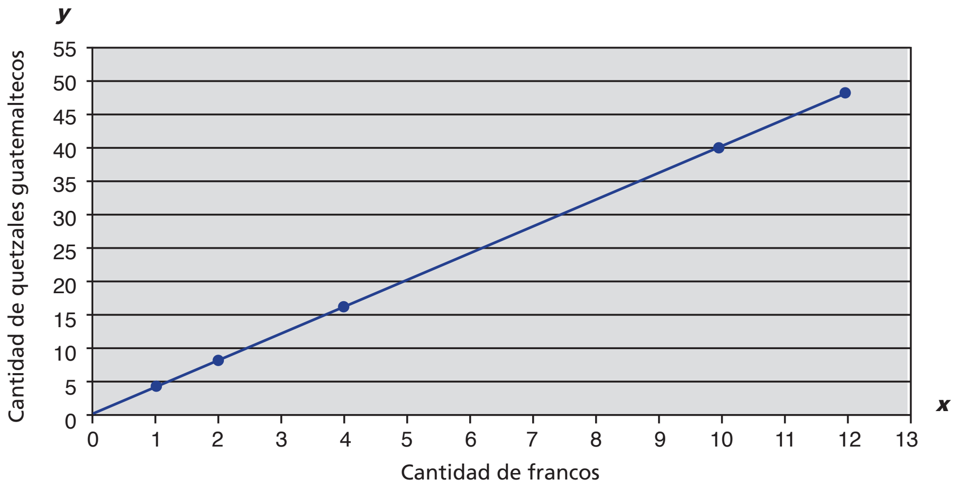


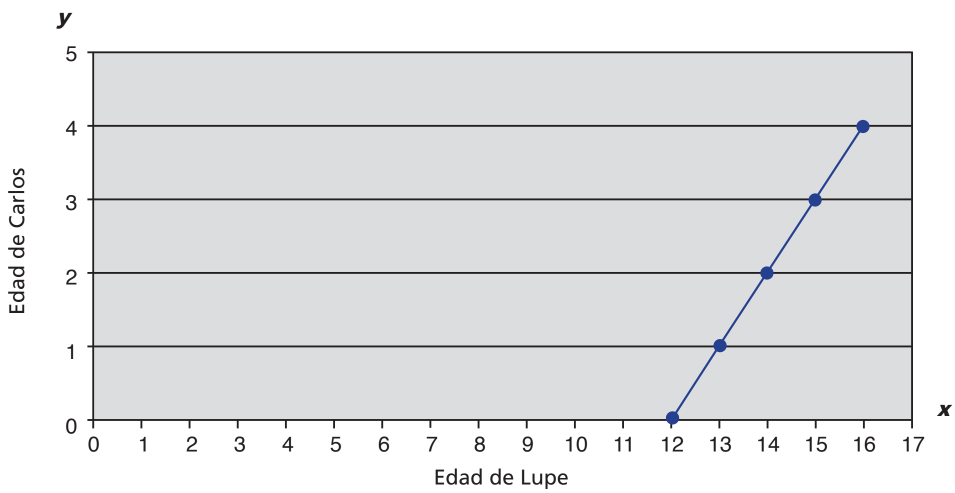


Respuesta. La de libras esterlinas y pesos argentinos.

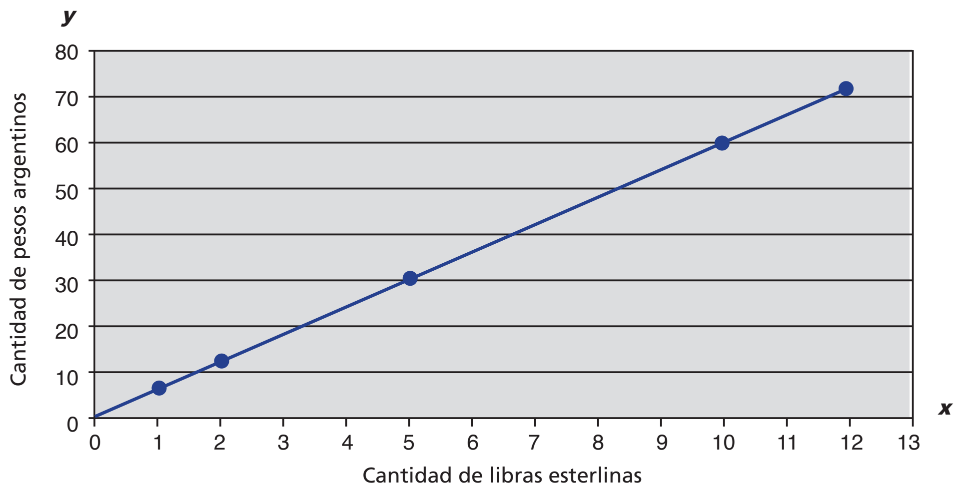
c) ¿Cuál de las dos situaciones anteriores es de proporcionalidad directa?

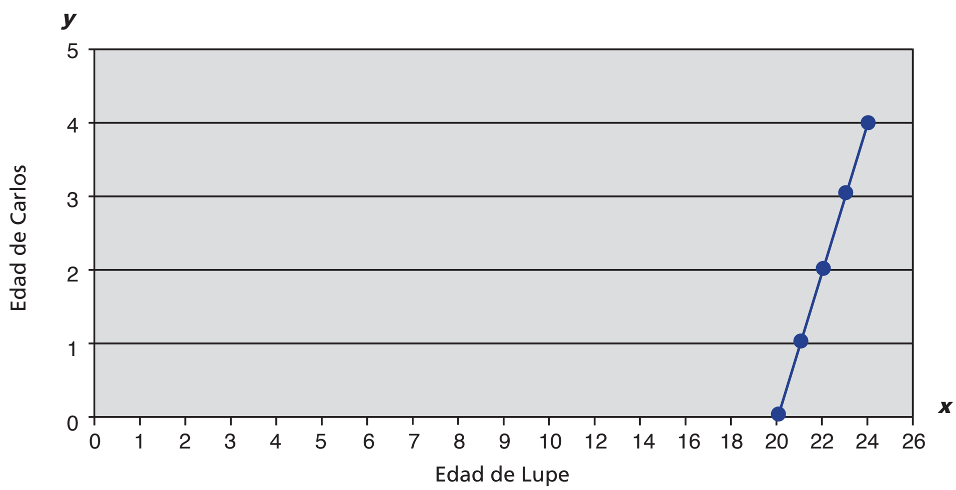
Respuestas reactivo 2.





Respuestas reactivo 2´.





SECUENCIA 37. PROPORCINALIDAD INVERSA

Reactivo 1

1. Si 4 personas tardan 8 días en aplanar un terreno:

a) ¿Cuántos días tardarían en aplanar el mismo terreno 8 personas?

b) Si se quiere que el terreno sea aplanado en sólo 2 días, ¿cuántas personas tienen que trabajar en ello?

c) ¿Cuáles cantidades son inversamente proporcionales en este problema?

Respuestas.
a) 4 días.
b) 16 personas.
c) El número de personas y la cantidad de días.

1'. Si 3 personas tardan 6 días en aplanar un terreno:

a) ¿Cuántos días tardarían en aplanar el mismo terreno 6 personas?

b) Si se quiere que el terreno sea aplanado en sólo 2 días, ¿cuántas personas tienen que trabajar en ello?

c) ¿Cuáles cantidades son inversamente proporcionales en este problema?

Respuestas.
a) 3 días.
b) 9 personas.
c) El número de personas y la cantidad de días.

Reactivo 2

2. En un laboratorio se realiza un experimento para comprobar la relación que hay entre la presión de un gas y el volumen que ocupa (cuando la temperatura es constante).
En la siguiente tabla se registraron los datos obtenidos mediante el experimento.

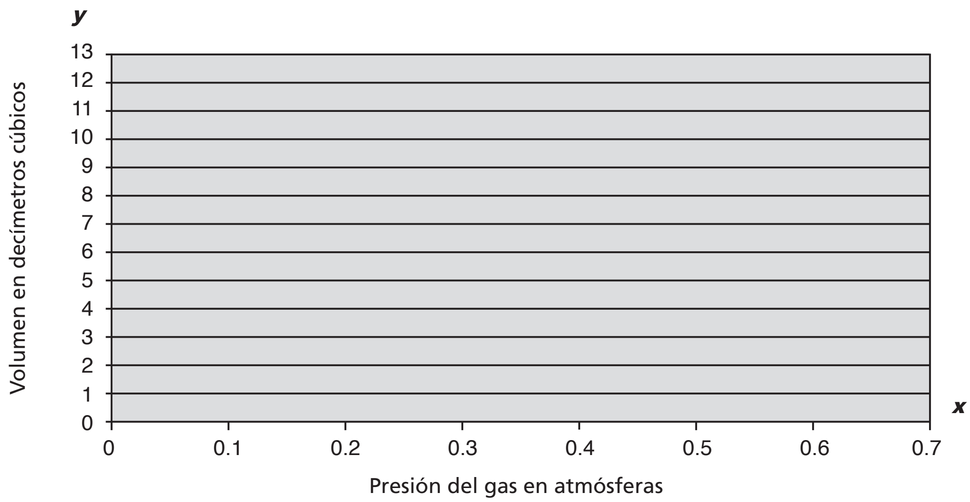
x (presión del gas en atmósferas)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y (volumen en dm^3)	12	6	4	3	2.4	2

a) ¿La presión del gas y el volumen que ocupa el gas son cantidades directamente proporcionales o inversamente proporcionales? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad inversa?

Respuestas.
a) Son inversamente proporcionales.
b) 1.2

c) Con los datos de la tabla anterior construye la gráfica de la presión del gas respecto del volumen que ocupa.



2'. En un laboratorio se realiza un experimento para comprobar la relación que hay entre la presión de un gas y el volumen que ocupa (cuando la temperatura es constante).
En la siguiente tabla se registraron los datos obtenidos mediante el experimento.

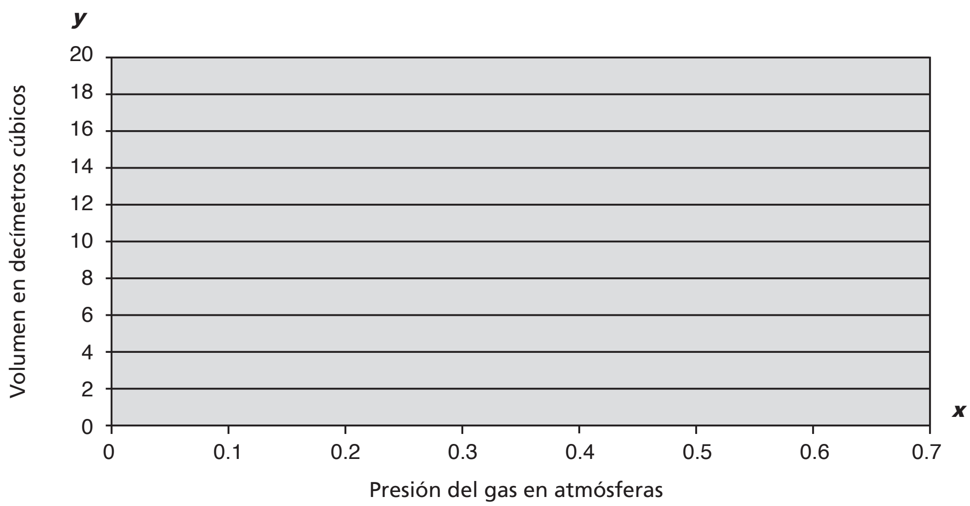
x (presión del gas en atmósferas)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y (volumen en dm^3)	18	9	6	4.5	3.6	3

Respuestas.
a) Son inversamente proporcionales.
b) 1.8

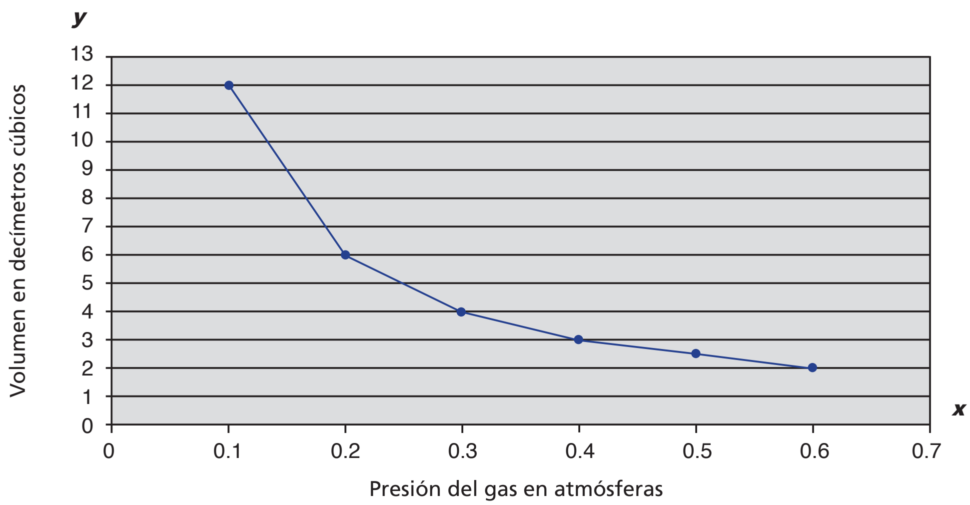
a) ¿La presión del gas y el volumen que ocupa el gas son cantidades directamente proporcionales o inversamente proporcionales? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

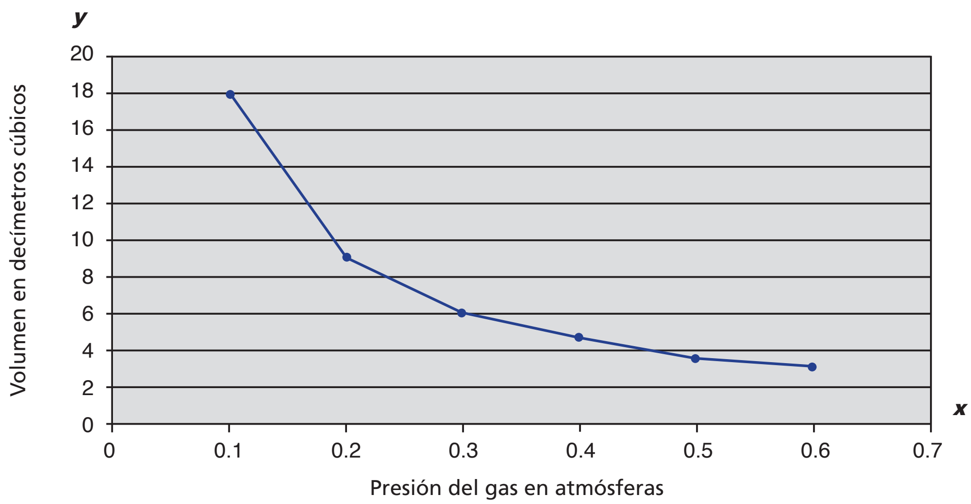
c) Con los datos de la tabla anterior construyan la gráfica de la presión del gas respecto del volumen que ocupa.



Respuesta reactivo 2 c).



Respuesta reactivo 2´ c).



SECUENCIA 38. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Reactivo 1

1. Las medidas del diámetro de 10 cilindros fueron registradas como 3.88, 4.09, 3.92, 3.97, 4.02, 3.95, 4.03, 3.92, 3.98, y 4.06 cm.

   a) ¿Cuál es la medida promedio del diámetro de los cilindros?

   b) Si alguien dice que la medida más representativa de los diámetros es 3.92 cm, ¿qué medida de tendencia central está considerando?

Respuestas.
a) 3.982
b) La moda.

1'. Los salarios mensuales de cuatro personas fueron $5 000, $6 000, $6 500 y $30 000.

   a) ¿Qué medida de tendencia central es más representativa de los salarios?

   b) ¿Cuál es el salario más representativo de esta situación?

Respuestas.
a) La mediana.
b) $6,250.